TS – probabilités et échantillonnage

Exercice 1

Polynésie 2014

Pour chacune des cinq affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. Zoé se rend à son travail à pied ou en voiture. Là où elle habite, il pleut un jour sur quatre.
   Lorsqu'il pleut, Zoé se rend en voiture à son travail dans 80% des cas.
   Lorsqu'il ne pleut pas, elle se rend à pied à son travail avec une probabilité égale à $0,6$.
   Affirmation 1 : "Zoé utilise la voiture un jour sur deux."

2. Dans l'ensemble E des issues d'une expérience aléatoire, on considère deux événements A et B.
   Affirmation 2 : "Si A et B sont indépendants, alors A et $\overline{B}$ sont aussi indépendants."

3. On modélise le temps d'attente, exprimé en minutes, à un guichet, par une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre $0,7$.
   Affirmation 3 : "La probabilité qu'un client attende au moins cinq minutes à ce guichet est $0,7$ environ."

   Affirmation 4 : "Le temps d'attente moyen à ce guichet est de sept minutes."

4. On sait que 39% de la population française est du groupe sanguin A+.
   On cherche à savoir si cette proportion est la même parmi les donneurs de sang.
   On interroge 183 donneurs de sang et parmi eux, 34% sont du groupe sanguin A+.
   Affirmation 5 : "On ne peut pas rejeter, au seuil de 5%, l'hypothèse selon laquelle la proportion de personnes du groupe sanguin A+ parmi les donneurs de sang est de 39% comme dans l'ensemble de la population."

Exercice 2

Antilles Guyane juin 2014

Les parties A et B sont indépendantes

Les résultats seront arrondis à 10^{-4} *près*

Partie A

Un ostréiculteur élève deux espèces d'huîtres : "la plate" et "la japonaise". Chaque année, les huîtres plates représentent 15% de sa production.

Les huîtres sont dites de calibre n°3 lorsque leur masse est comprise entre 66 g et 85 g.

Seulement 10% des huîtres plates sont de calibre n°3, alors que 80% des huîtres japonaises le sont.

1. Le service sanitaire prélève une huître au hasard dans la production de l'ostréiculteur. On suppose que toutes les huîtres ont la même chance d'être choisies.
   On considère les évènements suivants :
   • J : "l'huître prélevée est une huître japonaise",
   • C : "l'huître prélevée est de calibre n°3".

   a. Construire un arbre pondéré complet traduisant la situation.

   b. Calculer la probabilité que l'huître prélevée soit une huître plate de calibre n°3.

   c. Justifier que la probabilité d'obtenir une huître de calibre n°3 est $0,695$.

   d. Le service sanitaire a prélevé une huître de calibre n°3.
   Quelle est la probabilité que ce soit une huître plate ?

2. La masse d'une huître peut être modélisée par une variable aléatoire X suivant la loi normale de moyenne $\mu = 90$ et d'écart-type $\sigma = 2$.
   a. Donner la probabilité que l'huître prélevée dans la production de l'ostréiculteur ait une masse comprise entre 87 g et 89 g.

   b. Donner $P(X \geqslant 91)$.

Partie B

Cet ostréiculteur affirme que 60% de ses huîtres ont une masse supérieure à 91 g.

Un restaurateur souhaiterait lui acheter une grande quantité d'huîtres mais il voudrait, auparavant, vérifier l'affirmation de l'ostréiculteur.

Le restaurateur achète auprès de cet ostréiculteur 10 douzaines d'huîtres qu'on considérera comme un échantillon de 120 huîtres tirées au hasard. Sa production est suffisamment importante pour qu'on l'assimile à un tirage avec remise.

Il constate que 65 de ces huîtres ont une masse supérieure à 91 g.

1. Soit F la variable aléatoire qui à tout échantillon de 120 huîtres associe la fréquence de celles qui ont une masse supérieure à 91 g.
   Après en avoir vérifié les conditions d'application, donner un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% de la variable aléatoire F.

2. Que peut penser le restaurateur de l'affirmation de l'ostréiculteur ?

Exercice 3

Asie 2014

Le taux d'hématocrite est le pourcentage du volume de globules rouges par rapport au volume total du sang. On note X la variable aléatoire donnant le taux d'hématocrite d'un adulte choisi au hasard dans la population française. On admet que cette variable suit une loi normale de moyenne $\mu = 45,5$ et d'écart-type σ.

Partie A

On note Z la variable aléatoire $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} = \dfrac{X-45,5}{\sigma}$.

1. **a.** Quelle est la loi de la variable aléatoire Z ?

   b. Déterminer $P(X \leqslant \mu)$.

2. En prenant $\sigma = 3,8$, déterminer $P(37,9 \leqslant X \leqslant 53,1)$. Arrondir le résultat au centième.

Partie B

Une certaine maladie V est présente dans la population française avec la fréquence 1%. On sait d'autre part que 30% de la population française a plus de 50 ans, et que 90% des porteurs de la maladie V dans la population française ont plus de 50 ans.

On choisit au hasard un individu dans la population française.

On note α l'unique réel tel que $P(X \leqslant \alpha) = 0,995$, où X est la variable aléatoire définie au début de l'exercice. On ne cherchera pas à calculer α.

On définit les évènements :

- M "l'individu est porteur de la maladie V" ;
- S "l'individu a plus de 50 ans" ;
- H "l'individu a un taux d'hématocrite supérieur à α" .

Ainsi $P(M) = 0,01$, $P_M(S) = 0,9$ et $P(H) = P(X > \alpha)$.

D'autre part, une étude statistique a révélé que 60% des individus ayant un taux d'hématocrite supérieur à α sont porteurs de la maladie V.

1. **a.** Déterminer $P(M \cap S)$.

   b. On choisit au hasard un individu ayant plus de 50 ans. Montrer que la probabilité qu'il soit porteur de la maladie V est égale à $0,03$.

2. **a.** Calculer la probabilité $P(H)$.

   b. L'individu choisi au hasard a un taux d'hématocrite inférieur ou égal à α. Calculer la probabilité qu'il soit porteur de la maladie V. Arrondir au millième.

Partie C

Le but de cette partie est d'étudier l'influence d'un gène sur la maladie V.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% de la fréquence de la maladie V dans les échantillons de taille $1\ 000$, prélevés au hasard et avec remise dans l'ensemble de la population française. On arrondira les bornes de l'intervalle au millième.

2. Dans un échantillon aléatoire de $1\ 000$ personnes possédant le gène, on a trouvé 14~personnes porteuses de la maladie V. Au regard de ce résultat, peut-on décider, au seuil de 95%, que le gène a une influence sur la maladie ?

Exercice 4

Métropole juin 2014

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

Partie A

Un laboratoire pharmaceutique propose des tests de dépistage de diverses maladies. Son service de communication met en avant les caractéristiques suivantes :

- la probabilité qu'une personne malade présente un test positif est $0,99$;
- la probabilité qu'une personne saine présente un test positif est $0,001$.

1. Pour une maladie qui vient d'apparaître, le laboratoire élabore un nouveau test. Une étude statistique permet d'estimer que le pourcentage de personnes malades parmi la population d'une métropole est égal à 0,1\,\%. On choisit au hasard une personne dans cette population et on lui fait subir le test.

   On note M l'événement "la personne choisie est malade" et T l'événement "le test est positif".
   a. Traduire l'énoncé sous la forme d'un arbre pondéré.

   b. Démontrer que la probabilité $p(T)$ de l'évènement T est égale à $1,989 \times 10^{-3}$.

   c. L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier la réponse.
   Affirmation : "Si le test est positif, il y a moins d'une chance sur deux que la personne soit malade".

2. Le laboratoire décide de commercialiser un test dès lors que la probabilité qu'une personne testée positivement soit malade est supérieure ou égale à $0,95$. On désigne par x la proportion de personnes atteintes d'une certaine maladie dans la population.

   À partir de quelle valeur de x le laboratoire commercialise-t-il le test correspondant ?

Partie B

La chaîne de production du laboratoire fabrique, en très grande quantité, le comprimé d'un médicament.

1. Un comprimé est conforme si sa masse est comprise entre 890 et 920 mg. On admet que la masse en milligrammes d'un comprimé pris au hasard dans la production peut être modélisée par une variable aléatoire X qui suit la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu,\ \sigma^2\right)$, de moyenne $\mu = 900$ et d'écart-type $\sigma = 7$.
   a. Calculer la probabilité qu'un comprimé prélevé au hasard soit conforme. On arrondira à 10^{-2}.

   b. Déterminer l'entier positif h tel que $P(900-h \leqslant X \leqslant 900+h) \approx 0,99$ à 10^{-3} près.

2. La chaîne de production a été réglée dans le but d'obtenir au moins 97% de comprimés conformes. Afin d'évaluer l'efficacité des réglages, on effectue un contrôle en prélevant un échantillon de $1\ 000$ comprimés dans la production. La taille de la production est supposée suffisamment grande pour que ce prélèvement puisse être assimilé à 1000 tirages successifs avec remise.

   Le contrôle effectué a permis de dénombrer 53 comprimés non conformes sur l'échantillon prélevé.
   Ce contrôle remet-il en question les réglages faits par le laboratoire ? On pourra utiliser un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95%.