

Suite de Héron CORRECTION

Partie A : Etude de la fonction $f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right)$

- a.**
- Cette fonction est définie sur
- $] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty [$

donc $D_f = \mathbb{R}^*$

- b.**
- Calculons
- $f(-x)$

on obtient $f(-x) = \frac{1}{2} \left(-x + \frac{2}{-x} \right) = -\frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right) = -f(x)$

donc $\forall x \in D_f \quad f(-x) = -f(x)$

- c.**
- La fonction
- f
- est impaire

et la courbe C_f est symétrique par rapport au point O de coordonnées (0,0)

- d.**
- La fonction
- f
- est dérivable sur
- $] 0 ; +\infty [$
- et

$$f'(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2}{x^2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2 - 2}{x^2} \right) = \frac{(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})}{2x^2}$$

e.
$$f(\sqrt{2}) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{2} + \frac{2}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{2} + \frac{(\sqrt{2})^2}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{2} (\sqrt{2} + \sqrt{2}) = \frac{1}{2} (2\sqrt{2}) = \sqrt{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right) = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} x + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = 0 + (+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right) = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = +\infty + 0 = +\infty$$

- f.**
- Tableau de variation

x	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$
signe de f'	-	0	+
f	$+\infty$	$\sqrt{2}$	$+\infty$

- g.**
- Le tableau de variation permet d'écrire
- $\forall x > 0 \quad f(x) \geq \sqrt{2}$

donc on a bien $\forall x \in \left[\sqrt{2} ; +\infty [\quad f(x) \geq \sqrt{2} \right.$

Partie B : Etude de la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right)$ avec $u_0 = 3$

a. Démontrons par récurrence sur n que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq \sqrt{2}$

Soit la propriété **P (k)** : $u_k \geq \sqrt{2}$ pour un k donné

Initialisation : Vérifions que **P (0)** est vraie

Comme $u_0 = 3$ on a bien $u_0 \geq \sqrt{2}$

Hérédité : Montrons que si **P (k)** est vraie alors **P (k+1)** reste vraie

Supposons que $u_k \geq \sqrt{2}$ et montrons que $u_{k+1} \geq \sqrt{2}$

On sait que $\forall x \in \left[\sqrt{2} ; +\infty \right[\quad f(x) \geq \sqrt{2}$

Comme $u_k \geq \sqrt{2} \Leftrightarrow u_k \in \left[\sqrt{2} ; +\infty \right[$ on a bien $f(u_k) \geq \sqrt{2}$ c'est-à-dire $u_{k+1} \geq \sqrt{2}$

Conclusion : on a démontré que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq \sqrt{2}$

b. Démontrons par récurrence sur n que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > u_{n+1}$

Soit la propriété **P (k)** : $u_k > u_{k+1}$ pour un k donné

Initialisation : Vérifions que **P (0)** est vraie c'est-à-dire vérifions qu'on a bien $u_0 > u_1$

$$u_1 = \frac{1}{2} \left(u_0 + \frac{2}{u_0} \right) = \frac{1}{2} \left(3 + \frac{2}{3} \right) = \frac{11}{6}$$

Comme $u_0 = 3 > \frac{11}{6}$ on a bien $u_0 > u_1$

Hérédité : Montrons que si **P (k)** est vraie alors **P (k+1)** reste vraie

Supposons que $u_k > u_{k+1}$ et montrons que $u_{k+1} > u_{k+2}$

On sait que la fonction f est strictement croissante sur $\left[\sqrt{2} ; +\infty \right[$

Comme on a $u_k > u_{k+1} \geq \sqrt{2}$ on en déduit que $f(u_k) > f(u_{k+1}) \geq f(\sqrt{2})$

Comme $u_{k+1} = f(u_k)$ et que $u_{k+2} = f(u_{k+1})$

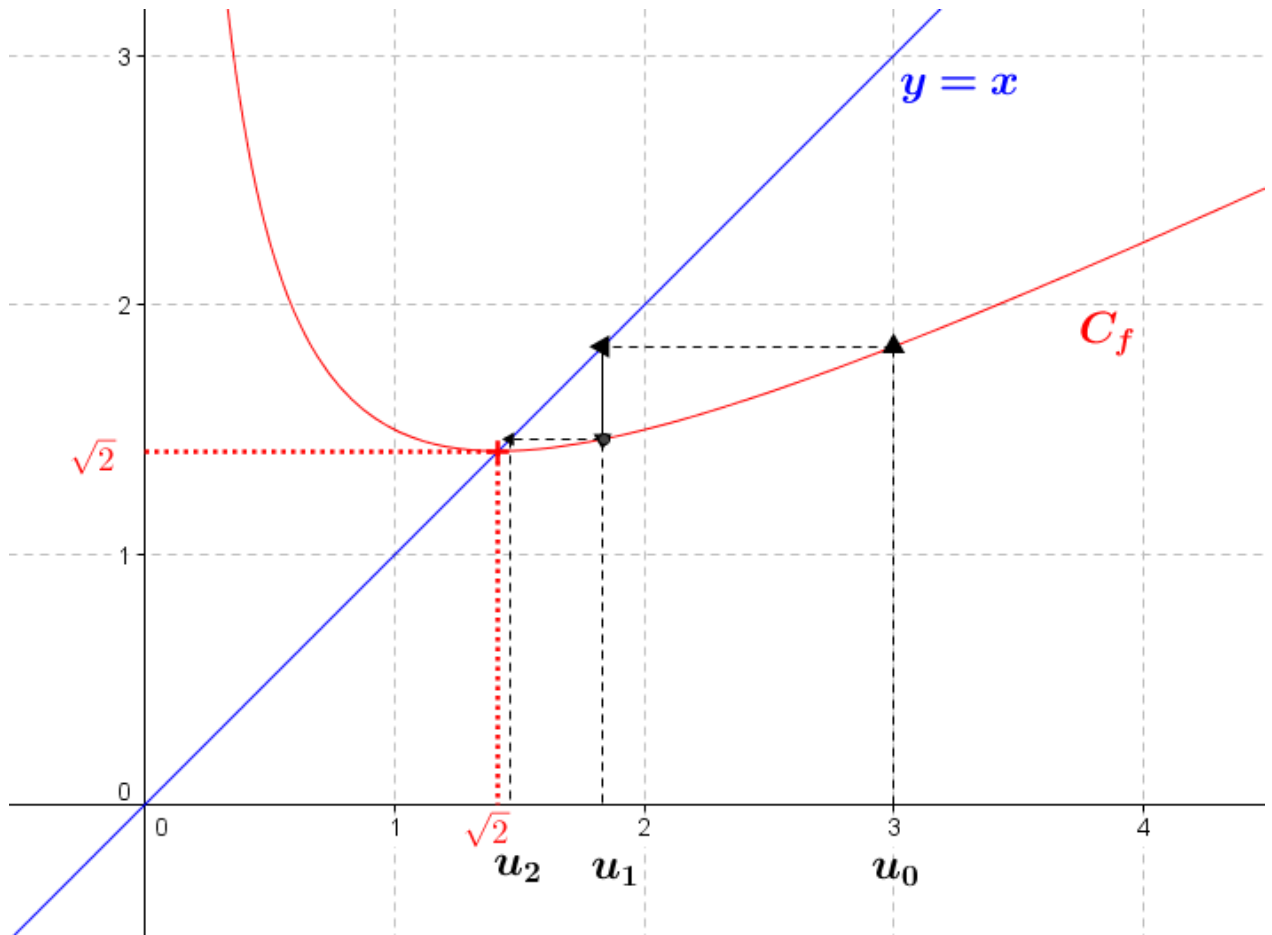
on en déduit que $u_{k+1} > u_{k+2}$

Conclusion : on a démontré que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > u_{n+1}$

c'est-à-dire que la suite (u_n) est strictement décroissante

Remarque : Les 2 propriétés **a)** et **b)** peuvent se démontrer par une seule démonstration par récurrence sur n avec la propriété **P(n)** : $0 < u_{n+1} < u_n \leq \sqrt{2}$

- C.** Représentation graphique de la fonction f sur $]0; 3]$
avec u_0 , u_1 et u_2 sur l'axe des abscisses



$$U_1 = f(U_0) = \frac{1}{2} \left(3 + \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{9}{3} + \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{9+2}{3} \right) = \frac{11}{6} \approx 1,8 \leq U_0$$

Partie C : On admettra que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt{2}$

- a. Ecrire un algorithme qui affiche la valeur du terme u_{100} de la suite (u_n)

ENTREE **n (Entier)**

INITIALISATION

$U = 3$

$i = 0$

BOUCLE FAIRE de $i = 0$ à $n - 1$

$$U = \frac{1}{2} \left(U + \frac{2}{U} \right)$$

$i = i + 1$

FIN_BOUCLE

Afficher « rang » i

Afficher « valeur » U

- b. Ecrire un algorithme qui affiche le 1^{ier} terme de la suite qui permet d'approcher la valeur du nombre $\sqrt{2}$ à 10^{-5} près

INITIALISATION

$U = 3$

$k = 0$

BOUCLE TANT QUE $|U - \sqrt{2}| \geq 0,00001$

$$U = \frac{1}{2} \left(U + \frac{2}{U} \right)$$

$k = k + 1$

FIN_BOUCLE

Afficher « rang » k

Afficher « valeur » U