

Suites numériques

Terminale S



Définition

Une suite (u_n) peut-être définie :

- ✧ de manière explicite : $u_n = f(n)$
- ✧ de manière récurrente : $\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

Variations

- ✧ Si pour tout n , $u_{n+1} - u_n > 0$ ou $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, alors la suite (u_n) est strictement croissante
- ✧ Si pour tout n , $u_{n+1} - u_n < 0$ ou $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, alors la suite (u_n) est strictement décroissante

Suites arithmétiques

Récurrence : $u_{n+1} = u_n + r$ (de raison r)

Explicite : $u_n = u_0 + nr$ ou $u_n = u_p + (n - p)r$

Somme : nbre termes $\times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$

$$S_n = u_0 + \dots + u_n = (n + 1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$$

Suites géométriques

Récurrence : $u_{n+1} = q \times u_n$ (de raison q)

Explicite : $u_n = u_0 \times q^n$ ou $u_n = u_p \times q^{(n-p)}$

Somme : premier terme $\times \frac{1 - q^{\text{nbre termes}}}{1 - q}$

$$S_n = 1 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

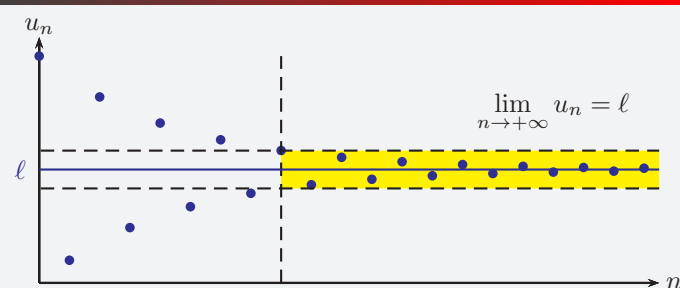
Raisonnement par récurrence

But : montrer qu'une propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$

- ✧ Initialisation : on vérifie que la propriété est vraie au rang n_0
- ✧ Hérédité : on montre que si la propriété est vraie au rang n , alors elle est encore vraie au rang $n + 1$

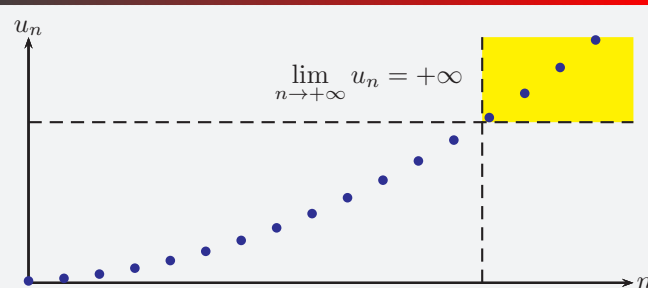
Conclusion : la propriété est vraie pour tout $n \geq n_0$

Limite finie (convergence)



Ex : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n$ n'existe pas

Limite infinie (divergence)



Ex : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 = +\infty$

Théorèmes de comparaison

$(u_n), (v_n), (w_n)$ sont trois suites. Si à partir d'un rang :

✧ $u_n \leq v_n$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$

✧ $u_n \leq v_n$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

✧ $u_n \leq v_n \leq w_n$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$$

Limites d'une suite géométrique

✧ Si $q \leq -1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n$ n'existe pas

✧ Si $-1 < q < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$

✧ Si $q = 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$

✧ Si $q \geq 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$

Convergence d'une suite monotone

Une suite (u_n) est majorée [resp. minorée] si, et seulement si, il existe un réel M [resp. m] tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$ [resp. $u_n \geq m$]. Si la suite est à la fois minorée et majorée, on dit qu'elle est bornée

- ✧ Toute suite croissante et majorée converge, toute suite décroissante et minorée converge
- ✧ Une suite croissante de limite ℓ est majorée par ℓ

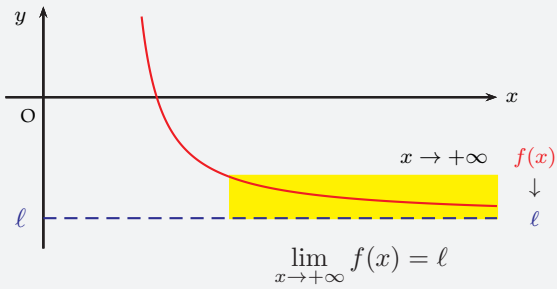


Limites et continuité

Terminale S

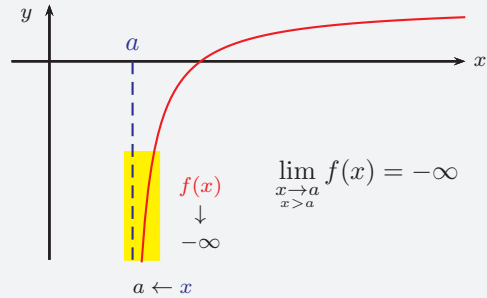


Asymptote horizontale



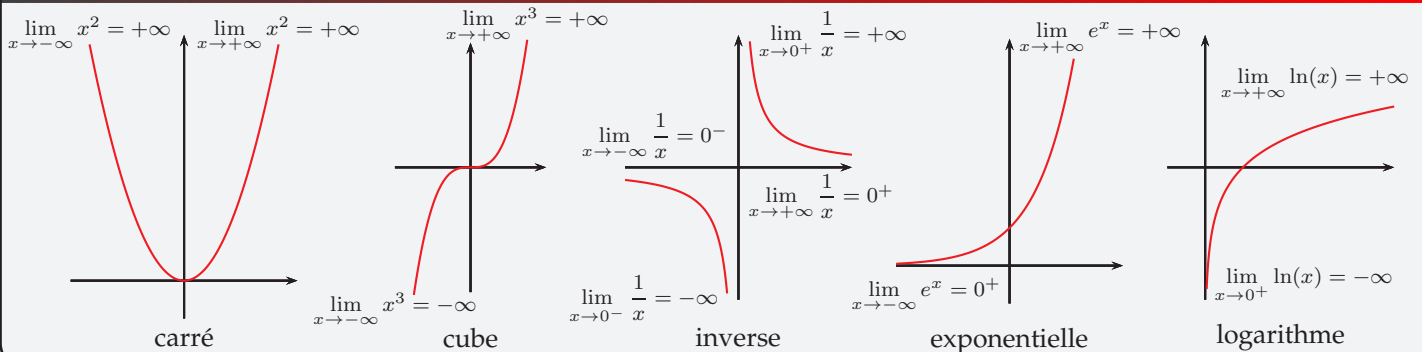
Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \ell$, la droite d'équation $y = \ell$ est une asymptote horizontale à la courbe de f en $+\infty$ ou $-\infty$

Asymptote verticale



Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$, la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe de f

Limites des fonctions usuelles



Opérations sur les limites

$\lim f$	0	0	∞	0	ℓ	ℓ	∞	∞
$\lim g$	0	∞	0	ℓ	0	∞	ℓ	∞
$\lim(f+g)$	0	∞	∞	ℓ	ℓ	∞	∞	∞ /FI
$\lim(f \times g)$	0	FI	FI	0	0	∞	∞	∞
$\lim(f \div g)$	FI	0	∞	0	∞	0	∞	FI

$\ell \neq 0$, règle des signes pour les résultats « ∞ »

Théorèmes de comparaison

f, g, h sont trois fonctions. Si, pour tout $x \in [a, +\infty[$:

✧ $f(x) \leq g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

✧ $f(x) \leq g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

✧ théorème des gendarmes : $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ et

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \ell \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \ell$

Limites particulières

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Fonctions composées

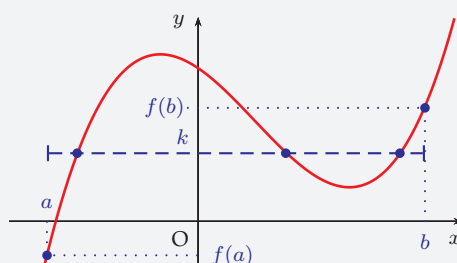
$$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g(f(x))$$

$g \circ f$

si $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \\ \lim_{X \rightarrow \ell} g(X) = L \end{cases}$

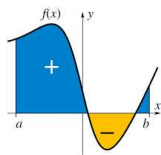
alors $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = L$

Théorème des valeurs intermédiaires



Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$ alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution $\alpha \in [a; b]$

Si de plus f est strictement monotone, α est unique



Dérivation et intégration

Terminale S



Dérivée et tangente

Nombre dérivé de f en a : $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$
 Tangente au point $A(a, f(a))$: $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

Primitive

Primitive de f sur I : fonction F continue, dérivable sur I telle que $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$

Tableau dérivée-primitive

Sous condition d'existence des fonctions :

 dérivée			k	x^n	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{x}$	e^x	$\ln(x)$	$\cos(x)$	$\sin(x)$	 primitive
			0	$n x^{n-1}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$-\frac{1}{x^2}$	e^x	$\frac{1}{x}$	$-\sin(x)$	$\cos(x)$	
 dérivée	$u + v$	$u \times v$	ku	u^n	$\sqrt{u}$	$\frac{u}{v}$	e^u	$\ln(u)$	$\cos(u)$	$\sin(u)$	 primitive
	$u' + v'$	$u'v + uv'$	ku'	$nu'u^{n-1}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$	$u' e^u$	$\frac{u'}{u}$	$-u' \sin(u)$	$u' \cos(u)$	

Variations d'une fonction

- ✧ f croissante sur $I \iff f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$
- ✧ f décroissante sur $I \iff f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$
- ✧ f constante sur $I \iff f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$

Propriétés des primitives

- ✧ Toute fonction continue admet des primitives
- ✧ Primitives de f : fonctions G telles que $G(x) = F(x) + k$
- ✧ Si de plus $F(x_0) = y_0$, la primitive est unique

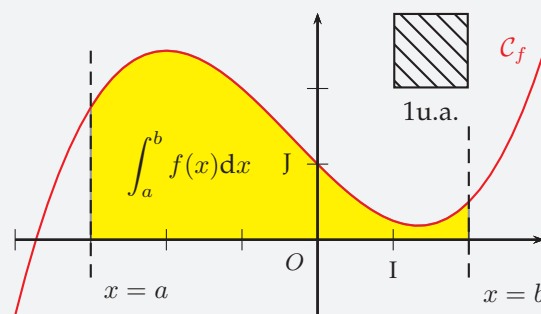
Intégrale

Intégrale de f positive sur $[a, b]$: aire du domaine délimité par la courbe représentative C_f de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

On note cette intégrale : $\int_a^b f(x) dx$

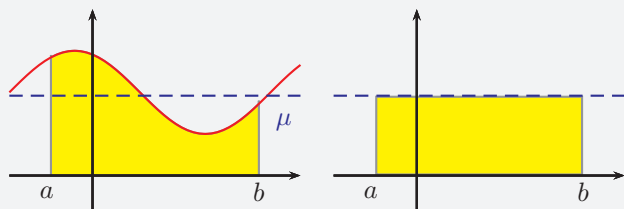
L'aire est exprimée en unités d'aire (u.a.) qui correspond à l'aire du rectangle de côtés OI et OJ

Si f est négative, l'aire vaut $-\int_a^b f(x) dx$



Calcul d'intégrales

- ✧ Soit f continue positive sur $[a, b]$, la fonction F définie sur $[a, b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est dérivable de dérivée $F'(x) = f(x)$
- ✧ $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$
- ✧ Valeur moyenne de f sur $[a, b]$: $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$



Propriétés des intégrales

f et g sont deux fonctions continues sur $[a, b]$:

- ✧ $\int_a^b f(x) + g(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$
- ✧ $\int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$
- ✧ $f(x) \geq 0 \implies \int_a^b f(x) dx \geq 0$
- ✧ $f(x) \leq g(x) \implies \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$
- ✧ Relation de Chasles : $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$



Exponentielle et logarithme

Terminale S



Fonction exponentielle

$f(x) = \exp(x) = e^x$
définie sur $\mathbb{R}$
à valeurs dans $]0; +\infty[$

$$e^0 = 1$$

$$e^1 = e \approx 2,718$$

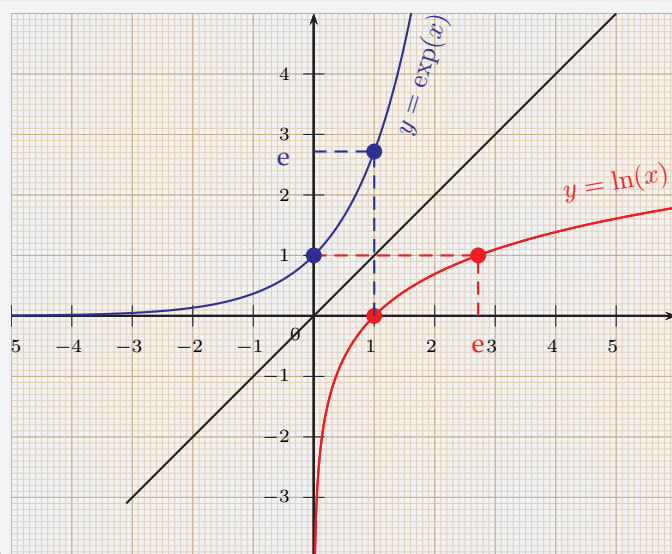
$$(e^x)' = e^x$$

$$(e^u)' = u'e^u$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

Courbes représentatives



Fonction logarithme

$f(x) = \ln(x)$
définie sur $]0; +\infty[$
à valeurs dans $\mathbb{R}$

$$\ln(1) = 0$$

$$\ln(e) = 1$$

$$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$$

$$(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

Propriétés des exponentielles

a, b et n sont des réels :

✧ Produit : $e^a \times e^b = e^{a+b}$

✧ Inverse : $\frac{1}{e^a} = e^{-a}$

✧ Quotient : $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$

✧ Puissance : $(e^a)^n = e^{an}$

✧ Racine carrée : $e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

Propriétés des logarithmes

a et b sont des réels strictement positifs, n est un réel :

✧ Produit : $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$

✧ Inverse : $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$

✧ Quotient : $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

✧ Puissance : $\ln(a^n) = n \ln(a)$

✧ Racine carrée : $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln(a)$

Lien exponentielle et logarithme

La fonction exponentielle (de base e) et la fonction logarithme (népérien) sont des fonctions réciproques : leurs courbes représentatives sont symétriques par rapport à la première bissectrice ($y = x$)

✧ $\ln(\exp x) = x$ $\ln(e^x) = x$

✧ $\exp(\ln x) = x$ $e^{\ln(x)} = x$

✧ $\exp x = y \iff x = \ln(y)$ $e^x = y \iff x = \ln(y)$

✧ $x^y = \exp(y \ln(x))$ $x^y = e^{y \ln(x)}$

Équations et d'inéquations avec des exponentielles

u, v sont des réels, λ est un réel strictement positif :

✧ $e^u = e^v \iff u = v$ $e^u = \lambda \iff u = \ln(\lambda)$

✧ $e^u > e^v \iff u > v$ $e^u > \lambda \iff u > \ln(\lambda)$

✧ $e^u \leq e^v \iff u \leq v$ $e^u \leq \lambda \iff u \leq \ln(\lambda)$

✧ $e^u \leq 0$ impossible et $e^u > 0$ toujours vrai

Équations et d'inéquations avec des logarithmes

u, v sont des réels strictement positifs, λ est un réel :

✧ $\ln(u) = \ln(v) \iff u = v$ $\ln(u) = \lambda \iff u = e^\lambda$

✧ $\ln(u) > \ln(v) \iff u > v$ $\ln(u) > \lambda \iff u > e^\lambda$

✧ $\ln(u) \leq \ln(v) \iff u \leq v$ $\ln(u) \leq \lambda \iff u \leq e^\lambda$

✧ $\ln(u) \leq 0 \iff 0 < u \leq 1$ et $\ln(u) > 0 \iff u > 1$

Croissance comparée et limites particulières

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Forme algébrique

$$z = a + ib$$

- ◇ $i^2 = -1$
- ◇ $a = \Re(z) \rightarrow$ partie réelle
- $b = \Im(z) \rightarrow$ partie imaginaire
- ◇ Conjugué : $\bar{z} = a - ib$
- ◇ $\mathbb{C} = \{\text{nombres complexes}\}$

Forme trigonométrique

$$z = |z| (\cos \theta + i \sin \theta)$$

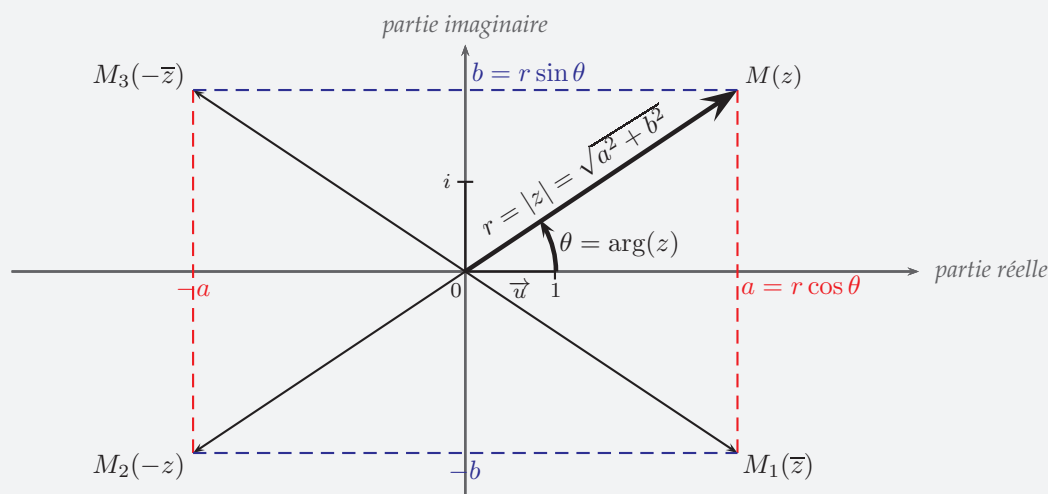
- ◇ Module :
 $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$
- ◇ Argument :
 $\arg(z) = \theta = (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) [2\pi]$
 $\cos \theta = \frac{a}{|z|} ; \sin \theta = \frac{b}{|z|}$

Forme exponentielle

$$z = r e^{i\theta}$$

- ◇ $r = |z| > 0$
- ◇ $\theta = \arg(z)$
- ◇ $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$
- ◇ $e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$

Représentation graphique



Propriétés du conjugué

- ◇ $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$
- ◇ $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$
- ◇ $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$
- ◇ $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$
- ◇ $z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}$
- ◇ $z \in i\mathbb{R} \iff z = -\bar{z}$
- ◇ $z = 0 \iff \Re(z) = \Im(z) = 0$

Propriétés du module/argument

- ◇ $|-z| = |\bar{z}| = |z|$
- ◇ $|zz'| = |z| |z'|$
- ◇ $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') [2\pi]$
- ◇ $|z^n| = |z|^n$
- ◇ $\arg(z^n) = n \arg(z) [2\pi]$
- ◇ $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$
- ◇ $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') [2\pi]$

Propriété de l'exponentielle

- ◇ $re^{i\theta} \times re^{i\theta'} = rr' e^{i(\theta+\theta')}$
- ◇ $(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$
- ◇ $\frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r} e^{-i\theta}$
- ◇ $\frac{re^{i\theta}}{r' e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'} e^{i(\theta-\theta')}$
- ◇ $\overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta}$

Lien complexes-géométrie

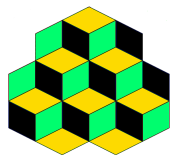
- ◇ $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$ et $AB = |z_B - z_A|$
- ◇ $|z - z_A| = r$: cercle de centre A de rayon r
- ◇ $|z - z_A| = |z - z_B|$: médiatrice de [AB]
- ◇ $(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A)$
- ◇ $\arg(z - z_A) = \theta [2\pi]$: demi-droite d'origine A d'angle θ
- ◇ $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$
- ◇ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ orthogonaux $\iff \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}$
- ◇ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ colinéaires $\iff \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$

Lien complexes-trigonométrie

Formule de Moivre : $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$
Formules d'Euler : $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} ; \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

Lien complexes-second degré

- $az^2 + bz + c = 0, \Delta = b^2 - 4ac$
- ◇ $\Delta > 0$: 2 racines réelles $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
 - ◇ $\Delta = 0$: 1 racine double $\frac{-b}{2a}$
 - ◇ $\Delta < 0$: 2 racines conjuguées $\frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$



Géométrie dans l'espace

Terminale S

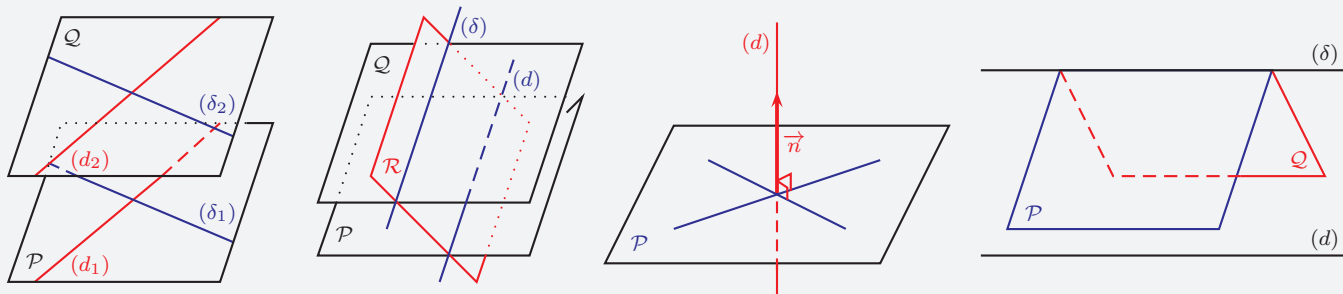


M. Daval

Règles d'incidence

- ✧ Si une droite (d) est parallèle à une droite (δ) d'un plan $\mathcal{P}$, alors la droite (d) est parallèle au plan $\mathcal{P}$
- ✧ Si deux droites sont parallèles à une même troisième, alors elles sont parallèles entre elles
- ✧ Si deux plans sont parallèles à un même troisième, alors ils sont parallèles
- ✧ Si deux droites sécantes d'un plan $\mathcal{P}$ sont respectivement parallèles à deux droites sécantes d'un plan $\mathcal{Q}$, alors les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont parallèles
- ✧ Si deux plans sont parallèles, alors tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et les droites d'intersection sont parallèles
- ✧ Une droite (d) est perpendiculaire à un plan $\mathcal{P}$ si elle est orthogonale à deux droites sécantes du plan $\mathcal{P}$. Elle est alors orthogonale à toutes les droites de ce plan. Un vecteur $\vec{n}$ qui dirige (d) est un vecteur normal à $\mathcal{P}$
- ✧ Théorème du toit : si une droite (d) est parallèle à deux plans sécants $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$, alors (d) est parallèle à la droite (δ) d'intersection de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{Q}$

Illustrations des quatre dernières règles



Vecteurs

- ✧ Relation de Chasles : $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$
- ✧ $\vec{u} = \vec{v} \iff \begin{cases} x = x' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases} ; \vec{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$
- ✧ $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
- ✧ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires $\iff \vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$
- ✧ $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ coplanaires $\iff \vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$

Produit scalaire

Écritures :

- ✧ $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$
- ✧ $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$
- ✧ $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$
- ✧ $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{OA} \cdot \vec{OB} = \vec{OA} \cdot \vec{OH}$ où H est le projeté orthogonal du point B sur la droite (OA)

Propriétés :

- ✧ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux $\iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
- ✧ Deux droites (d) et (δ) de vecteurs normaux $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont orthogonales $\iff \vec{n} \cdot \vec{n'} = 0$
- ✧ Deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P'}$ de vecteurs normaux $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont parallèles ou confondus $\iff \vec{n} = k\vec{n'}$

Coplanarité

Des points ou des droites ou des vecteurs sont coplanaires s'ils sont inclus dans le même plan

Équations de droites et de plans

Écriture vectorielle :

- ✧ $\vec{AM} = t\vec{u}$: droite passant par A de vecteur direct. $\vec{u}$
- ✧ $\vec{AM} = t\vec{u} + t'\vec{v}$: plan passant par A de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires
- ✧ $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$: plan passant par A de vecteurs normal $\vec{n}$

Représentations paramétriques :

- ✧ Droite (d) passant A et de vecteur directeur $\vec{u}$:

$$\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases} \text{ avec } \vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$
- ✧ Plan $\mathcal{P}$ passant par A dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$\begin{cases} x = x_A + ta + t'a' \\ y = y_A + tb + t'b' \\ z = z_A + tc + t'c' \end{cases} \text{ avec } \vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \vec{v} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}, t, t' \in \mathbb{R}$$

Equation cartésienne d'un plan de vecteur normal $\vec{n}$:

$$ax + by + cz + d = 0 \text{ où } \vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$



Probabilités discrètes

Terminale S



Rappel sur les probabilités et variables aléatoires

$$P(\emptyset) = 0 \quad ; \quad 0 \leq P(A) \leq 1 \quad ; \quad P(\Omega) = 1 \quad ; \quad P(\bar{A}) = 1 - P(A) \quad ; \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\text{Espérance : } E(X) = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i) \quad ; \quad \text{Variance : } V(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - E(X))^2 P(X = x_i) \quad ; \quad \text{Écart-type : } \sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Loi de Bernoulli

Expérience qui n'a que deux issues possibles : « succès » de probabilité p et « échec » de probabilité $1 - p$

Notation : $\mathcal{B}(p)$

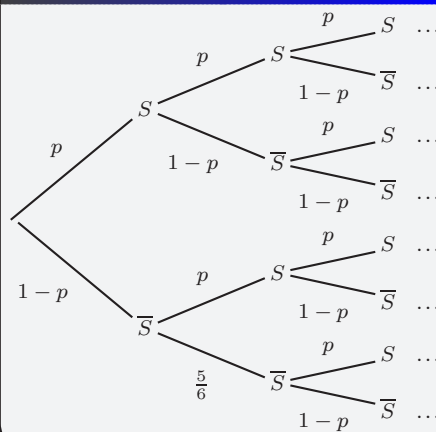
$$P(X = 1) = p \text{ et } P(X = 0) = 1 - p$$

$$E(X) = p$$

$$V(X) = p(1 - p)$$

$$\sigma(X) = \sqrt{p(1 - p)}$$

Arbre pondéré de la loi binomiale



Loi binomiale

Répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. X est égale au nombre de succès.

Notation : $\mathcal{B}(n; p)$; $q = 1 - p$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times q^{n-k}$$

$$E(X) = np$$

$$V(X) = npq$$

$$\sigma(X) = \sqrt{npq}$$

Probabilités conditionnelles

Probabilité conditionnelle de l'évènement B sachant que l'évènement A est réalisé : $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ avec $P(A) \neq 0$

$$\text{Cas d'équiprobabilité sur } \Omega : P_A(B) = \frac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}(A)}$$

Probabilités composées : $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A)$

Probabilités totales avec $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ formant une partition de Ω :

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B)$$

$$P(B) = P(A_1)P_{A_1}(B) + P(A_2)P_{A_2}(B) + \dots + P(A_n)P_{A_n}(B)$$

Indépendance de deux événements

A et B indépendants

$$\iff P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

$$\iff P_A(B) = P(B)$$

$$\iff P_B(A) = P(A)$$

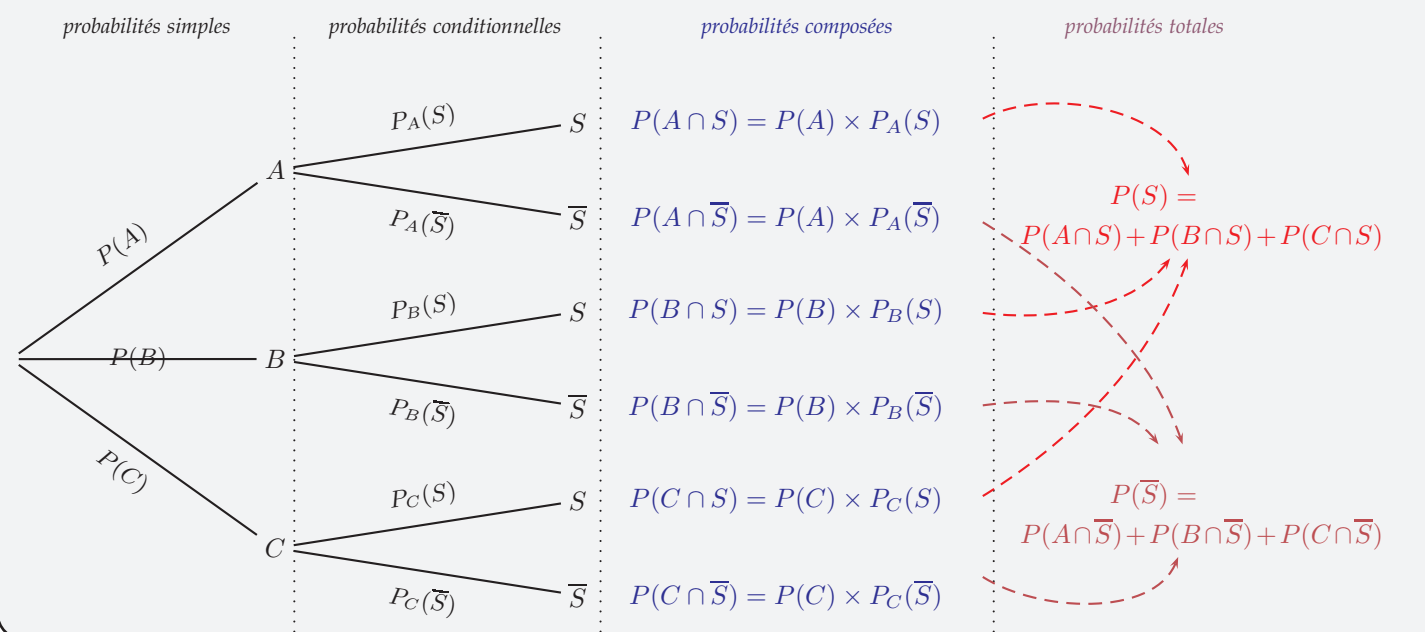
A et B indépendants

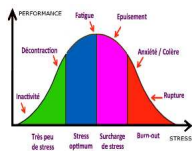
$$\iff \bar{A} \text{ et } B \text{ indépendants}$$

$$\iff A \text{ et } \bar{B} \text{ indépendants}$$

$$\iff \bar{A} \text{ et } \bar{B} \text{ indépendants}$$

Arbre de probabilité





Probabilités continues

Terminale S



Variable aléatoire à densité sur I

Fonction de densité sur I : fonction f continue et positive sur I telle que

$$\int_I f(t) dt = 1$$

$$\diamond P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t) dt$$

$$\diamond P(X = a) = 0$$

$$\diamond P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b)$$

$$\diamond P(X \leq t) = 1 - P(X \geq t)$$

$$\diamond E(X) = \int_I t f(t) dt$$

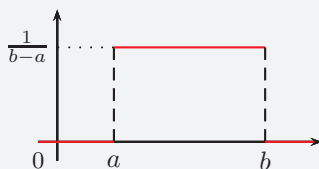
Loi uniforme sur $[a, b]$

Notation : $\mathcal{U}[a, b]$

$$f(t) = \frac{1}{b-a}$$

$$P(c \leq X \leq d) = \frac{d-c}{b-a}$$

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$



Loi exponentielle sur $\mathbb{R}^+$

Notation : $\mathcal{E}(\lambda)$

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \text{ avec } \lambda > 0$$

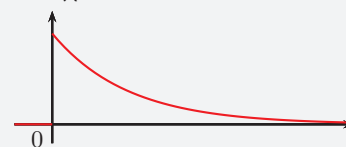
$$P(a \leq X \leq b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$$

$$P(X \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

$$P(X \geq t) = e^{-\lambda t}$$

$$P_{X \geq t}(X \geq t+h) = P(X \geq h)$$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$



Théorème de Moivre-Laplace

$$\diamond p \in]0, 1[\text{ et } n \in \mathbb{N}^*$$

$$\diamond X_n \text{ suit la loi binomiale } \mathcal{B}(n; p)$$

$$\diamond Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{npq}}$$

Pour tous réels a et b tels que $a \leq b$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(a \leq Z_n \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Loi normale centrée réduite sur $\mathbb{R}$

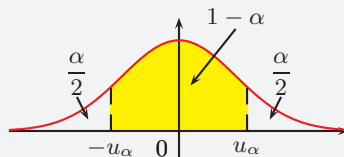
Notation : $\mathcal{N}(0; 1)$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

$$E(X) = 0 \text{ et } V(X) = 1$$

$$\forall \alpha \in]0, 1[, \exists ! u_\alpha \in \mathbb{R}_+^* \text{ tel que}$$

$$P(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$$



$$P(-1,96 \leq X \leq 1,96) = 0,95$$

$$P(-2,58 \leq X \leq 2,58) = 0,99$$

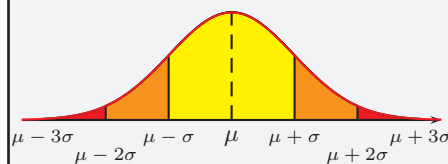
Loi normale sur $\mathbb{R}$

Notation : $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$

$$E(X) = \mu \text{ et } V(X) = \sigma^2$$

$$X \text{ suit la loi } \mathcal{N}(\mu; \sigma^2) \iff$$

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \text{ suit la loi } \mathcal{N}(0; 1)$$



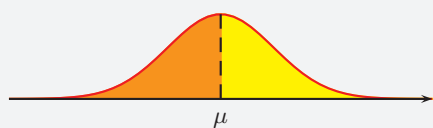
$$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0,68$$

$$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,96$$

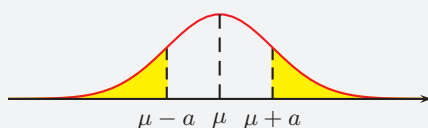
$$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0,997$$

Propriétés des lois normales

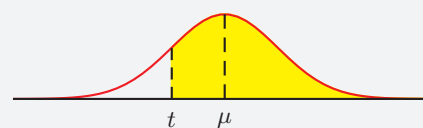
$$P(X \leq \mu) = P(X \geq \mu) = 0,5$$



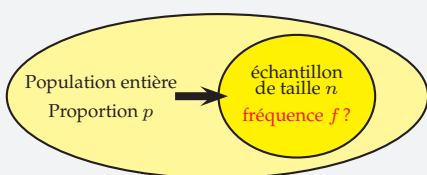
$$P(X < \mu - a) = P(X > \mu + a)$$



$$P(X > t) = 0,5 + P(t < X < \mu)$$



Intervalle de fluctuation



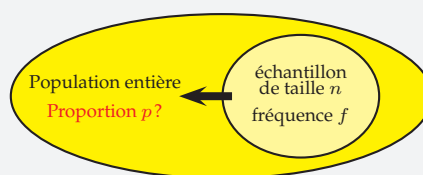
Intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de $1 - \alpha$

$$I_n = \left[p - u_\alpha \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}; p + u_\alpha \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right]$$

Conditions : $n \geq 30$; $nf \geq 5$; $n(1-f) \geq 5$

Seuil de 95 % : $u_{0,05} = 1,96$

Intervalle de confiance



Intervalle de confiance de p au niveau de confiance 95 %

$$\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$$

Conditions : $n \geq 30$; $nf \geq 5$; $n(1-f) \geq 5$