

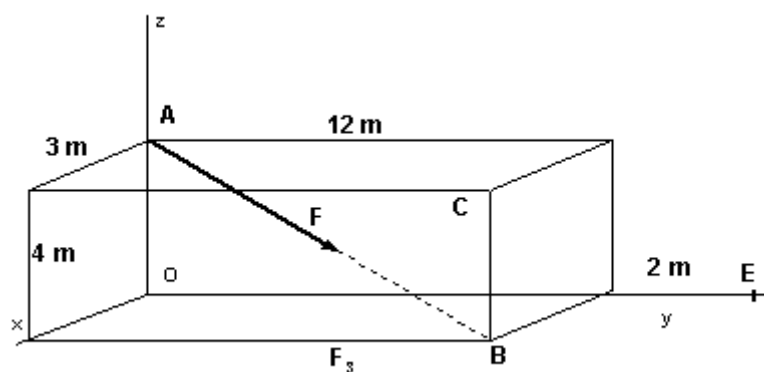
Exercice n° 2 : Pistes de travail

Exercice 2

Soit le vecteur $\vec{F}$ une force d'intensité 195 kN qui a comme support la droite (AB) sur un solide (voir dessin ci-dessous)

1) Trouver les moments de $\vec{F}$ par rapport à chacun des axes Ox , Oy et Oz

2) Trouver le moment de $\vec{F}$ par rapport à l'axe CE



Correction : On va travailler dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de (O, Ox, Oy, Oz)

Rappel du cours : Le moment d'une force « glissante » par rapport à un axe est la projection orthogonale sur cet axe du vecteur moment de cette force par rapport à un point quelconque de cet axe
(Le moment d'un vecteur glissant par rapport à un axe est le produit scalaire du vecteur moment rapport à un point quelconque de cet axe avec un vecteur unitaire de cet axe)

1) Pour calculer les moments de la force $\vec{F}$ par rapport aux axes Ox , Oy et Oz

1.1) On va calculer les coordonnées du vecteur $\vec{F}$ dans cette base c'est-à-dire $\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$

1.2) On va calculer $\vec{M}_O$ le vecteur moment $\vec{M}$ de la force $\vec{F}$ par rapport au point O
en utilisant la formule $\vec{M}_O = \vec{OA} \wedge \vec{F}$

1.3) On va calculer on va on va calculer le produit scalaire $\vec{M}_O \cdot \vec{i}$, $\vec{M}_O \cdot \vec{j}$ et $\vec{M}_O \cdot \vec{k}$

Réponses question n° 1

CALCULS des moments de la force $\vec{F}$ par rapport aux axes Ox , Oy et Oz

Dans le repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \right)$

$$A(0, 0, 4) \quad B(3, 12, 0) \quad \vec{AB}(3, 12, -4) \quad \text{et} \quad \left\| \vec{AB} \right\| = \sqrt{3^2 + 12^2 + (-4)^2} = 13$$

Un vecteur « unitaire » de la droite (AB) est $\vec{1}_{AB} = \frac{\vec{AB}}{\left\| \vec{AB} \right\|}$ qui a pour coordonnées $\left(\frac{3}{13}, \frac{12}{13}, -\frac{4}{13} \right)$

Le vecteur $\vec{F}$ a pour coordonnées $(F_x, F_y, F_z) = (45\,000, 180\,000, -60\,000)$

Le moment du vecteur $\vec{F}$ par rapport au point O est : $\vec{M}_{O/F} = \vec{OA} \wedge \vec{F}$

$$\text{ET donc on a : } \vec{M}_{O/F} = \vec{OA} \wedge \vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 45\,000 \\ 180\,000 \\ -60\,000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \times 180\,000 \\ 4 \times 45\,000 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -720\,000 \\ 180\,000 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\vec{M}_{O/F} = -720\,000 \vec{i} + 180\,000 \vec{j}$$

- le moment du vecteur $\vec{F}$ par rapport à l'axe Ox est $\vec{M}_{O/F} \cdot \vec{i} = -720\,000$
- le moment du vecteur $\vec{F}$ par rapport à l'axe Oy est $\vec{M}_{O/F} \cdot \vec{j} = 180\,000$
- le moment du vecteur $\vec{F}$ par rapport à l'axe Oz est $\vec{M}_{O/F} \cdot \vec{k} = 0 \text{ KN}\cdot\text{m}$

Réponses :	$\left\{ \begin{array}{l} \text{le moment de la force } \vec{F} \text{ par rapport à l'axe } Ox \text{ est égal à } -720 \text{ KN}\cdot\text{m} \\ \text{le moment de la force } \vec{F} \text{ par rapport à l'axe } Oy \text{ est égal à } 180 \text{ KN}\cdot\text{m} \\ \text{le moment de la force } \vec{F} \text{ par rapport à l'axe } Oz \text{ est égal à } 0 \text{ KN}\cdot\text{m} \end{array} \right.$
-------------------	---

Réponse question n° 2

Calculons le moment de la force $\vec{F}$ par rapport à l'axe (CE)

Calcul à connaître : Le moment d'un vecteur glissant par rapport à un axe est la projection orthogonale sur cet axe du moment de ce vecteur glissant par rapport à un point quelconque de cet axe
(c'est à dire le calcul d'un produit scalaire)

Calculons le moment de la force $\vec{F}$ par rapport au point $C \in (CE)$

La force $\vec{F}$ a pour direction l'axe (AB)

Le moment du vecteur $\vec{F}$ par rapport au point C est donc égal à : $\vec{M}_{C/F} = \vec{CB} \wedge \vec{F}$

$$\text{ET on a : } \vec{M}_{C/F} = \vec{CB} \wedge \vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 45\,000 \\ 180\,000 \\ -60\,000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \times 180\,000 \\ -4 \times 45\,000 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 720\,000 \\ -180\,000 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\vec{M}_{C/F} = 720\,000 \vec{i} - 180\,000 \vec{j}$$

Pour calculer la projection scalaire de ce vecteur sur l'axe (CE) :

Calculons les coordonnées d'un vecteur unitaire de l'axe (CE)

$$C(3, 12, 4) \quad E(0, 14, 0) \quad \vec{CE}(-3, 2, -4) \quad \text{et donc} \quad \left\| \vec{CE} \right\| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + (-4)^2} = \sqrt{29}$$

$$\text{et donc un vecteur « unitaire » de l'axe } (CE) \text{ est } \vec{1}_{CE} = \frac{\vec{CE}}{\left\| \vec{CE} \right\|} \text{ de coordonnées } \left(\frac{-3}{\sqrt{29}}, \frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{-4}{\sqrt{29}} \right)$$

Le moment de la force $\vec{F}$ par rapport à l'axe CE est donc $\vec{M}_{C/F} \cdot \vec{1}_{CE}$

$$\left(720\,000 \vec{i} - 180\,000 \vec{j} \right) \cdot \left(\frac{-3}{\sqrt{29}} \vec{i} + \frac{2}{\sqrt{29}} \vec{j} + \frac{-4}{\sqrt{29}} \vec{k} \right) =$$

$$720\,000 \times \left(\frac{-3}{\sqrt{29}} \right) + (-180\,000) \times \left(\frac{2}{\sqrt{29}} \right) \approx -467\,952$$

Le moment de la force $\vec{F}$ par rapport à l'axe $CE \approx -468 \text{ KN} \cdot \text{m}$

Comme ce calcul est négatif cela veut dire que le force $\vec{F}$ provoque un mouvement de rotation dans le sens « horaire » par rapport à l'axe CE