Chute verticale d'un solide dans un fluide

I. Rappels

1. Force de pesanteur et champ de pesanteur

La force de pesanteur ou poids $\vec{P}$ est la force d'attraction exercée par la Terre sur un corps de masse m placé à son voisinage :

$$\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g}$$

$\overrightarrow{g}$ est le vecteur champ de pesanteur ou le vecteur accélération de la pesanteur. Il dépend de l'altitude et de la latitude où l'on se trouve.
Dans une zone de l'espace de quelques kilomètres de long, de large et de haut, $\overrightarrow{g}$ est le même en tout point de l'espace : on dit que **le champ de pesanteur est uniforme**.

2. Poussée d'Archimède

Un solide immergé dans un fluide subit de la part de celui-ci une force verticale qui correspond au poids du fluide déplacé.

$$\overrightarrow{\Pi} = -m'\overrightarrow{g}$$

Remarque : l'expression vectorielle est tout le temps la même car $\overrightarrow{\Pi}$ et $\overrightarrow{g}$ sont tout le temps opposés. En revanche, l'expression algébrique dépend du choix du sens de l'axe.
Pour la poussée d'Archimède, on utilise la plupart du temps la masse volumique μ du fluide à la place de la masse :

$$\overrightarrow{\Pi} = -\mu V\overrightarrow{g}$$

Π s'exprime en N (Newtons), μ la masse volumique du fluide en kg.m^{-3}, V le volume de fluide déplacé en m^3 et $\overrightarrow{g}$ en N.kg^{-1}.

3. Les forces de frottement

L'expression de la force de frottement dépend :
- de la vitesse du solide ;
- de la nature du fluide ;
- de la forme et de la dimension du solide ;
- de l'état de la surface du solide.

Pour des vitesses faibles, la force de frottement est proportionnelle à la vitesse :

$$\overrightarrow{f} = -k\overrightarrow{v}$$

$\overrightarrow{f}$ et $\overrightarrow{g}$ sont de sens contraires.

Lorsque les vitesses sont élevées, la force de frottement est proportionnelle au carré de la vitesse :

$\overrightarrow{f} = -k'v\overrightarrow{v}$

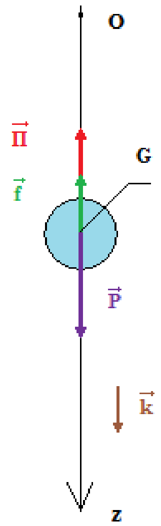
Remarque : il existe des cas particuliers comme celui de la sphère lisse. Dans ce cas précis, on utilise la relation de Stokes :
$\overrightarrow{f} = -6\Pi R\eta\overrightarrow{v}$ avec $\overrightarrow{f}$ en N, R le rayon en m, η le coefficient de viscosité en N.s.m^{-2} et $\overrightarrow{v}$ en m.s^{-1}.

II. Chute dans un fluide

1. Etude préliminaire du mouvement : régimes et vitesse limite

- **Système :** une balle de masse m et de centre d'inertie G
- **Référentiel :** le laboratoire, référentiel terrestre supposé galilléen
- **Bilan des forces :** le poids du système ($\overrightarrow{P}$), la poussée d'Archimède ($\overrightarrow{\Pi}$) et les frottements exercés par le fluide sur le solide ($\overrightarrow{f}$)

- **Schéma :**

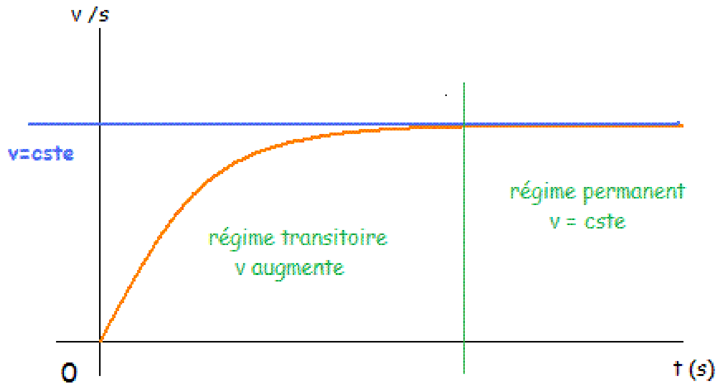


On se propose d'étudier le mouvement. Il peut se décomposer en deux phases.

1ère phase : la vitesse initiale est nulle. Lorsqu'on lâche le système, la vitesse augmente ; ici v $\neq$ cste. Le mouvement est donc rectiligne accéléré.
Au fur et à mesure, les frottements augmentent car la force de frottement est liée à la vitesse.

2ème phase : lorsque $\overrightarrow{f}$ augmente, à un moment donné on a : $\overrightarrow{f} + \overrightarrow{\Pi} = -\overrightarrow{P}$.
Dans ce cas là, on peut appliquer le principe d'inertie : si $\Sigma\overrightarrow{F_{ext}} = \overrightarrow{0}$ alors $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{cste}$. Le mouvement est donc rectiligne uniforme.

Synthèse : la vitesse de la balle (et de tout corps en chute) augmente jusqu'à une valeur limite.
Une fois que cette vitesse limite est atteinte, le mouvement est rectiligne uniforme.
Le régime **transitoire** est la période durant laquelle la vitesse de la bille augmente
Le régime **permanent** est la période durant laquelle la vitesse de la bille est constante



Lorsque que la vitesse de la bille est constante, $\frac{dv}{dt} = 0$

Donc $av_{lim} + b = 0 \Longleftrightarrow v_{lim} = \frac{-b}{a}$ (si f = kv)

Si f = kv^2 alors de la même manière $v_{lim} = \sqrt{\frac{-b}{a}}$

2. Etablissement de l'équation différentielle

L'axe Oz est un axe qui va nous permettre de modéliser l'équation différentielle du mouvement. Le vecteur $\vec{k}$ est un vecteur unitaire.

- La force de frottement étant proportionnelle à la vitesse, on a f = k.v

Le référentiel étant galiléen, on peut appliquer la seconde loi de Newton :
$\Sigma \overrightarrow{F_{ext}} = m\vec{a}$

$\vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{f} = m\vec{a}$
$m\vec{g} - \mu V\vec{g} - k\vec{v} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$

On projette suivant l'axe Oz en prenant garde aux signes (si le vecteur est dans le sens de l'axe, la composante du vecteur est positive et inversement) :

$mg - m'g - kv = ma$
$mg - m'g - kv = m\frac{dv}{dt}$
$-kv + g(m - m') = m\frac{dv}{dt}$
$\boxed{\frac{dv}{dt} = \frac{-k}{m}v + g\frac{m - m'}{m}}$

On pose $a = \frac{-k}{m}$ et $b = g\left(\frac{m - m'}{m}\right)$ et on obtient ainsi $\boxed{\frac{dv}{dt} = av + b}$

- Pour de grandes vitesses, f = k'v^2

On aura donc l'équation différentielle suivante : $\boxed{\frac{dv}{dt} = \frac{-k'}{m}v^2 + g\frac{m - m'}{m}}$ ou encore $\boxed{\frac{dv}{dt} = a'v^2 + b'}$.

3. Résolution par la méthode d'Euler d'une équation différentielle

La méthode d'Euler est une résolution théorique d'une équation différentielle. On considère que l'intervalle de temps est fini et on nomme cet intervalle Δt le pas.
C'est une méthode itérative, c'est-à-dire qu'on a besoin de la vitesse au point 0 pour pouvoir calculer la vitesse au point 1.

On peut utiliser la méthode d'Euler pour tracer la courbe de la vitesse en fonction du temps ou l'accélération en fonction du temps.

Prenons la modélisation avec f = k.v

On a $\frac{dv}{dt} = av + b$
La dérivée de la vitesse par rapport au temps n'est autre qu'un taux de variation avec un temps se rapprochant de 0.

Donc :
$\frac{dv}{dt} = av + b \iff \frac{\Delta v}{\Delta t} = av + b$
$\iff \Delta v = (av + b) \times \Delta t$
$\iff v_{t+1} - v_t = (av + b) \times \Delta t$
$\iff v_{t+1} = (av + b) \times \Delta t + v_t$

$\boxed{v_{t+1} = (av + b) \times \Delta t + v_t}$ Avec cette relation, on peut connaitre la vitesse à un instant t+1 en connaissant la vitesse à l'instant t.