Mouvement d'un projectile dans le champ de pesanteur

I. Le champ de pesanteur uniforme

Dans une région de l'espace de quelques kilomètres de long, de large, de haut, le vecteur champ de pesanteur $\overrightarrow{g}$ est un vecteur constant (**champ de pesanteur uniforme**).
À chaque instant t, il a même sens, même direction et même norme.

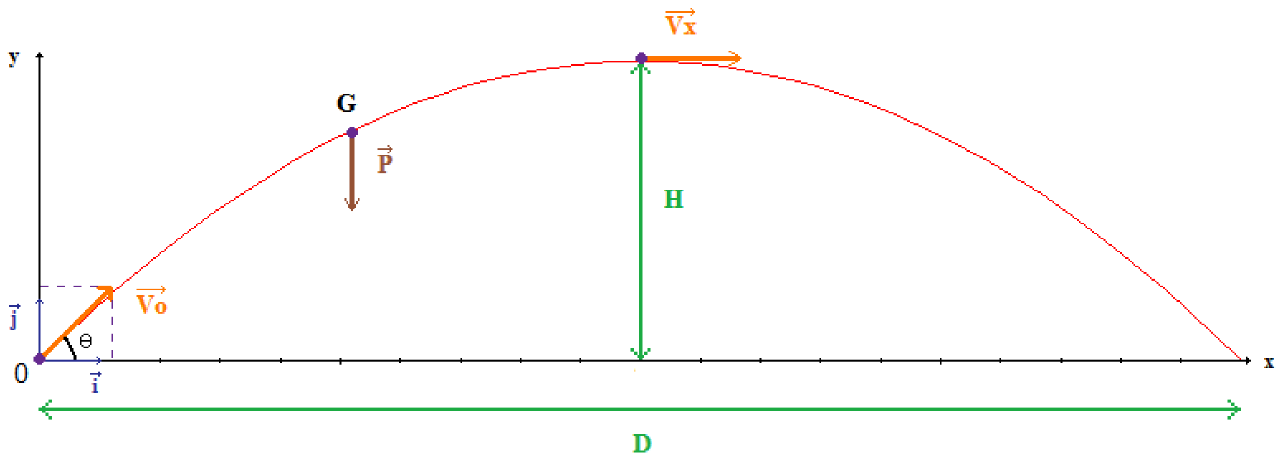
Définition :
La chute libre est le mouvement d'un objet uniquement soumis à son poids.

II. Étude préliminaire

On étudie la chute libre d'un objet de masse m lancé avec un vecteur $\vec{v_0}$ quelconque faisant un angle θ avec le plan horizontal.

- **Système** : objet de masse m.
- **Référentiel** : terrestre supposé gallileén.
- **Bilan des forces extérieures** :
  - le poids de l'objet : $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g}$
  - la poussé d'Archimède et les frottements exercés par l'air sont négligés.

III. Équation de la vitesse et équations horaires



L'objet est représenté par un point G de coordonnées (x ; y) qui est son centre d'inertie.
Conditions initiales : À t=0, la balle est au point O de coordonnées (0 ; 0).

On projette le vecteur vitesse sur les deux axes.
$\overrightarrow{v_0}\,(v_0.\cos\theta; v_0.\sin\theta)$
- On applique la **deuxième loi de Newton** :

$\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{a}$
$-\,mg\overrightarrow{j} = m\overrightarrow{a}$
$-\,g\overrightarrow{j} = \overrightarrow{a}$
Donc $\overrightarrow{a}\,(0; -g)$ (Le mouvement est uniformément acceleré sur l'axe (Oy))
- On sait que $\overrightarrow{a} = \dfrac{d\overrightarrow{v}}{dt}$

On en déduit que $\frac{d\vec{v}}{dt}\,(0;-g)$ et en intégrant, on obtient $\vec{v}\,(K_1;-gt+K_2)$
Pour déterminer les constantes d'intégrations $\mathbf{K_1}$ et $\mathbf{K_2}$, on utilise les conditions initiales.
À **t=0**, on a $\vec{v_0}\,(v_0.\cos\theta; v_0.\sin\theta)$

Ce qui nous permet de trouver K_1 et K_2 tels que $\begin{cases} K_1 = v_0.\cos\theta \\ K_2 = v_0.\sin\theta \end{cases}$

Donc $\vec{v}\,(v_0.\cos\theta; -gt+v_0.\sin\theta)$
L'équation donnant la vitesse en fonction du temps est $\boxed{v(t) = -gt + v_0.\sin\theta}$

- On sait que $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}$

Donc $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v_0.\cos\theta \\ \frac{dy}{dt} = -gt + v_0.\sin\theta \end{cases}$

En intégrant, on obtient $\begin{cases} x(t) = v_0.\cos\theta t + K_3 \\ y(t) = \frac{-1}{2}gt^2 + v_0.\sin\theta t + K_4 \end{cases}$

À **t=0**, x=0 et y=0
On en déduit que $K_3 = 0$ et $K_4 = 0$

Les équations horaires du mouvement sont $\begin{cases} x(t) = v_0.\cos\theta t \\ y(t) = \frac{-1}{2}gt^2 + v_0.\sin\theta t \end{cases}$

IV. Équation de la trajectoire

Pour obtenir une équation de la trajectoire, il faut exprimer y(t) en fonction non plus de t, mais de x.

$x = v_0.\cos\theta t \iff t = \frac{x}{v_0.\cos\theta}$

On peut maintenant exprimer y en fonction de x en remplacant t par la valeur trouvée ci-dessus.
On a donc :

$$y(x) = \frac{-1}{2}g\left(\frac{x}{v_0.\cos\theta}\right)^2 + v_0.\sin\theta\left(\frac{x}{v_0.\cos\theta}\right)$$

En simplifiant on trouve finalement : $\boxed{y(x) = \frac{-g}{2v_0^2\cos^2\theta}x^2 + \tan\theta x}$ qui est une équation du second degré (en accord avec la trajectoire parabolique).

V. Flèche et portée de la trajectoire

- La flèche de la trajectoire correspond au moment où la balle a atteint sa **hauteur maximale**. (H sur le dessin)

Quand la balle a atteint sa hauteur maximale, le vecteur vitesse a une direction horizontale. Sa composante sur l'axe des ordonnées (v_y) est donc égale à 0.

$$v_y = 0 \iff -gt_f + v_0.\sin\theta = 0 \iff t_f = \frac{v_0.\sin\theta}{g}$$

On réinsère cette valeur de t dans l'équation de la trajectoire ce qui nous donne :

$$y_f = \frac{-1}{2}g\left(\frac{v_0.\sin\theta}{g}\right)^2 + v_0\sin\theta\left(\frac{v_0.\sin\theta}{g}\right)$$

Ce qui, en simplifiant, donne : $\boxed{y_f = \frac{v_0^2\sin^2\theta}{2g}}$

- La portée de la balle est la **distance séparant le point de départ de la balle et le point d'arrivée** (D sur le dessin).

L'ordonnée au point de chute est nulle.

$$y_p = 0 \iff -\frac{1}{2}gt_p^2 + v_0.\sin\theta t_p = 0.$$

Comme t_p est non nulle alors on a : $-\frac{1}{2}gt_p + v_0.\sin\theta = 0 \iff t_p = \frac{2v_0.\sin\theta}{g}$

On insère la valeur de t_p dans l'équation $x(t)$.

$x_p = v_0 \cos\theta \times \dfrac{2v_0.\sin\theta}{g}$

Ce qui, simplifié, donne : $\boxed{x_p = \dfrac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g}}$