Les systèmes oscillants

I. Les systèmes oscillants

Un système oscillant est un système pouvant effectuer des aller-retours autour d'une position d'équilibre : c'est un système périodique.

Écartés de leur position d'équilibre par une action extérieure, ils y retournent plus ou moins rapidement en oscillant de part et d'autre de cette position d'équilibre.

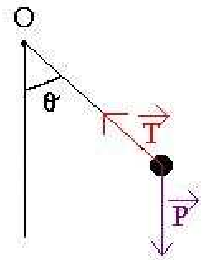
On peut citer trois types de pendules :
• **Le pendule pesant** : Système mécanique mobile autour d'un axe horizontal et qui ne passe pas par son centre d'inertie.
• **Le pendule simple :** Cas particulier du pendule pesant. Constitué d'une masse suspendu à un fil de masse négligeable, l'oscillation s'effectue autour d'une position d'équilibre.
• **Le pendule élastique :** Lorsque le solide est écarté de sa position d'équilibre puis lâché, il effectue un mouvement d'aller-retours de part et d'autre de sa position d'équilibre.

Un oscillateur est libre s'il n'y a aucun apport d'énergie après sa mise en mouvement.
Dans le cas contraire, on parle d'oscillateur forcé.

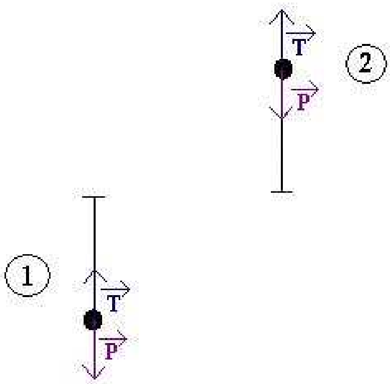
II. Étude du pendule pesant

Notion d'équilibre du pendule

Référentiel : terrestre supposé galiléen.
Système : masse suspendue au fil.
Bilan des forçes : poids ($\overrightarrow{P}$) et la tension du fil ($\overrightarrow{T}$).



Il y a deux positions d'équilibre :



1 : Si l'on écarte le pendule de sa position d'équilibre, il va osciller autour de cette position : c'est sa position d'équilibre stable. Un pendule est en équilibre stable quand son centre d'inertie est sur la verticale passant par l'axe de rotation et en-dessous de ce dernier.
2 : Le pendule se trouve en une position instable.

- période : c'est le plus petit intervalle de temps au bout duquel le phénomène se reproduit identique à lui-même. On la mesure en secondes (s).
- fréquence : nombre de périodes en une seconde. $f = \dfrac{1}{T}$ avec f en Hz (Hertz), T en s.

La période d'une oscillation est donné par la formule
$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$
T : Période d'une oscillation (en s)
l : longueur du fil (en m)
g : $9,8m.s^{-2}$

Analyse dimensionnelle :
$[T] = \sqrt{\dfrac{L}{L \times s^{-2}}} = \sqrt{\dfrac{1}{s^{-2}}} = \sqrt{s^2} = s$
La période est bien homogène à une durée.

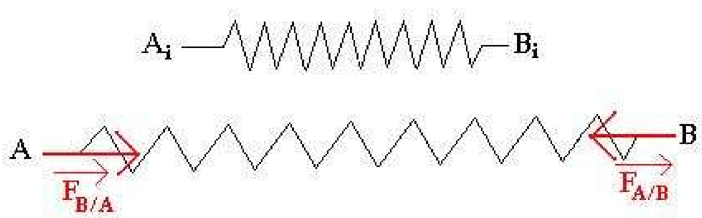
On appelle abscisse angulaire θ (t) l'angle formé par le pendule à la date t et le pendule à l'équilibre

C'est une grandeur algébrique.
L'amplitude θ_m est la valeur absolue de l'abscisse angulaire maximale. C'est une grandeur positive.

Remarque : *Influence de l'amortissement :*
Lorsque les frottements ne sont pas négligeables, les forces de frottements s'exerçant sur le pendule provoquent une diminution de l'abscisse angulaire : **le mouvement est amorti.**
Lorsque l'amortissement est conséquent, le régime n'est plus pseudo-périodique mais apériodique : le système revient dans sa position d'équilibre sans oscillations.

Le système solide-ressort

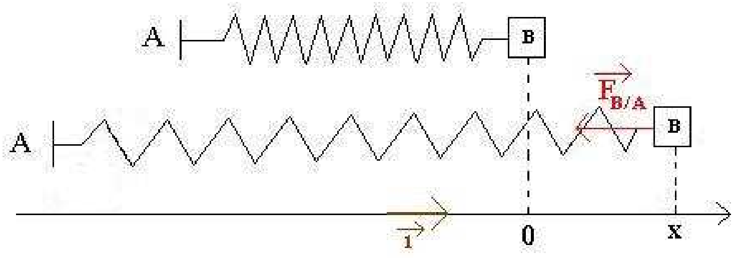
[/u] I. Force de rappel exercé par un ressort



On sait que la force de rappel exercé par un ressort est proportionnelle à sont allongement.
Prenons la force exercée par le point A sur le point B.
$\overrightarrow{F}_{A/B} = -k(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{A_iB_i})$ On place un signe - devant le k car l'allongement $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{A_iB_i}$ est de sens opposé à $\overrightarrow{F}_{A/B}$
$\overrightarrow{F}_{\mathrm{A/B}} = -\mathrm{k}(\overrightarrow{AB}_{\mathrm{i}} + \overrightarrow{B_iB} - \overrightarrow{A_iA} + \overrightarrow{AB}_i)$

$= -\text{k}(\overrightarrow{B_iB} - \overrightarrow{A_iA})$

Si $A = A_i$ alors $\overrightarrow{F}_{A/B} = -\text{k}\overrightarrow{B_iB}$



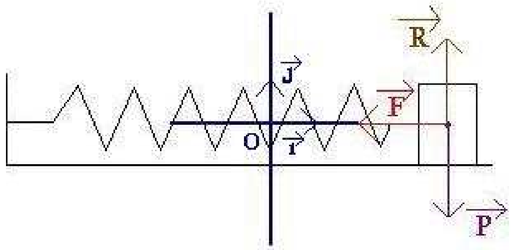
Le vecteur $\overrightarrow{i}$ est un vecteur unitaire.
x représente l'allongement du ressort.

On a donc $\overrightarrow{F}_{A/B} = -kx\overrightarrow{i}$
La constante k est appelé <u>la raideur du ressort</u>

II. Étude d'un mouvement horizontal avec force de frottement négligée.

- Référentiel : terrestre supposé galiléen.

Système : masse.
Force : poids ($\overrightarrow{P}$), force du ressort ($\overrightarrow{F}$).
Schéma :



Appliquons la deuxième loi de Newton :
$\overrightarrow{P} + \overrightarrow{R} + \overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a}$
On projette les vecteurs sur les axes du repère.
$\overrightarrow{P}\,(0; -mg)$
$\overrightarrow{R}\,(0; R)$
$\overrightarrow{F}\,(-kx; 0)$
Seul les abscisses nous intéressent car le mouvement est horizontal.
Ce qui donne $0 + 0 - kx = m\dfrac{d^2x}{dt}$

On obtient finalement : $\boxed{\dfrac{d^2x}{dt} + \dfrac{k}{m}x = 0}$

La solution de cette équation différentielle et est de la forme $\boxed{x(t) = X_{max}cos(W_0t + \mathscr{C})}$
X_{max} : amplitude (en m)
W_0 : pulsation propre (rad.s^{-1})
$scrC$: phase a l'origine (en rad)

$W_0 = \dfrac{2\pi}{T_0}$ avec T_0 : période propre (s).

- Le solide est lâché sans vitesse initiale à t=0 en un point a.

La dérivé de la position de la masse par rapport au temps étant la vitesse de cette masse, on dérive x(t).

$$\frac{dx}{dt} = -X_{max}W_0 sin(\mathscr{C} + W_0 t)$$
A t=0, la vitesse est nulle donc

$0 = -X_{max}W_0 sin(\mathscr{C})$
L'amplitude et la pulsation propre étant non nuls, on peut dire que :

$sin(\mathscr{C}) = 0$

A t=0, on a aussi $a = X_{max}cos(\mathscr{C})$

D'où $\boxed{x(t) = acos(W_0 t)}$

- On cherche l'expression de la période propre

$$\frac{d^2x}{dt} = -X_{max}W_0^2 cos(W_0 t + \mathscr{C})$$
On la remplace dans l'équation différentielle :

$$-X_{max}W_0^2 cos(W_0 t + \mathscr{C}) + \frac{k}{m}(X_{max}cos(W_0 t + \mathscr{C})) = 0$$

Comme $cos(W_0 t + \mathscr{C}) \neq 0$

$$-X_{max}W_0^2 + \frac{k}{m}X_{max} = 0$$

Comme $X_{max} \neq 0$

$$-W_0^2 + \frac{k}{m} = 0$$
$$W_0^2 = \frac{k}{m}$$
$$W_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$
Or $W_0 = \dfrac{2\pi}{T_0}$

Ce qui donne finalement : $\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$

III. La résonance

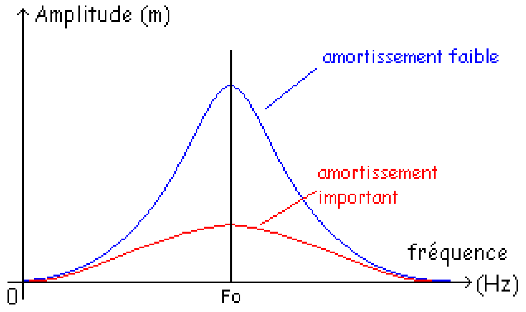
Définition

Soit un oscillateur subissant des oscillations forcées à la période de l'excitateur. Quand la période de l'excitateur devient proche de la période propre de l'oscillateur, celui-ci entre en résonance : l'amplitude de ses oscillations devient maximale.

Remarque : Une augmentation de l'amortissement provoque une diminution de l'amplitude

Influence de l'amortissement

Graphique :



Les amplitudes sont toujours maximales à la résonance.

Quelques exemples de résonance mécanique

- les amortisseurs des automobiles permettent d'éviter le phénomène de résonance
- les immeubles vibrent sous l'action du vent ou des ondes sismiques
- les instruments de musique constitués d'une caisse de résonance