Présentation d'un torseur :

Comme nous l'avons vu au cours des chapitres précédents, afin que l'équilibre statique d'un systèmes de solides soir respecté, il faut que la somme de toutes les forces extérieures soit nulle, mais également que la somme des moments en un point des actions mécaniques extérieures soit nulle.

Un vecteur seul représentant une force (glisseur) n'est pas suffisamment explicite pour résoudre analytiquement un problème de statique, il faut lui adjoindre un moment, exprimé en un point quelconque.

L'outil mathématique permettant de regrouper ces deux vecteur s'appelle un torseur.

Il est composé :

- d'une résultante $\vec{R}$, invariable, associé à la force
- d'un moment $\overrightarrow{M_A}$, dépendant du point choisi.

Notation d'un torseur :
Le torseur représentant l'action mécanique qu'exerce le solide 1 sur le solide 2 s'écrit :

$$\{T_{2\rightarrow 1}\} = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{F_{2\rightarrow 1}} \\ \overrightarrow{M_{A,2\rightarrow 1}} \end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix} X_{2\rightarrow 1} & L_{2\rightarrow 1} \\ Y_{2\rightarrow 1} & M_{2\rightarrow 1} \\ Z_{2\rightarrow 1} & N_{2\rightarrow 1} \end{Bmatrix}_{(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

$\{T_{2\rightarrow 1}\}$	notation générale du torseur associé à l'action mécanique qu'exerce le solide 1 sur le solide 2
${}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{F_{2\rightarrow 1}} \\ \overrightarrow{M_{A,2\rightarrow 1}} \end{Bmatrix}$	Exprimés au point A, **les éléments de réduction** du torseur $\{T_{2\rightarrow 1}\}$ sont $\overrightarrow{F_{2\rightarrow 1}}$ et $\overrightarrow{M_{A,2\rightarrow 1}}$
${}_A\begin{Bmatrix} X_{2\rightarrow 1} & L_{2\rightarrow 1} \\ Y_{2\rightarrow 1} & M_{2\rightarrow 1} \\ Z_{2\rightarrow 1} & N_{2\rightarrow 1} \end{Bmatrix}_{(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$	En projection dans le repère $(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$, **les composantes des éléments de réduction** du torseur $\{T_{2\rightarrow 1}\}$ sont respectivement $X_{2\rightarrow 1}, Y_{2\rightarrow 1}, Z_{2\rightarrow 1}$ pour $\overrightarrow{F_{2\rightarrow 1}}$ et $L_{2\rightarrow 1}, M_{2\rightarrow 1}, N_{2\rightarrow 1}$ pour $\overrightarrow{M_{A,2\rightarrow 1}}$

Outils nécessaires à l'utilisation des torseurs :

Deux outils mathématiques sont nécessaires travailler sur les torseurs : le produit scalaire et le produit vectoriel.

1. **Produit scalaire de deux vecteurs (rappels)**

Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, de normes respectives $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$, et de coordonnées respectives (x_u, y_u, z_u) et (x_v, y_v, z_v) dans le repère $(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$
On définit le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})=x_u\cdot x_v+y_u\cdot y_v+z_u\cdot z_v$
Le produit scalaire est nul si :

- un des deux vecteur est nul
- les deux vecteurs sont orthogonaux

NOM: .... ***Prénom: ....*** ***Classe / Groupe: ....*** ***Date: ....***	***Notation / Observations:***

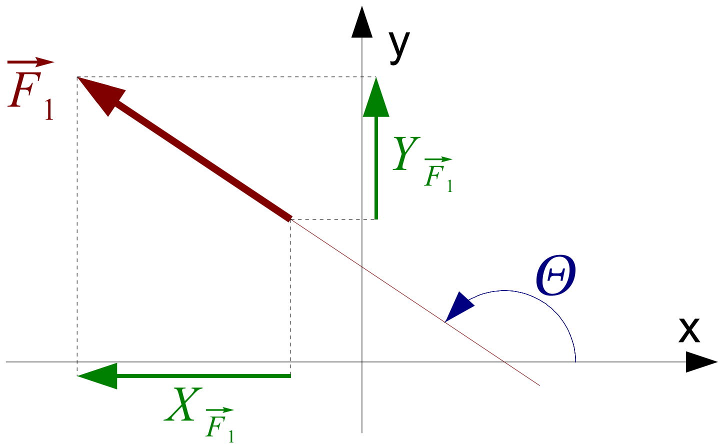
Application à la projection de vecteurs dans un repère :

Soit le vecteur $\vec{F_1}$ défini dans le repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ par ses coordonnées polaires :

$\|\vec{F_1}\|$ et $(\widehat{\vec{F_1}, \vec{x}}) = \Theta$

Dans le repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, les composantes de $\vec{F_1}$ s'écrivent :

$$\vec{F_1} = \begin{vmatrix} X_{\vec{F_1}} = \|\vec{F_1}\| \cdot \cos(\Theta) \\ Y_{\vec{F_1}} = \|\vec{F_1}\| \cdot \sin(\Theta) \\ 0 \end{vmatrix}$$



Il découle de cette relation :

$$\tan(\Theta) = \frac{Y_{\vec{F_1}}}{X_{\vec{F_1}}}$$

$$\|\vec{F_1}\| = \sqrt{X^2_{\vec{F_1}} + Y^2_{\vec{F_1}}}$$

2. Produit vectoriel de deux vecteurs

Soient deux vecteurs $\vec{AB} = (x_{AB}, y_{AB}, z_{AB})$ et $\vec{F} = (X_F, Y_F, Z_F)$

On définit le produit vectoriel $\vec{M} = \vec{AB} \wedge \vec{F}$ tel que :

- $\vec{M}$ est orthogonal à $\vec{AB}$ et à $\vec{F}$
- Le sens de $\vec{M}$ est tel que le trièdre $(\vec{AB}, \vec{F}, \vec{M})$ est un trièdre direct.
- $\|\vec{M}\| = \|\vec{AB}\| \cdot \|\vec{F}\| \cdot \sin(\widehat{\vec{AB}, \vec{F}})$
- $$\vec{M} = \begin{vmatrix} x_{AB} \\ y_{AB} \\ z_{AB} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} X_F \\ Y_F \\ Z_F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_{AB} \cdot Z_F - z_{AB} \cdot Y_F \\ z_{AB} \cdot X_F - z_{AB} \cdot Z_F \\ x_{AB} \cdot Y_F - y_{AB} \cdot X_F \end{vmatrix}$$
- Solution mnémotechnique :

$$\vec{M} = \begin{vmatrix} \cancel{x_{AB}} & \cancel{X_F} \\ \cancel{y_{AB}} \quad \wedge & \cancel{Y_F} \\ \cancel{z_{AB}} & \cancel{Z_F} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_{AB} \cdot Z_F - z_{AB} \cdot Y_F \\ z_{AB} \cdot X_F - z_{AB} \cdot Z_F \\ x_{AB} \cdot Y_F - y_{AB} \cdot X_F \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} x_{AB} & X_F \\ y_{AB} & Z_F \end{matrix}$$

Propriétés :

- Un produit vectoriel est nul si :
  * Un des deux vecteurs est nul
  * Les deux vecteurs sont colinéaires
- Soit la force $\vec{F}$, et le point B situé sur la droite d'action de $\vec{F}$. Soit un point A quelconque.
  $\vec{M_{A,\vec{F}}} = \vec{AB} \wedge \vec{F}$
  Si A est sur la droite d'action de $\vec{F}$, alors $\vec{AB}$ et $\vec{F}$ sont colinéaires, donc le moment est nul, propriété déjà vue au chapitre II).
- Soit la force $\vec{F}$, $\vec{M_{A,\vec{F}}}$, moment en A de $\vec{F}$ supposé connu et le point C quelconque.
  $\vec{M_{C,\vec{F}}} = \vec{M_{A,\vec{F}}} + \vec{CA} \wedge \vec{F}$

Torseurs particuliers :

Torseur associé à un glisseur :

Soit une force , $\vec{F}=(X_F, Y_F, Z_F)$ et le point A situé sur la droite d'action de $\vec{F}$

Le torseur associé à la force $\vec{F}$ s'écrit : $\{T_{\vec{F}}\}=_A\left\{\begin{matrix}\vec{F}\\ \overrightarrow{M_{A,\vec{F}}}=\vec{0}\end{matrix}\right\}=_A\left\{\begin{matrix}X_F & 0\\ Y_F & 0\\ Z_F & 0\end{matrix}\right\}_{(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

En effet, le moment d'une force en tout point de sa droite d'action est nul.

Torseur associé à un couple :

Soit un moment $\vec{M}=(L_M, M_M, N_M)$ agissant sur un solide.

Le torseur associé au moment $\vec{M}$ s'écrit : $\{T_{\vec{M}}\}=\left\{\begin{matrix}\vec{0}\\ \vec{M}\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix}0 & L_M\\ 0 & M_M\\ 0 & N_M\end{matrix}\right\}_{(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

Ce torseur est invariant, il est indépendant du point choisi pour exprimer les éléments de réduction.

Torseur nul :

Un torseur nul a sa résultante et son moment nuls en tout point :

$$\{0\}=_A\left\{\begin{matrix}\vec{0}\\ \vec{0}\end{matrix}\right\}=_A\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right\}_{(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Opérations sur les torseurs :

Addition de torseurs :

L'addition de deux torseurs ne peut se faire que si les éléments de réduction sont écrits au même point, et si les composantes des éléments de réduction sont écrits en un même point et dans un même repère. Si les moments ne sont pas écrits en un même point, il faut obligatoirement les ramener en un même point à l'aide de la formule : $\overrightarrow{M_{C,\vec{F}}}=\overrightarrow{M_{A,\vec{F}}}+\vec{CA}\wedge\vec{F}$

Soient $\{T_{2\to1}\}=_A\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{F_{2\to1}}\\ \overrightarrow{M_{A,2\to1}}\end{matrix}\right\}=_A\left\{\begin{matrix}X_{2\to1} & L_{2\to1}\\ Y_{2\to1} & M_{2\to1}\\ Z_{2\to1} & N_{2\to1}\end{matrix}\right\}_{(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$ et $\{T_{3\to1}\}=_A\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{F_{3\to1}}\\ \overrightarrow{M_{A,3\to1}}\end{matrix}\right\}=_A\left\{\begin{matrix}X_{3\to1} & L_{3\to1}\\ Y_{3\to1} & M_{3\to1}\\ Z_{3\to1} & N_{3\to1}\end{matrix}\right\}_{(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

$$\{T_{\bar{1}\to1}\}=\{T_{2\to1}\}+\{T_{2\to1}\}=_A\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{F_{2\to1}}+\overrightarrow{F_{3\to1}}\\ \overrightarrow{M_{A,2\to1}}+\overrightarrow{M_{A,3\to1}}\end{matrix}\right\}=_A\left\{\begin{matrix}X_{2\to1}+X_{3\to1} & L_{2\to1}+L_{3\to1}\\ Y_{2\to1}+Y_{3\to1} & M_{2\to1}+M_{3\to1}\\ Z_{2\to1}+Z_{3\to1} & N_{2\to1}+N_{3\to1}\end{matrix}\right\}_{(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Multiplication par un scalaire :

Soient le torseur $\{T_{2\to1}\} = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{F_{2\to1}} \\ \overrightarrow{M_{A,2\to1}} \end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix} X_{2\to1} & L_{2\to1} \\ Y_{2\to1} & M_{2\to1} \\ Z_{2\to1} & N_{2\to1} \end{Bmatrix}_{(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$ et le scalaire a :

$$a\cdot\{T_{2\to1}\} = {}_A\begin{Bmatrix} a\cdot\overrightarrow{F_{2\to1}} \\ a\cdot\overrightarrow{M_{A,2\to1}} \end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix} a\cdot X_{2\to1} & a\cdot L_{2\to1} \\ a\cdot Y_{2\to1} & a\cdot M_{2\to1} \\ a\cdot Z_{2\to1} & a\cdot N_{2\to1} \end{Bmatrix}_{(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Égalité de torseurs :

Deux torseurs sont égaux si leurs éléments de réduction écrits en un même point sont égaux :

Soient $\{T_{2\to1}\} = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{F_{2\to1}} \\ \overrightarrow{M_{A,2\to1}} \end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix} X_{2\to1} & L_{2\to1} \\ Y_{2\to1} & M_{2\to1} \\ Z_{2\to1} & N_{2\to1} \end{Bmatrix}_{(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$ et $\{T_{3\to1}\} = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{F_{3\to1}} \\ \overrightarrow{M_{A,3\to1}} \end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix} X_{3\to1} & L_{3\to1} \\ Y_{3\to1} & M_{3\to1} \\ Z_{3\to1} & N_{3\to1} \end{Bmatrix}_{(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

$$\{T_{2\to1}\} = \{T_{3\to1}\} \Leftrightarrow {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{F_{2\to1}} \\ \overrightarrow{M_{A,2\to1}} \end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{F_{3\to1}} \\ \overrightarrow{M_{A,3\to1}} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow {}_A\begin{Bmatrix} X_{2\to1} & L_{2\to1} \\ Y_{2\to1} & M_{2\to1} \\ Z_{2\to1} & N_{2\to1} \end{Bmatrix}_{(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = {}_A\begin{Bmatrix} X_{3\to1} & L_{3\to1} \\ Y_{3\to1} & M_{3\to1} \\ Z_{3\to1} & N_{3\to1} \end{Bmatrix}_{(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Torseurs transmissibles par les liaisons :

Lorsque deux solides sont en contact entre eux, ils s'exercent mutuellement des actions mécaniques.
Dans le cas général, l'action mécanique qu'exerce le solide 2 sur le solide 1 est modélisable par le torseur $\{T_{2\to1}\} = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{F_{2\to1}} \\ \overrightarrow{M_{A,2\to1}} \end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix} X_{2\to1} & L_{2\to1} \\ Y_{2\to1} & M_{2\to1} \\ Z_{2\to1} & N_{2\to1} \end{Bmatrix}_{(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$.

Prenons le cas d'une liaisons pivot glissant d'axe $(A,\vec{z})$: les mouvements possibles entre les solides 1 et 2 sont une translation d'axe $\vec{z}$ et une rotation d'axe $(A,\vec{z})$. Ces mouvements-là étant possibles :

- la pièce 2 ne peut exercer de forces sur la pièce 1 dans la direction de $\vec{z}$. En effet, la translation étant possible, elle glisse le long de la pièce 1 dans la direction de $\vec{z}$. La composante $Z_{2\to1}$ est nulle.

- La pièce 2 ne peut exercer de moment sur la pièce 1 autour de l'axe $(A,\vec{z})$. En effet, la rotation étant possible, elle tourne librement autour de la pièce 1 suivant l'axe $(A,\vec{z})$. La composante $N_{2\to1}$ est nulle.

Le torseur devient : $\{T_{2\to1}\} = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{F_{2\to1}} \\ \overrightarrow{M_{A,2\to1}} \end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix} X_{2\to1} & L_{2\to1} \\ Y_{2\to1} & M_{2\to1} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$. C'est le torseur des actions mécaniques transmissible par une liaison pivot glissant d'axe $(A,\vec{z})$.

On constate qu'il y a corrélation entre les mobilités d'une liaison et le torseur des actions transmissible : Quand une translation est possible, la force ne peut être transmise, et quand une rotation est possible, le moment ne peut être transmis.

Le tableau en page suivante récapitule la forme des torseurs d'actions mécaniques transmissible par les liaisons élémentaires.