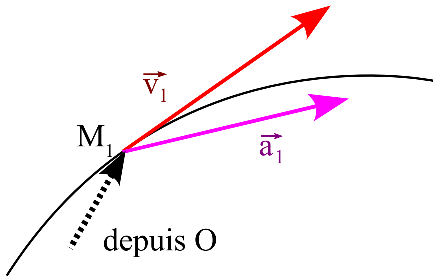
ÉLÉMENTS DE CINÉMATIQUE DU POINT

Date, position, vitesse, accélération

Dans un référentiel, on choisit une origine des positions O et une origine des dates (t = 0).
Un point mobile M décrit une trajectoire (ensemble des positions successives occupées par le point) ; à chaque position de M est associée une date t (par une ou plusieurs équations horaires).

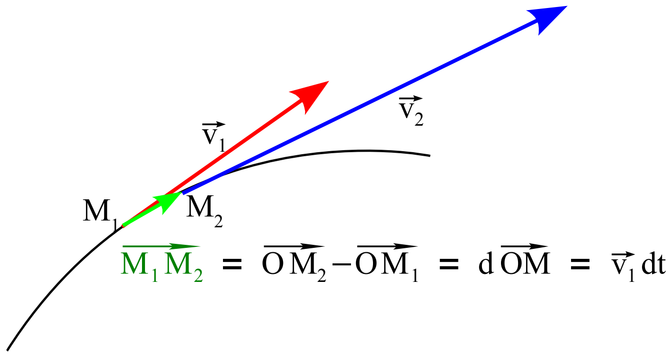
Le point mobile M peut être considéré comme l'extrémité d'un vecteur $\overrightarrow{OM}(t)$.

Pour chaque date, on définit la vitesse $\vec{v}$ et l'accélération $\vec{a}$ du point mobile M.



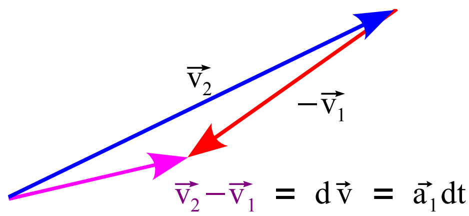
Sa vitesse est $\vec{v} = \lim\limits_{t_2 \to t_1} \dfrac{\overrightarrow{M_1M_2}}{t_2 - t_1} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$.

La vitesse renseigne sur la position ultérieure du point mobile M.



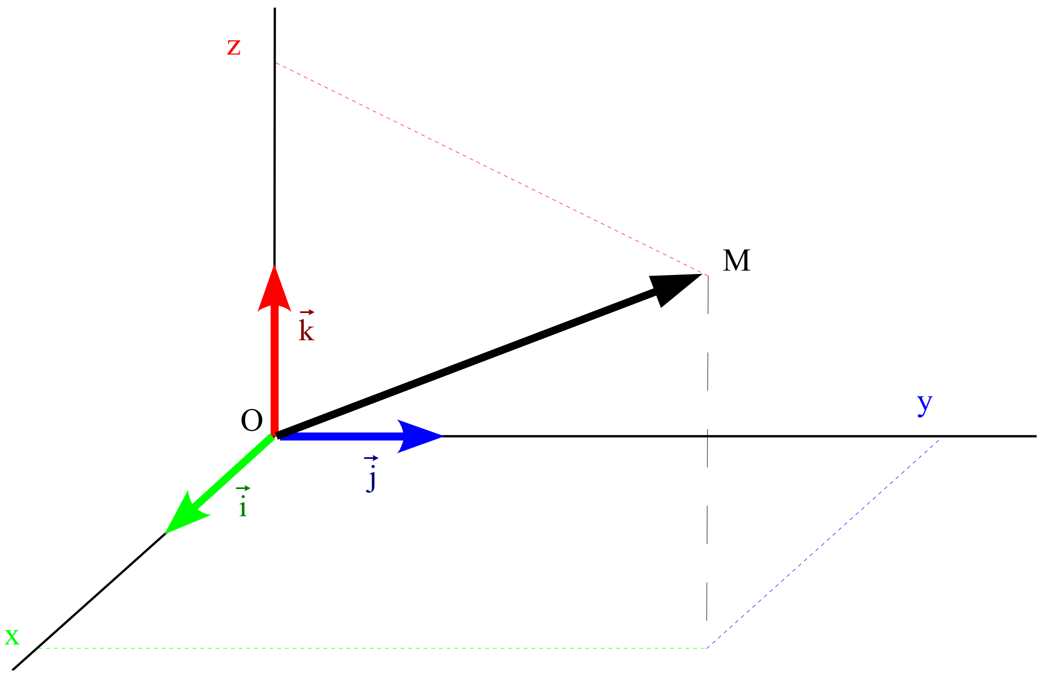
Son accélération est $\vec{a} = \lim\limits_{t_2 \to t_1} \dfrac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$.

L'accélération renseigne sur la vitesse ultérieure du point mobile M.



Repère fixe orthonormé

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.



Position d'un point mobile

Le point mobile peut être considéré comme l'extrémité du vecteur : $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$
dont les cordonnées x(t), y(t), et z(t) sont des fonctions de la date t (et peuvent être positives ou négatives)

Vitesse d'un point mobile

La vitesse (instantanée) $\vec{v} = v_x\,\vec{i} + v_y\,\vec{j} + v_z\,\vec{k}$ du point M s'écrit :

$$\vec{v} = \frac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \text{ , ou bien } \vec{v} = \dot{x}\,\vec{i} + \dot{y}\,\vec{j} + \dot{z}\,\vec{k} \ .$$

Accélération

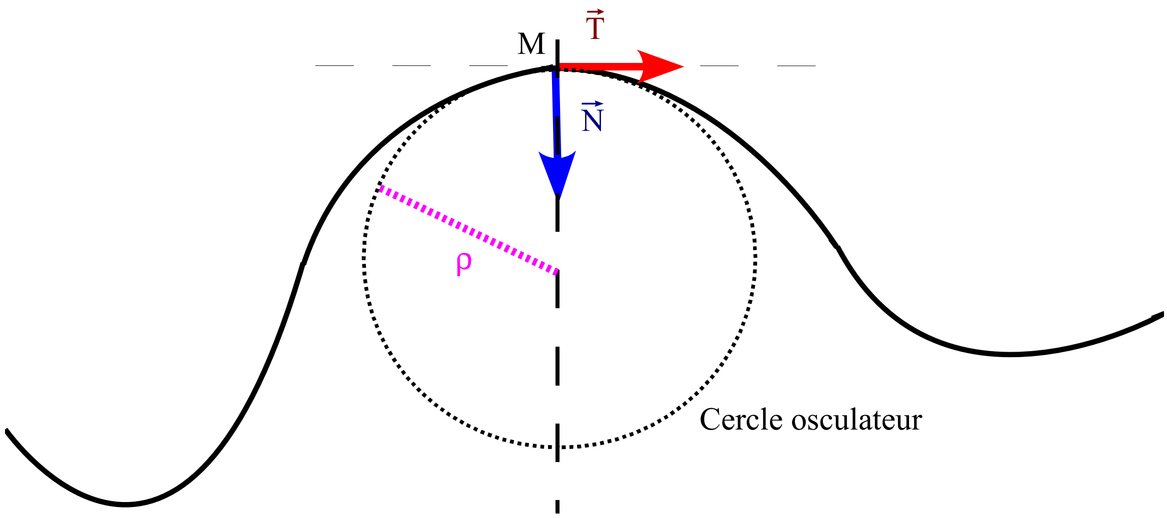
L'accélération (instantanée) $\vec{a} = a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j} + a_z\,\vec{k}$ du point M s'écrit :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} \text{ , ou bien } \vec{a} = \ddot{x}\,\vec{i} + \ddot{y}\,\vec{j} + \ddot{z}\,\vec{k} \ .$$

Repère de Frenet

Plan et cercle osculateur.

En un point de la trajectoire du point M, on peut définir le plan et le cercle osculateur (localement, une portion de courbe ressemble toujours plus ou moins à un cercle).
Le rayon de courbure ρ de la trajectoire est le rayon du cercle osculateur.



Repère de Frenet (dans le plan osculateur).

C'est un repère mobile orthonormé $M, \vec{T}, \vec{N}$ ($\vec{T}$ comme tangentiel et $\vec{N}$ comme normal).
La vitesse du point mobile s'écrit simplement $\vec{v} = \frac{ds}{dt}\vec{T}$ (le vecteur-vitesse $\vec{v}$ est tangent à la trajectoire).
L'accélération $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = a_T\,\vec{T} + a_N\,\vec{N}$ du mobile s'écrit $\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + \frac{v^2}{\rho}\vec{N}$ (voir fin du texte)

La composante tangentielle $a_T = \frac{dv}{dt}$ du vecteur accélération renseigne sur les variations de la valeur de la vitesse

La composante normale $a_N = \frac{v^2}{\rho}$ du vecteur accélération renseigne sur les changements de direction ; elle est liée à la courbure de la trajectoire ; quand elle est nulle, la trajectoire est une droite.

Cas particuliers.

Remarque : il est important de bien de différencier le vecteur de sa valeur et de ses coordonnées ; par exemple, le vecteur vitesse $\vec{v}$, sa valeur $v = \sqrt{v_x^2+v_y^2+v_y^2}$ dans un repère orthonormé, toujours positive, et sa composante v_x, qui peut être positive ou négative.

Mouvements uniformes et accélérés.

Mouvement uniforme : la vitesse v est constante ; dans le repère de Frenet, la composante tangentielle de l'accélération est nulle $a_T = \frac{dv}{dt} = 0$.

Mouvements accélérés : dans le repère de Frenet, si la composante tangentielle de l'accélération a_T est positive, le mobile accélère, si elle est négative, le mobile ralentit.

Mouvements uniformément accélérés : dans le repère de Frenet, la composante tangentielle de l'accélération $a_T = \frac{dv}{dt}$ est constante.

Trajectoires.

Trajectoires rectilignes :
On peut trouver un repère orthonormé pour lequel deux des trois composantes x,y,z sont nulles (ou constantes)
Le vecteur vitesse garde la même direction : la composante normale a_N de l'accélération est nulle (le rayon de courbure est infini)

Trajectoires planes :
On peut trouver un repère orthonormé pour lequel une des trois composantes x,y,z est nulle ou constante.

Trajectoires circulaires :
Le rayon de courbure ρ est constant ; si le mobile est rapide, alors a_N est importante.

Mouvement uniforme, trajectoire rectiligne

Le vecteur vitesse reste constant.

Le vecteur accélération est nul : $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 0$ (à relier au principe d'inertie de Newton).

Mouvement uniforme, trajectoire circulaire

La vitesse est constante $v = \frac{ds}{dt} = 0$.

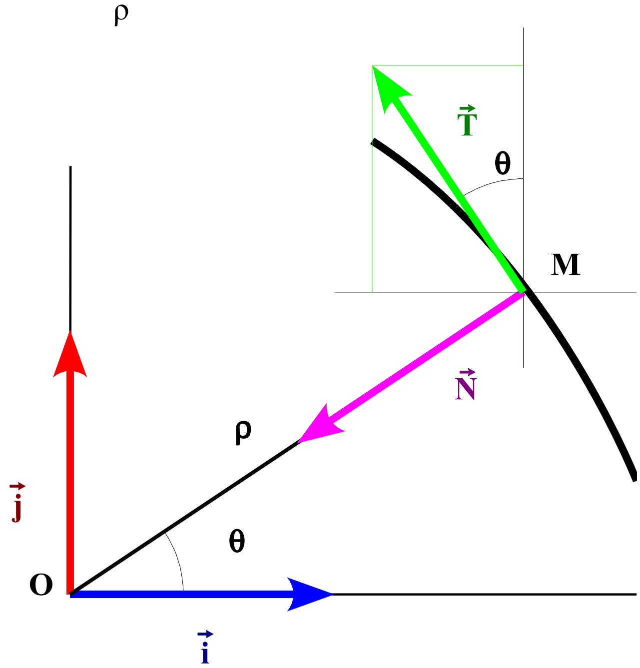
Dans le repère de Frenet :

La composante tangentielle de l'accélération est nulle $a_T = \frac{dv}{dt} = 0$.

La composante normale de l'accélération $a_N = \frac{v^2}{\rho}$ est constante (v et ρ sont constants)

Complément :

Pour démonter que $\vec{a} = \frac{dv}{dt}\,\vec{T} + \frac{v^2}{\rho}\,\vec{N}$ ....



Dans le repère (mobile) de Frenet, le vecteur vitesse s'écrit très simplement $\vec{v} = v\,\vec{T}$

le vecteur accélération est la dérivée du vecteur vitesse :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\,\vec{T} + v\,\frac{d\vec{T}}{dt}$$

On peut exprimer $\vec{T}$ en fonction des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ fixes dans le référentiel d'étude :

$$\vec{T} = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}$$

et calculer la dérivée du vecteur (variable dans le temps puisqu'il change de direction) $\vec{T}$:

$$\frac{d\vec{T}}{dt} = -\cos\theta\,\frac{d\theta}{dt}\,\vec{i} - \sin\theta\,\frac{d\theta}{dt}\,\vec{j} = \frac{d\theta}{dt}\,\vec{N}$$

en remarquant que $v = \rho\,\frac{d\theta}{dt}$, soit $\frac{v}{\rho} = \frac{d\theta}{dt}$, on obtient, en remplaçant dans l'expression initiale :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\,\vec{T} + \frac{v^2}{\rho}\,\vec{N}$$

remarque : il faut bien comprendre que $\frac{d\,\vec{i}}{dt} = \frac{d\,\vec{j}}{dt} = \vec{0}$ car ces vecteurs sont <u>fixes</u> dans le référentiel d'étude alors que $\frac{d\vec{T}}{dt} \neq \vec{0}$ car ce vecteur est <u>mobile</u> dans le référentiel d'étude.