Théorème du moment cinétique

I. Moment d'une force

1. Moment d'une force par rapport à un point

On appelle moment d'une force $\vec{F}$ s'appliquant en M par rapport à un point A le vecteur :

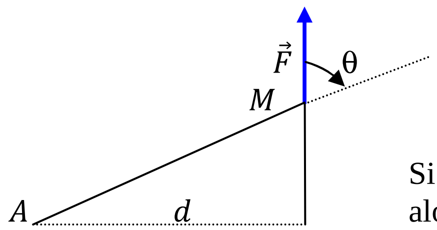
$$\vec{M}_A(\vec{F}) = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{F}$$

ce vecteur est perpendiculaire au plan formé par $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{F}$

son sens se détermine à l'aide de la "règle du tire-bouchon" (issue du produit vectoriel)

$$\left\|\vec{M}_A(\vec{F})\right\| = AM.F.|\sin(\theta)| = F.d \quad \text{(en N.m)}$$

d : bras de levier (distance de A à la droite d'action de la force).



Si la direction de la force passe par A alors son moment par rapport à A est nul

Relation entre les moments par rapport à deux points (et B) (formule du torseur) :

$$\vec{M}_B(\vec{F}) = \vec{M}_A(\vec{F}) + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{F}$$

2. Moment d'une force par rapport à un axe orienté

Soit Δ un axe passant par A de vecteur directeur $\vec{e}_\Delta$, le moment de la force par rapport à l'axe correspond à la projection du moment sur l'axe :

$$M_\Delta = \vec{M}_A(\vec{F}).\vec{e}_\Delta = (\overrightarrow{AM} \wedge \vec{F}).\vec{e}_\Delta$$

Ce moment est indépendant du choix de A sur l'axe. Soit B un point appartenant à Δ

$$M_\Delta = (\overrightarrow{AM} \wedge \vec{F}).\vec{e}_\Delta = \left((\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}) \wedge \vec{F}\right).\vec{e}_\Delta = (\overrightarrow{AB} \wedge \vec{F}).\vec{e}_\Delta + (\overrightarrow{BM} \wedge \vec{F}).\vec{e}_\Delta$$
$$= (\overrightarrow{BM} \wedge \vec{F}).\vec{e}_\Delta$$

Si $\vec{F} // \vec{e}_\Delta$ alors $M_\Delta = 0$, il en est de même si la direction de la force passe par Δ.
La composante de la force parallèle à l'axe Δ n'intervient pas dans le moment de cette force par rapport à l'axe.

II. Deuxième grandeur cinétique le moment cinétique

1. Le moment cinétique par rapport à un point

On appelle moment cinétique $\vec{L}_{A/\mathfrak{R}}(M)$ ou $\vec{\sigma}_{A/\mathfrak{R}}(M)$ d'un point matériel M par rapport au point A dans un référentiel $\mathfrak{R}$, le moment par rapport à ce point de sa quantité de mouvement.

$$\vec{L}_{A/\mathfrak{R}}(M) = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{p}_{M/\mathfrak{R}} = \overrightarrow{AM} \wedge m.\vec{v}_{M/\mathfrak{R}}$$

Le moment cinétique dépend du référentiel et du point A.
L'unité du moment cinétique est kg.m².s^{-1}. Le moment cinétique est une grandeur additive.
Relation entre les moments cinétiques par rapport à deux points (et B) :

$$\vec{L}_{B/\mathfrak{R}}(M) = \overrightarrow{BM} \wedge \vec{p}_{M/\mathfrak{R}} = \overrightarrow{BA} \wedge m.\vec{v}_{M/\mathfrak{R}} + \overrightarrow{AM} \wedge m.\vec{v}_{M/\mathfrak{R}} = \overrightarrow{BA} \wedge m.\vec{v}_{M/\mathfrak{R}} + \vec{L}_{A/\mathfrak{R}}(M)$$

2. Le moment cinétique par rapport à un axe orienté

Le moment cinétique $L_{\Delta/\mathfrak{R}}(M)$ par rapport à un axe orienté Δ passant par A de vecteur unitaire $\vec{e}_\Delta$ est la projection de $\vec{L}_{A/\mathfrak{R}}(M)$ sur Δ

$$L_{\Delta/\mathfrak{R}} = \vec{L}_{A/\mathfrak{R}}(M).\vec{e}_\Delta = \left(\overrightarrow{AM} \wedge m.\vec{v}_{M/\mathfrak{R}}\right).\vec{e}_\Delta$$

Ce moment est indépendant du choix de A situé sur l'axe Δ.

III. Théorème du moment cinétique

1. Théorème du moment cinétique par rapport à un point fixe A de $\mathfrak{R}_g$

Dérivons l'expression du moment cinétique par rapport au temps (A étant un point **fixe** de $\mathfrak{R}_g$)

$$\left(\frac{d\vec{L}_{A/\mathfrak{R}_g}(M)}{dt}\right)_{\mathfrak{R}_g} = \left(\frac{d\overrightarrow{AM}}{dt}\right)_{\mathfrak{R}_g} \wedge m.\vec{v}_{M/\mathfrak{R}_g} + \overrightarrow{AM}\wedge\left(\frac{d\vec{p}_{M/\mathfrak{R}_g}}{dt}\right)_{\mathfrak{R}_g}$$

$$\left(\frac{d\vec{L}_{A/\mathfrak{R}_g}(M)}{dt}\right)_{\mathfrak{R}_g} = \vec{v}_{M/\mathfrak{R}_g}\wedge m.\vec{v}_{M/\mathfrak{R}_g} + \overrightarrow{AM}\wedge\vec{F} = \overrightarrow{AM}\wedge\vec{F}$$

Avec $\vec{F}$ la résultante des forces qui s'exercent sur M

$$\left(\frac{d\vec{L}_{A/\mathfrak{R}_g}(M)}{dt}\right)_{\mathfrak{R}_g} = \overrightarrow{AM}\wedge\vec{F} = \vec{M}_A(\vec{F})$$

La dérivée par rapport au temps du moment cinétique d'un point matériel M par rapport à un point A **fixe** / $\mathfrak{R}_g$ est égale au moment par rapport à A de la résultante des forces appliquées au point M.

Si le point A n'est pas un point fixe de $\mathfrak{R}_g$, le théorème s'écrit :

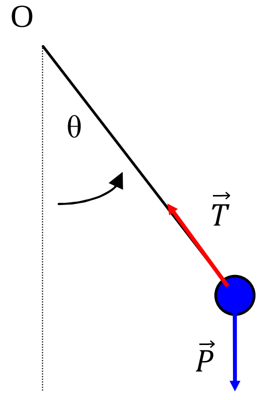
$$\left(\frac{d\vec{L}_{A/\mathfrak{R}_g}(M)}{dt}\right)_{\mathfrak{R}_g} = -\vec{v}_A\wedge m.\vec{v}_{M/\mathfrak{R}_g} + \vec{M}_A(\vec{F})$$

2. Théorème du moment cinétique par rapport à un axe fixe de $\mathfrak{R}$

Multiplions scalairement chaque membre de l'égalité $\left(\frac{d\vec{L}_{A/\mathfrak{R}_g}(M)}{dt}\right)_{\mathfrak{R}_g} = \vec{M}_A(\vec{F})$ par $\vec{e}_\Delta$ vecteur unitaire de l'axe Δ (fixe) orienté passant par A.

On obtient : $\left(\frac{dL_{\Delta/\mathfrak{R}_g}(M)}{dt}\right)_{\mathfrak{R}_g} = M_\Delta(\vec{F})$ qui correspond au théorème du moment cinétique par rapport à un axe fixe.

3. Application du théorème du moment cinétique au pendule simple



$$\left(\frac{d\vec{L}_{O/\mathfrak{R}_g}(M)}{dt}\right)_{\mathfrak{R}_g} = \vec{M}_O(\vec{T}) + \vec{M}_O(\vec{P})$$

$$\left(\frac{d\vec{L}_{O/\mathfrak{R}_g}(M)}{dt}\right)_{\mathfrak{R}_g} = \vec{M}_O(\vec{P})$$

En travaillant dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ on obtient :

$$m.l^2.\ddot{\theta} = -m.g.l.sin(\theta)$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin(\theta) = 0$$

Si θ << 1 $\quad \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$

oscillateur harmonique avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$

$$T_0 = 2.\pi.\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$\theta(t) = \theta_m.cos(\omega_0.t + \varphi))$$

Le problème peut être aussi résolu par le théorème de la puissance cinétique (ou puissance mécanique) et par le principe fondamental de la dynamique.