

Fonctions de plusieurs variables

2013

Études de fonctions de plusieurs variables

E et F sont des evn de dimensions finies (n et p) sur $\mathbb{R}$.

Exemple $f(x, y) = x^4 + 4xy + 5y^4$; on veut savoir si f atteint un extremum en $(0, 0)$.

On fixe $(a, b) \neq (0, 0)$ et on étudie $\varphi(t) = f(at, bt) = 4abt^2 + (a^4 + 5b^4)t^4$.

Si $ab \neq 0$, alors $\varphi(t) \sim 4abt^2$ donc pas d'extremum en $(0, 0)$.

Exemple $f(x, y) = 3x^2 - 2xy^2$.

1. Calculer $f(t^2, 2t)$ et $f(t, t)$. f admet-elle un extremum en $(0, 0)$?
2. Montrer que f admet un minimum local en $(0, 0)$ le long de toute droite passant par l'origine.

Dérivée selon un vecteur

Définition U un ouvert de E . Soit $f : U \rightarrow F$. Soit $a \in U$ et u un vecteur non nul de E . On considère la fonction $\varphi_u : t \mapsto f(a + tu)$.

Comme U est ouvert, il existe $\delta > 0$ tel que cette fonction soit définie de $[-\delta, \delta]$ dans F .

Si φ_u est dérivable en 0, la **dérivée de f en a selon le vecteur u** est le vecteur de F :

$$D_u f(a) = \varphi_u'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tu) - f(a)}{t}$$

Notation $D_u f(a)$

Définition L'application $D_u f$ est définie sur U si f admet une dérivée en tout point selon le vecteur u .

Dérivée selon un vecteur

Définition U un ouvert de E . Soit $f : U \rightarrow F$. Soit $a \in U$ et u un vecteur non nul de E . On considère la fonction $\varphi_u : t \mapsto f(a + tu)$.

Comme U est ouvert, il existe $\delta > 0$ tel que cette fonction soit définie de $[-\delta, \delta]$ dans F .

Si φ_u est dérivable en 0, la **dérivée de f en a selon le vecteur u** est le vecteur de F :

$$D_u f(a) = \varphi_u'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tu) - f(a)}{t}$$

Notation $D_u f(a)$

Définition L'application $D_u f$ est définie sur U si f admet une dérivée en tout point selon le vecteur u .

Cas particulier : dérivées partielles premières

Définition Si $B = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E , la dérivée en a selon e_j est notée $D_j f(a)$ ou $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$. C'est la j^{e} **dérivée partielle (première)** de f en a .

Calcul pratique des dérivées partielles

Proposition La j -ème dérivée partielle en $a = a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n$ est la dérivée en a_j l'application :

$f_j : x \rightarrow (a_1 e_1 + \cdots + a_{j-1} e_{j-1} + x e_j + a_{j+1} e_{j+1} + \cdots + a_n e_n)$
 (j ème application partielle en a).

Remarque f_j est définie sur un intervalle ouvert contenant a_j car U est un ouvert.

Démonstration On a :

$$\frac{f(a + h e_j) - f(a)}{h} = \frac{f_j(a_j + h) - f_j(a_j)}{h}$$

Si ces expressions admettent une limite quand $h \rightarrow 0$, il vient :

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = f'_j(a_j)$$

Remarque En physique, une grandeur peut dépendre de plusieurs familles de variables, donc il faut parfois préciser quelles variables restent fixes : $\left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_{T, \dots}$.

Exemples pratiques

Exemples

1. $f(x, y) = (xy, x + y)$. Alors pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $x \mapsto f(x, y)$ et $y \mapsto f(x, y)$ sont dérivables en y (resp. x), donc f admet des dérivées partielles en tout point :

Exemples pratiques

Exemples

1. $f(x, y) = (xy, x + y)$. Alors pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $x \mapsto f(x, y)$ et $y \mapsto f(x, y)$ sont dérivables en y (resp. x), donc f admet des dérivées partielles en tout point : $D_1 f(x, y) = (y, 1)$ et $D_2 f(x, y) = (x, 1)$.
2. $f : M \mapsto \det(M)$. (Indic : Quand on fixe tous coefficients sauf un seul, le déterminant est une fonction affine de ce coefficient.)

Exemples pratiques

Exemples

1. $f(x, y) = (xy, x + y)$. Alors pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $x \mapsto f(x, y)$ et $y \mapsto f(x, y)$ sont dérivables en y (resp. x), donc f admet des dérivées partielles en tout point : $D_1 f(x, y) = (y, 1)$ et $D_2 f(x, y) = (x, 1)$.
2. $f : M \mapsto \det(M)$. (Indic : Quand on fixe tous coefficients sauf un seul, le déterminant est une fonction affine de ce coefficient.) Pour toute matrice M , on a :

$$\det(M) = m_{ij} \cdot M_{ij} + C_M$$

où M_{ij} est le cofacteur de m_{ij} et C_M est indépendant de m_{ij} . En particulier, la $(i, j)^e$ application partielle en A s'écrit :

$$f_{ij}(x) = x \cdot A_{ij} + C_A$$

Alors $\frac{\partial f}{\partial m_{ij}}(A) = A_{ij}$.

Lien entre dérivées et continuité

Continue n'implique pas dérivable $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ est un exemple simple de fonction continue en $(0, 0)$ qui n'admet de dérivée selon aucun vecteur en $(0, 0)$.

Lien entre dérivées et continuité

Continue n'implique pas dérivable $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ est un exemple simple de fonction continue en $(0, 0)$ qui n'admet de dérivée selon aucun vecteur en $(0, 0)$. (car $f(tx, ty) = |t|.f(x, y)$.)

Lien entre dérivées et continuité

Continue n'implique pas dérivable $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ est un exemple simple de fonction continue en $(0, 0)$ qui n'admet de dérivée selon aucun vecteur en $(0, 0)$. (car $f(tx, ty) = |t|.f(x, y)$.)

Dérivable n'implique pas continue !

On considère la fonction $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.

Lien entre dérivées et continuité

Continue n'implique pas dérivable $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ est un exemple simple de fonction continue en $(0, 0)$ qui n'admet de dérivée selon aucun vecteur en $(0, 0)$. (car $f(tx, ty) = |t|.f(x, y)$.)

Dérivable n'implique pas continue !

On considère la fonction $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.

1. f admet des dérivées partielles en tout point. En particulier,

$$\frac{\partial}{\partial x} f(0, 0) = \frac{\partial}{\partial y} f(0, 0) = 0.$$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) = \frac{1}{2}$ donc f n'est pas continue en 0.

Extrema des fonctions numériques

Dans ce paragraphe, $F = \mathbb{R}$.

Proposition Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$. Si f admet un **extremum** en $a \in U$ et si elle admet une dérivée $D_u f(a)$, alors $D_u f(a) = 0$. En particulier, ses dérivées partielles sont nulles en a (point critique).

Remarque Condition nécessaire seulement !

Exemple On considère $f(x, y) = xy(1 - x - y)$ définie sur $T = \{(x, y) | x, y \geq 0, x + y \leq 1\}$. Déterminer les extrema de f sur T .

Exemple Déterminer le point M d'un triangle ABC tel que le produit des distances de M aux côtés soit maximal.

Différentielle en un point

Définition f défini de l'ouvert $U \subset E$ à valeurs dans F , et $a \in U$.

Pour $\|h\|$ assez petit, $a + h \in U$.

f est **différentiable** en a ssi il existe une application linéaire notée $df(a)$ appelée **application linéaire tangente** ou **différentielle de f en a** telle que :

$$f(a + h) = f(a) + df(a).h + o(h)$$

On note $df(a).h$ pour $df(a)(h)$ et $o(h)$ pour une fonction de type $\|h\|\varepsilon(h)$, où $\varepsilon(h) \rightarrow 0$ si $h \rightarrow 0$.

Unicité de la différentielle

Proposition L'application $df(a)$, si elle existe, est unique.

Démonstration Soient L_1 et L_2 deux applications linéaires telles que

$$f(a + h) = f(a) + L_1(h) + o(h) = f(a) + L_2(h) + o(h)$$

On pose $L = L_1 - L_2$.

Fixons h_0 de norme 1 tel que $L(h_0) = |||L|||$. Pour tout $h \neq 0$ colinéaire à h_0 , il vient :

$$|||L||| = \|L(h_0)\| = \frac{\|L(h)\|}{\|h\|} = o(1)$$

d'où $|||L||| = 0$ et donc $L = 0$.

Quelques exemples...

Exemples

1. Si $E = \mathbb{R}$, f est différentiable en a ssi f est dérivable en a et $df(a) : h \mapsto f'(a).h$.
2. Si f est constante,

Quelques exemples...

Exemples

1. Si $E = \mathbb{R}$, f est différentiable en a ssi f est dérivable en a et $df(a) : h \mapsto f'(a).h$.
2. Si f est constante, alors f est différentiable en tout point $a \in U$ et $df(a) = 0$.
3. Si f est linéaire : $f(a + h) = f(a) + f(h)$ donc...

Quelques exemples...

Exemples

1. Si $E = \mathbb{R}$, f est différentiable en a ssi f est dérivable en a et $df(a) : h \mapsto f'(a).h$.
2. Si f est constante, alors f est différentiable en tout point $a \in U$ et $df(a) = 0$.
3. Si f est linéaire : $f(a + h) = f(a) + f(h)$ donc... $df(a) : h \mapsto f(h)$, c'est-à-dire $df(a) = f$.
4. Si q est une forme quadratique et Φ sa forme polaire :
 $q(a + h) = q(a, a) + 2\Phi(a, h) + \Phi(h, h)$. Or en dimension finie,
 $\Phi(h, h) = O(\|h\|^2)$ donc $\Phi(h, h) = o(h)$.
 Il vient : $dq(a).h = 2\Phi(a, h)$.
5. Remarquons que tout monôme à n variables de degré ≥ 2 est négligeable "à l'ordre 1". Attention : y^3 est négligeable devant $x^2 + y^2$ en 0, mais pas devant x^2 .

Exemples où $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

1. $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $f(M) = \text{Tr}(M^2)$.

Exemples où $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

1. $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $f(M) = \text{Tr}(M^2)$.

$$(M+H)^2 = M^2 + MH + HM + H^2 \Rightarrow f(M+H) = f(M) + 2 \text{Tr}(MH) + o(H)$$

2. $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $f = \det$

Exemples où $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

1. $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $f(M) = \text{Tr}(M^2)$.

$$(M+H)^2 = M^2 + MH + HM + H^2 \Rightarrow f(M+H) = f(M) + 2 \text{Tr}(MH) + o(H)$$

2. $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $f = \det$

$$f(A+H) = \det(a_{ij} + h_{ij}) = \det(A) + \sum_{i,j} A_{ij} h_{ij} + o(H)$$

(en développant par multilinéarité, A_{ij} étant les cofacteurs de A). On reconnaît :

$$df(A).H = \sum_{i,j} A_{ij} h_{ij} = \text{Tr}({}^t \text{Com}(A).H)$$

Différentiable implique continue et "dérivable"

Proposition Si f est différentiable en a , alors f est continue en a .

Proposition Si f est différentiable en a , alors f est dérivable en a selon tout vecteur non nul et :

$$D_u f(a) = df(a).h$$

Démonstration $f(a + tu) = f(a) + df(a).tu + o(tu)$

donc pour t non nul :

$$\frac{f(a + tu) - f(a)}{t} = df(a).u + o(u) \rightarrow df(a).$$

En particulier, $(e_1, \dots, e_n)$ étant une base de E : $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = df(a).e_j$.

Développement limité à l'ordre 1

Proposition Si f est différentiable en a , alors pour tout $h = h_1 e_1 + \cdots + h_n e_n \in E$:

$$df(a).h = df(a).(h_1 e_1 + \cdots + h_n e_n) = \sum_{j=1}^n h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$$

On a donc le DL à l'ordre 1 :

$$f(a + h) = f(a) + \sum_{j=1}^n h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) + o(h)$$

Plan tangent à la surface $z = f(x, y)$

Proposition Soit f une fonction $C^1 : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. L'ensemble des points $S = \{(x, y, f(x, y)) | (x, y) \in U\}$ est une surface d'équation $z = f(x, y)$.
En $M_0 = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, elle admet le plan tangent d'équation :

$$z = z_0 + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

Exemple Déterminer le plan tangent au point $(1, 1, 1)$ de la surface d'équation : $xyz = 1$.

Surface paramétrée f est une fonction de $U \subset \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$. Son image $f(U)$ est une surface (S) de $\mathbb{R}^3$, et f est un *paramétrage* de cette surface.

Au voisinage d'un point de paramètre (u, v) :

$$\overrightarrow{OM(u, v)} = f(u + \xi, v + \eta) = f(u, v) + \xi \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) + \eta \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) + o(h, k)$$

Définition Le paramétrage est régulier en (u, v) , ou plus simplement, le point $M(u, v)$ est **régulier** si les vecteurs $\frac{\partial f}{\partial u}(u, v)$ et $\frac{\partial f}{\partial v}(u, v)$ sont indépendants.

Dans ce cas, le plan tangent en $M(u, v)$ a pour base $\left(\frac{\partial f}{\partial u}(u, v), \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \right)$ et il admet la représentation paramétrique :

$$x_i = f_i(u, v) + \xi \frac{\partial f_i}{\partial u}(u, v) + \eta \frac{\partial f_i}{\partial v}(u, v), \quad i = 1, 2, 3$$

En particulier $\frac{\partial f}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial f}{\partial v}(u, v)$ dirige la (droite) normale à (S) au point $M(u, v)$.

Exemple Déterminer le plan tangent à la surface : $x = 1 + tu$, $y = t^2 - u^2$, $z = t^2 + u^2$, au point de paramètres $(1, 1)$.

Lien entre les deux représentations

Remarque Le cas $z = f(x, y)$ peut être considéré comme un cas particulier de paramétrage :

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u, v) \end{cases}$$

Ce paramétrage est régulier, car en posant $F(u, v) = (u, v, f(u, v))$, les dérivées partielles $D_1 F(u, v) = (1, 0, D_1 f(u, v))$ et $D_2 F(u, v) = (0, 1, D_2 f(u, v))$ sont toujours indépendantes.

Fonctions de classe C^1 sur un ouvert

On fixe une base de E .

Définition Soit f une fonction définie sur l'ouvert U et qui admet des dérivées partielles en tout point de U .

f est de classe C^1 sur U (ou **continument différentiable**) ssi ses dérivées partielles sont continues sur U .

Remarque Les dérivées partielles sont des applications de U dans F .

Théorème (fondamental) Soit $f : U \rightarrow F$. Si f est C^1 sur U , alors f est différentiable en tout point de U .

Remarque Les applications affines sont de classe C^1 . En particulier, les surjections canoniques $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto x_i$ sont C^1 .

Proposition On fixe une base de F . f est C^1 sur U ssi ses coordonnées sont C^1 sur U . De plus $(D_j f)_i = D_j f_i$.

Exemple $f(x, y) = (xy, x^2 + y^2, x)$. Montrer que f est C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Matrice jacobienne

Définition Soient B une base de E et B' une base de F . On note $f_1, \dots, f_p$ les composantes de f . Si f est C^1 en $a \in U$, on définit la **matrice jacobienne** de f en a par $J(f)(a) = [\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)]$.

Remarque $J(f)(a) = M_{B,B'}(df(a))$.

Remarque Si $\dim F = 1$, la matrice est une ligne. Dans le cas $\dim E = 1$ ($E = \mathbb{R}$, par ex. - cas des arcs paramétrés), la jacobienne est une colonne.

Linéarité

Proposition Si f et g sont C^1 sur U , alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda f + g$ sont C^1 et $d(\lambda f + g)(a) = \lambda df(a) + dg(a)$.

En particulier, une base de E et de F étant fixée :

$$J(\lambda f + g)(a) = \lambda J(f)(a) + J(g)(a).$$

Conséquence $C^1(U, F)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Composée de fonctions C^1

Proposition Si $f : U \rightarrow F$ est C^1 et $g : V \rightarrow G$ est C^1 et $f(U) \subset V$, alors :

1. $g \circ f$ est C^1 sur U .
2. Pour $a \in U$, $b = f(a)$, $d(g \circ f)(a) = dg(b).df(a)$.
3. Pour tout choix de base de E , F et G ,

$$J(g \circ f)(a) = J(g)(b).J(f)(a)$$

Démonstration

Démonstration Montrons que $g \circ f$ est différentiable en tout point de U .

On a $f(a + h) = f(a) + v$ avec $v = df(a).h + \|h\|\eta(h)$. En particulier,
 $\|v\| = O(\|h\|)$.

Or,

$$g(b + v) = g(b) + dg(b).v + \|v\|\varepsilon(v)$$

et donc :

$$g \circ f(a + h) - g \circ f(a) = dg(f(a)).df(a).h + o(h)$$

On en déduit que $g \circ f$ est différentiable en a et $d(g \circ f)(a) = dg(b) \circ df(a)$.

Vérifions que les dérivées partielles de $g \circ f$ sont continues.

On fixe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E et $(e'_1, \dots, e'_p)$ de F , on a pour tout $a \in U$:

$$\begin{aligned} D_j(g \circ f)_i(a) &= d(g_i \circ f)(a).e_j = dg_i(b).(df(a).e_j) \\ &= dg_i(b).\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \\ &= dg_i(b).\sum_{k=1}^p \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a)e'_k \\ &= \sum_{k=1}^p \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a)dg_i(b).e'_k \\ &= \sum_{k=1}^p \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(b)\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a) \end{aligned}$$

et donc les dérivées partielles de $g \circ f$ sont continues d'après les théorèmes généraux, cqfd.

Bilan

On retient :

$$\frac{\partial (g \circ f)_i}{\partial x_j}(a) = \sum_{k=1}^p \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(a)) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a)$$

En physique, souvent exprimé sous la forme :

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^p \frac{\partial g_i}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_j}$$

Des dérivées partielles...

Exemples Soit f de classe $C^1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

1. Dérivée de $g(x) = f(x, x^2)$.
2. Dérivées partielles de $g(x, y) = f(x, y) - f(y, x)$.
3. Dérivées partielles de $F(x, y) = \int_0^y f(t, x) dt$. En déduire la dérivée de

$$h(x) = \int_0^x f(t, x) dt.$$

Dérivation le long d'une courbe

Proposition Cas particulier : l'argument de f décrit un arc paramétré.
Dérivée de $f \circ \varphi$, où φ est C^1 de I dans U .

$$(f \circ \varphi)'(t) = df(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$$

Différentielle d'un produit

Proposition Si f et g sont C^1 sur U , à valeurs réelles, alors fg est C^1 sur $\mathbb{R}$.
En particulier, pour tout $a \in U$:

$$d(fg)(a) = f(a)dg(a) + g(a)df(a)$$

Démonstration Écrire les dérivées partielles.

Définition Algèbre $C^1(U)$ des fonctions C^1 de U dans $\mathbb{R}$.

Gradient d'une fonction numérique

Définition Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une application différentiable. L'application $h \mapsto df(a).h$ est une forme linéaire, donc il existe un unique vecteur, appelé **gradient de f en a** et noté $\text{grad } f(a)$, tel que :

$$\forall h \in E, \quad df(a).h = D_h f(a) = (\text{grad } f(a)|h)$$

Remarque En physique, notation : $df = (\text{grad } f|dM)$

Coordonnées du gradient

Proposition Coordonnées du gradient de f en a dans une base orthonormale $(e_1, \dots, e_n)$ de E :
 $(D_1 f(a), D_2 f(a), \dots, D_n f(a)).$

Démonstration La base étant orthonormale, la i -ème coordonnée est
 $(\text{grad } f(a) | e_i) = df(a).e_i = D_i f(a)$

Coordonnées polaires du gradient

Principe : on pose $\Phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$. Φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, et on pose : $g = f \circ \Phi$, de sorte que $g(r, \theta) = f(x, y)$.

Soit φ un arc paramétré C^1 défini par $\varphi(t) = (r(t), \theta(t))$, et $M = \Phi(\varphi)$. On a, pour tout t , $g(\varphi(t)) = f(M(t))$ et en dérivant :

$$(\text{grad } g(\varphi(t)) | \varphi'(t)) = (\text{grad } f(M(t)) | M'(t))$$

Or $M = r(t)u_r(t)$, donc : $M'(t) = r'(t)u_r(t) + r(t)\theta'(t)u_\theta(t)$.

Il vient finalement :

$$\frac{\partial g}{\partial r}(\varphi(t))r'(t) + \frac{\partial g}{\partial \theta}(\varphi(t))\theta'(t) = (\text{grad } f(M(t)) | r'(t)u_r(t) + r(t)\theta'(t)u_\theta(t))$$

L'unicité du gradient permet d'identifier (si $r \neq 0$) :

$$\text{grad } f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta)u_r + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta)u_\theta$$

Coordonnées cylindriques

Le principe est le même, cette fois $\Phi(r, \theta, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$ et $M'(t) = r'(t)u_r(t) + r(t)\theta'(t)u_\theta(t) + z'(t)u_z(t)$. On obtient :

$$\text{grad } f = \frac{\partial g}{\partial r} u_r + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta} u_\theta + \frac{\partial g}{\partial z} u_z$$

Coordonnées sphériques du gradient

On a cette fois $\Phi(r, \theta, \varphi) = (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta)$ et $M = ru_r$.

On peut vérifier les relations :

$$\frac{\partial u_r}{\partial \theta} = u_\theta \quad \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} = \sin \theta u_\varphi$$

Ainsi, $M' = r' u_r + r(\theta' u_\theta + \sin \theta \varphi' u_\varphi)$. Par identification :

$$\text{grad } f = \frac{\partial g}{\partial r} u_r + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta} u_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial g}{\partial \varphi} u_\varphi$$

Coordonnées cylindriques et polaires

1. Coordonnées cylindriques. On pose $g(r, \theta, z) = f(x, y, z)$. L'identité : $dM = dr u_r + r d\theta u_\theta + dz u_z$ donne facilement le résultat.

$$\text{grad } f = \frac{\partial g}{\partial r} u_r + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta} u_\theta + \frac{\partial g}{\partial z} u_z$$

2. Coordonnées polaires. On pose $g(r, \theta) = f(x, y)$ les calculs sont analogues aux coordonnées cylindriques.

$$\text{grad } f = \frac{\partial g}{\partial r} u_r + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta} u_\theta$$

Application aux extrema

Définition Soit $f \in C^1(U)$. f admet un **point critique** en a ssi $df(a) = 0$ (ou encore, $\text{grad } f(a) = 0$).

Proposition Si $f \in C^1(U)$ atteint un extremum ou un minimum local en $a \in U$, alors $\text{grad } f(a) = 0$.

Dérivation d'un champ scalaire le long d'une courbe

Proposition Dérivée d'un champ scalaire le long d'une courbe :

$g(t) = f(\varphi(t))$, alors $g'(t) = (\text{grad } f(\varphi(t)) | \varphi'(t))$.

Remarque Lignes de champ : arc paramétrés régulier φ pour lequel φ' et $\text{grad } f$ sont colinéaires (applications : ligne de plus grande pente, trajet de la lumière dans un milieu non homogène...)

Normale à une courbe/surface de niveau

Proposition Soit f une fonction $C^1 : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On considère la courbe plane Γ d'équation cartésienne $f(x, y) = \lambda$. Si $\text{grad } f(x_0, y_0) \neq 0$ (point **régulier**), alors $\text{grad } f(x_0, y_0)$ dirige la **droite normale** à Γ en (x_0, y_0) .

Démonstration Pour tout $\varphi \in C^1$ tel que $\forall t, f(\varphi(t)) = 0$, alors $(\text{grad } f(\varphi(t)) | \varphi'(t)) = 0$, donc $\text{grad } f(\varphi(t)) \perp \varphi'(t)$.

De même,

Proposition Soit S une surface d'équation cartésienne $f(x, y, z) = 0$ avec f de classe C^1 sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^3$. Si $\text{grad } f(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ (point **régulier**), alors il dirige la **droite normale** à S en (x_0, y_0, z_0) .

Inégalité des accroissements finis

Théorème (Inégalité des accroissements finis) On suppose $U \subset E$ convexe et pour tout $a \in U$, $\|\text{grad } f(a)\| \leq K$. Alors pour tout $[x, y] \in U$:

$$\|f(x) - f(y)\| \leq K\|x - y\|$$

Démonstration On pose $y = x + u$ et on considère $\varphi_u : t \in [0, 1] \mapsto f(x + tu)$. φ_u est la composée de f et de $t \mapsto x + tu$ sur $[0, 1]$, donc $\varphi'_u(\xi) = df(a + \xi u) \cdot u$. Alors d'après l'égalité des accroissements finis, il existe $\xi \in]0, 1[$ tel que $\varphi_u(1) - \varphi_u(0) = \varphi'_u(\xi)$.

Or $\varphi'_u(\xi) = (\text{grad } f(x + \xi u)|u)$ et avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\varphi_u(1) - \varphi_u(0) \leq K\|u\|$$

cqfd.

Caractérisation des constantes

Conséquence Soit $f : U \rightarrow F$. Si $df = 0$ sur le convexe U , alors f est constante sur U .

Remarque En fait, il suffit qu'il existe un point x_0 que l'on puisse relier à tout autre point x de l'ouvert par un chemin C^1 . En effet, le long de ce chemin paramétré par φ , on a $(f(\varphi))'(t) = \text{grad } f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = 0$, donc $f \circ \varphi$ est constante et donc $f(x) = f(x_0)$.

C^1 -difféomorphismes

Définition U ouvert de E , V ouvert de F . f est un C^1 -difféomorphisme de U sur V ssi f est bijective et sa réciproque est C^1 de V sur U .

Proposition Si f est un C^1 -difféomorphisme de U sur V , $g = f^{-1}$ et $b = f(a)$, alors $J(g)(b) = J(f)(a)^{-1}$.

On remarque qu'il est nécessaire que $n = p$.

Démonstration On remarque, pour tout $a \in U$ et $b = f(a) \in V$:

$I_n = J(\text{Id}_E)(a) = J(g \circ f)(a) = J(g)(b).J(f)(a)$. ce qui suffit pour conclure.

Proposition (Application) Si f est un C^1 difféomorphisme de U sur V , et φ est un arc paramétré régulier, alors $f(\varphi)$ est un arc paramétré régulier. L'image d'une tangente est tangente au point-image.

Jacobien

Définition Si $n = p$, le déterminant de $J(f)(a)$ est le **jacobien** de f en a .

Notation $\frac{D(f_1, \dots, f_n)}{D(x_1, \dots, x_n)}$.

Remarque Si f est un C^1 -difféomorphisme de U sur V , alors son jacobien ne s'annule pas.

Caractérisation des C^1 -difféomorphismes

Proposition (Caractérisation des C^1 -difféomorphismes).

On note $\dim E = n$ et $\dim F = p$.

Si f est une application **injective** de classe C^1 sur U , f est un C^1 difféomorphisme de U sur $V = f(U)$ ssi $n = p$ et $\text{Jac}(f)$ ne s'annule pas.

Coordonnées polaires

Exemples

1. Coordonnées polaires. $\Phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$.

$$J(\Phi) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } \frac{D(x, y)}{D(r, \theta)} = r.$$

On en déduit que Φ est un C^1 -difféomorphisme de $]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[\rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}_- \times \{0\}$.

2. Détermination principale de l'argument d'un nombre complexe.
 $\Phi(r, \theta) = re^{i\theta}$ définit un C^1 -difféomorphisme de $]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[$ sur son image.

Coordonnées cylindriques et sphériques

1. Coordonnées cylindriques : $\Phi(r, \theta, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$.

$$J(\Phi) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc $\frac{D(x, y, z)}{D(r, \theta, z)} = r$.

On en déduit que Φ est un C^1 -difféomorphisme de
 $]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}_- \times \{0\} \times \mathbb{R}$.

2. Coordonnées sphériques : $\Phi(r, \theta, \varphi) = (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta)$.

$$J(\Phi) = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix}$$

donc $\frac{D(x, y, z)}{D(r, \theta, \varphi)} = r^2 \sin \theta$.

On en déduit que Φ est un C^1 -difféomorphisme de
 $]0, +\infty[\times]0, \pi[\times]-\pi, \pi[\rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}_- \times \{0\} \times \mathbb{R}$.

Autres exemples...

1. $z \mapsto \exp(z)$ définit un C^1 difféomorphisme de $\mathbb{R} \times]-\pi, \pi[$ sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$.
 On identifie à la fonction $f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$. La jacobienne s'écrit :

$$J(f) = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix}$$

donc le jacobien vaut $e^{2x} \neq 0$. Jacobienne de la réciproque :

$f^{-1} : (X, Y) \rightarrow (x, y)$ avec $X = e^x \cos y$, $Y = e^x \sin y$.

Il vient :

$$J(f^{-1}) = \frac{1}{X^2 + Y^2} \begin{pmatrix} X & Y \\ -Y & X \end{pmatrix}$$

2. $\Phi(x, y) = (xy, x/y)$ définit un C^1 -difféomorphisme de $(\mathbb{R}_+^*)^2$ sur lui-même (jacobien égal à $-2x/y$.)
3. $\Phi(x, y) = (x - y, x + y)$ définit un C^1 -difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. (jacobien égal à 2.)

Équation $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$

Proposition Si U est convexe et $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, alors $f(x, y) = A(y)$ avec $A \in C^1$. En effet, à y fixé, $\{x \mid (x, y) \in U\}$ est un intervalle I_y , donc il existe une constante $A(y)$ telle que $f(x, y) = A(y)$ pour tout $x \in I_y$. $f \in C^1$ donc A est C^1 , ce qui montre la réciproque.

CONTRE-exemple si U n'est pas convexe.

Sur $U = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}_- \times \{0\}$, on pose :

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \text{ et } y > 0 \\ -x^2 & \text{si } x \leq 0 \text{ et } y < 0 \end{cases}$$

Application aux EDP

Exemples

1. On cherche $f \in C^1$ telle que :

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

sur $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. On applique le changement de variables :

$$\begin{cases} u = x \\ v = \frac{y}{x} \end{cases}$$

Vérifier qu'on définit ainsi un C^1 -difféomorphisme de U sur un ouvert V à préciser et résoudre l'équation.

Rép : $\text{Jac}(\Phi) = \frac{1}{x} \neq 0$. On pose $g(u, v) = f(x, y)$ (abus de notation).

L'équation devient : $\frac{\partial g}{\partial u} = 0$, d'où $f(x, y) = A\left(\frac{y}{x}\right)$ où A est C^1 sur $\mathbb{R}$.

2. idem avec :

$$x \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial f}{\partial y} = xy^2$$

et le changement de variables $u = x, v = \frac{y}{x}$

Changement de variable polaire

Exemple Soit à résoudre :

$$x \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

sur $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. On pose $F(r, \theta) = f(x, y)$. L'équation $\text{Det}(\overrightarrow{OM}, \text{grad } f) = af$ devient :

Changement de variable polaire

Exemple Soit à résoudre :

$$x \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

sur $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. On pose $F(r, \theta) = f(x, y)$. L'équation $\text{Det}(\overrightarrow{OM}, \text{grad } f) = af$

devient :
$$\begin{vmatrix} r & F_r \\ 0 & \frac{1}{r} F_\theta \end{vmatrix} = aF$$

soit $F_\theta = aF$, et donc $F(r, \theta) = C(r) \exp(a\theta)$.

Finalement, $f(x, y) = C(\sqrt{x^2 + y^2}) \exp(a \text{Arctan } \frac{y}{x})$.

Fonctions de classe C^k

Définition Soit $f : U \rightarrow F$ et $k \in \mathbb{N}$.

On dit que f est de classe C^{k+1} sur U si elle admet des dérivées partielles sur U qui sont de classe C^k .

f est de classe C^∞ sur U si elle est de classe C^k pour tout k .

Notation
$$\frac{\partial^k f}{\partial x_1 \cdots \partial x_k} = \frac{\partial^k f}{\partial x_1} \left(\frac{\partial^k}{\partial x_2} \left(\cdots \frac{\partial^k f}{\partial x_k} \right) \right).$$

Exemple Les applications coordonnées $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_j$ sont C^∞ (car linéaires); toute composée de fonctions de classe C^k est C^k .

Propriétés algébriques

Proposition

1. $C^k(U, F)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
2. Si $F = \mathbb{R}$, $C^k(U)$ est une $\mathbb{R}$ -algèbre.
3. Si Φ est bilinéaire, f, g de classe C^k , alors $\Phi(f, g)$ de classe C^k .

Proposition (Composition) Soient $f : U \subset E \rightarrow F$ et $g : V \subset F \rightarrow G$, avec $f(U) \subset V$. Si f et g sont de classe C^k alors $g \circ f$ est C^k sur U .

Corollaire Si $f \in C^k(U, \mathbb{R})$ et f ne s'annule pas, alors $\frac{1}{f}$ est C^k sur U .

Théorème de Schwarz

Théorème (de Schwarz) Si f est de classe C^2 sur U , alors :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

(ADMIS)

Exemple $f(x, y) = x^2 y^3$.

Exemple $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Vérifier les dérivées secondes croisées.

Contrôler la classe d'une fonction avec le th. de Schwarz

Exemple On considère $f(x, y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$, $f(0, 0) = 0$.

1. $|f(x, y)| \leq \frac{1}{2}|x^2 - y^2| \rightarrow 0$.

2. $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{y}$

On calcule donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0$

et pour $y \neq 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, y) - f(x, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y(x^2 - y^2)}{y^2} = -y$$

et donc $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y - 0}{y} = -1$.

3. En échangeant x et y , on en déduit : $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1$.

4. Conclusion : le théorème de Schwarz tombe en défaut, donc f n'est pas de classe C^2 en 0.

Exemple : Laplacien

Exemple Laplacien en coordonnées polaires. Si $f \in C^2(U)$, le laplacien de f est donné par :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Posons $g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$. Alors :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$$

Exemple $n \in \mathbb{R}$, on pose $f(x, y) = r^n e^{in\theta}$. Vérifier $\Delta f = 0$. (fonctions harmoniques fondamentales)

Exemple d'EDP d'ordre 2

Exemple Résoudre l'EDP : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 5 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 6 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

On résout $r^2 - 5r + 6 = 0$ et on constate que l'équation s'écrit $(D_x - 3D_y)(D_x - 2D_y)f = 0$. On veut trouver (u, v) de telle sorte que $D_v = D_x - 3D_y$ et $D_u = D_x - 2D_y$. Il faudra donc $\frac{\partial x}{\partial u} = 1$ et $\frac{\partial y}{\partial u} = -2$, de même pour v , on posera donc : $x = u + v$ et $y = -2u - 3v$.

Exemple d'EDP d'ordre 2

Exemple Résoudre l'EDP : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 5 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 6 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

On résout $r^2 - 5r + 6 = 0$ et on constate que l'équation s'écrit $(D_x - 3D_y)(D_x - 2D_y)f = 0$. On veut trouver (u, v) de telle sorte que $D_v = D_x - 3D_y$ et $D_u = D_x - 2D_y$. Il faudra donc $\frac{\partial x}{\partial u} = 1$ et $\frac{\partial y}{\partial u} = -2$, de même pour v , on posera donc : $x = u + v$ et $y = -2u - 3v$. Ainsi, on est ramené par changement de variable à l'équation :

$\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u} = 0$, donc $\frac{\partial g}{\partial u} = A(u)$, d'où $g = A(u) + B(v)$, avec A et B C^2 .

Finalement, $f(x, y) = A(3x + y) + B(2x + y)$, avec A et B de classe C^2 .

Formes différentielles

Définition Une **forme différentielle** sur l'ouvert $U \subset E$ est une application de U dans E^* .

Exemples

1. Si $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable, alors df est une forme différentielle sur U .
2. Soit $\omega : U \rightarrow E^*$. Fixons $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et B^* sa base duale.

Notons $\omega_1, \dots, \omega_n$ les applications coordonnées de ω selon B^* , c'est-à-dire : pour tout $x \in U$:

$$\omega(x) = \omega_1(x)e_1^* + \dots + \omega_n(x)e_n^*$$

ou encore $\omega = \omega_1 e_1^* + \dots + \omega_n e_n^*$.

3. En particulier, ω est de classe C^k ssi pour tout i , $\omega_i \in C^k(U)$.

Notation des formes différentielles

Notation Notons $\varphi_i : x = (x_1, \dots, x_n) \rightarrow x_i$. Alors $d\varphi_i = e_i^*$. On notera $dx_i = e_i^*$, et donc on écrit, pour tout $x \in U$:

$$\omega(x) = \omega_1(x)dx_1 + \dots + \omega_n(x)dx_n$$

donc $\omega = \omega_1 dx_1 + \dots + \omega_n dx_n$.

En particulier, si f est différentiable : $U \rightarrow \mathbb{R}$:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

Remarque φ_i est définie sur U , alors que e_i^* est définie sur E tout entier !

Formes différentielles exactes

Définition La forme différentielle ω est **exacte** sur U s'il existe une application f de classe C^1 sur U telle que $\omega = df$. f est une **primitive** de ω sur U .

Proposition (Condition nécessaire) Soit $\omega = Pdx + Qdy$ une forme exacte sur U de classe C^1 . Alors ω est **fermée**, c-à-d :

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

Démonstration Posons $\omega = df$. Comme ω est C^1 sur U , alors f est C^2 et on applique le théorème de Schwarz.

Exemples

Exemple On considère $\omega(x, y) = xdy$ définie sur $\mathbb{R}^2$.

Dans ce cas, $P(x, y) = 0$ et $Q(x, y) = x$.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 1 \text{ et } \frac{\partial P}{\partial y} = 0.$$

La forme ω n'est pas fermée, donc n'est pas exacte sur $\mathbb{R}^2$.

Exemple Montrer que la forme différentielle :

$$\omega(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} dx + \frac{y}{x^2 + y^2} dy$$

est exacte sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Condition suffisante d'exactitude

Théorème (de Poincaré) Si U est un ouvert étoilé, toute forme fermée sur U est exacte.

Remarques

1. U est étoilé par rapport à $x_0 \in U$ ssi, pour tout $x \in U$, $[x_0, x] \subset U$. En particulier, tout convexe est étoilé.
2. Il suffit donc que U soit convexe (il est alors étoilé par rapport à chacun de ses points).
3. La primitive est alors unique à une constante près (faux si l'ouvert n'est pas étoilé.)
4. Est-il nécessaire que U soit étoilé pour qu'une forme sur U soit exacte ?

Exemple On considère $\omega = ydx + xdy$. Vérifier qu'elle est exacte sur $\mathbb{R}^2$.

Intégrale (curviligne) d'une forme différentielle

Définition Soit $\omega = \omega_1 dx_1 + \cdots + \omega_n dx_n$ définie sur un ouvert $U \subset E$. Soit φ un arc paramétré par : $t \mapsto (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$ de $I \rightarrow U$. Alors l'intégrale curviligne de ω selon γ est :

$$\int_{\varphi} \omega = \int_I \omega_1(\varphi(t))\varphi_1'(t) + \cdots + \omega_n(\varphi(t))\varphi_n'(t)$$

Exemple Chaleur dissipée entre le temps t_1 et t_2 : $\int_{t_1}^{t_2} \delta Q$.

Intégrale d'une forme exacte

Proposition Soit $\varphi : [t_0, t_1] \rightarrow U$. Posons $A_0 = \varphi(t_0)$ et $A_1 = \varphi(t_1)$. Soit ω une forme **exacte** sur U , et f de classe C^1 telle que $\omega = df$. On a :

1. $\int_{\varphi} \omega = f(A_1) - f(A_0)$
2. En particulier si φ est un lacet ($A_0 = A_1$), alors l'intégrale curviligne de f sur φ est nulle.

Démonstration Il suffit de constater

$$\int_{\varphi} \omega = \int_I df(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \int_I (f(\varphi(t)))' dt = f(\varphi(t_1)) - f(\varphi(t_0))$$

Champs de vecteurs

Définition Un élément de $C^k(U, E)$ s'appelle un champ de vecteurs de classe C^k sur U .

Proposition On fixe B base de E et B^* sa base duale. L'application :

$$\Phi \left(\begin{array}{ccc} f = f_1 e_1 + \cdots + f_n e_n & \mapsto & \omega = f_1 e_1^* + \cdots + f_n e_n^* \\ C^k(U, E) & \rightarrow & C^k(U, E^*) \end{array} \right)$$

est un isomorphisme (de $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels), entre les champs de vecteurs C^k sur U et les formes différentielles C^k sur U .

Champs de gradients

Définition Si $f \in C^{k+1}(U)$, alors $F = \text{grad } f$ est un champ de vecteur C^k sur U . On dit que F est un **champ de gradients** ou que F **dérive du potentiel** f . F est un champ de gradients ssi $\Phi(F)$ est une forme exacte.

Remarque Si $F = \text{grad } f$, alors $D_i(F_j) = D_j(F_i)$ pour tout (i, j) (Schwarz).
Réciproque vraie sur un ouvert étoilé (Poincaré)

Circulation d'un champ de vecteurs

Circulation d'un champ de vecteurs E étant un espace euclidien, et $F \in C^k(U, E)$ un champ de vecteurs C^k , sa circulation sur l'arc γ paramétré par φ est définie par :

$$\int_{\gamma} (F|dM) = \int_I (F(\varphi(t))|\varphi'(t)) dt$$

Il s'agit du travail de F le long de γ . Il est indépendant du paramétrage "admissible" (effectuer un changement de variable dans l'intégrale).

Remarque Si $F = \text{grad } f$ est un champ de gradients, alors

$$\int_{AB} F \cdot dM = f(B) - f(A).$$

Exemple $\omega(x, y) = xdy$ le long de $OABO$ avec $A(1, 0)$ et B de coordonnées polaires $1, \pi/4$.

Circulation d'un champ de vecteurs

Circulation d'un champ de vecteurs E étant un espace euclidien, et $F \in C^k(U, E)$ un champ de vecteurs C^k , sa circulation sur l'arc γ paramétré par φ est définie par :

$$\int_{\gamma} (F|dM) = \int_I (F(\varphi(t))|\varphi'(t)) dt$$

Il s'agit du travail de F le long de γ . Il est indépendant du paramétrage "admissible" (effectuer un changement de variable dans l'intégrale).

Remarque Si $F = \text{grad } f$ est un champ de gradients, alors

$$\int_{AB} F \cdot dM = f(B) - f(A).$$

Exemple $\omega(x, y) = xdy$ le long de $OABO$ avec $A(1, 0)$ et B de coordonnées polaires $1, \pi/4$. (on trouve $1/2$).

Application au calcul d'intégrales

Exemple (Mines) $f(x, y) = e^{-x^2+y^2}(\cos(2xy)dx + \sin(2xy)dy)$

1. Est-ce une forme exacte ?
2. Intégrer sur le chemin $OABO$ avec $A(R, 0)$, $B(R/\sqrt{2}, R/\sqrt{2})$. En déduire
On en déduit : $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ (Gauss).
3. On considère $g(x, y) = e^{-x^2+y^2}(-\sin(2xy)dx + \cos(2xy)dy)$. En déduire :
 $\int_0^\infty \cos(t^2) dt$ et $\int_0^\infty \sin(t^2) dt$ (Fresnel).

1. Les dérivées croisées sont $2ye^{-x^2+y^2} \cos(2xy) - 2x \sin(2xy)e^{-x^2+y^2}$ dc forme exacte. (on est sur $\mathbb{R}^2$).

2. Sur $OABO$: intégrale nulle (forme exacte). Sur $[OA]$, $\int_0^R e^{-x^2} dx$. Sur $[AB]$, coordonnées polaires :

$$\int_0^{\pi/4} e^{R^2(\sin^2 \theta - \cos^2 \theta)} (-\cos(R^2 \sin 2\theta) \sin \theta + \sin(R^2 \sin 2\theta) \cos \theta) R d\theta.$$

On majore par $\int_0^{\pi/4} R e^{-R^2 \cos 2\theta} d\theta \leq \int_0^{\pi/4} R e^{-R^2(1-4\theta/\pi)} d\theta$ (concavité de $\cos$). Cette intégrale se calcule : $\pi(1 - e^{-R^2})/(4R)$.

Sur $[BO]$: $\int_0^{R/\sqrt{2}} \cos(2t^2) + \sin(2t^2) dt$.

On en déduit : $\int_0^\infty \cos(2t^2) + \sin(2t^2) dt = \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (Gauss).

3. On obtient de même : $\int_0^\infty \cos(2t^2) - \sin(2t^2) dt = 0$, puis les valeurs des intégrales de Fresnel ($\sqrt{\pi/8}$).