Oraux Centrale 2 sur la banque BEOS UPS http://beos.prepas.org/

BEOS 1872 MP

Énoncé(s) donné(s)

Étude des solutions de l'équation différentielle (E) : $\mathrm{sh}^5\, x\, y' + 2\,\mathrm{ch}\, x\,\mathrm{sh}^2\, x\, y = \mathrm{ch}^3\, x$

1) a) Nature de cette équation différentielle ?

Sur quel(s) domaine(s) l'étudier ?

1) b) Résoudre l'équation homogène sur les domaines précédents.

2) a) Tracer sur Python la solution vérifiant $y(1) = 1$ sur $[1; 10]$ avec un pas de $0,01$.

Conjecturer le comportement de la solution au voisinage de 0.

2) b) Vérification : Tracer à rebours cette solution sur $[0,1; 1]$, toujours avec un pas de $0,01$.

(On utilisera la fonction odeint du module scipy.integrate (voir doc)).

3) a) Trouver une primitive de $t \mapsto (t-1)e^t$.

3) b) Trouver la solution de $\begin{cases} (E) \\ y(1) = 1 \end{cases}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

3) c) Existe-t-il une solution de (E) continue sur $\mathbb{R}$?

(3-4 autres questions que je n'ai pas eu le temps de lire intitulées "encore des simulations")

BEOS 1940 PSI

Énoncé(s) donné(s)

Soit n entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer que $M^T M$ est inversible et symétrique et que son spectre est inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.

2. Montrer qu'il existe Ω une matrice orthogonale, S une matrice symétrique à valeurs propres strictement positives telles que $M = \Omega S$

3. Trouver Ω et S telles que $M = \Omega S$ avec

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Montrer qu'il existe Ω' une matrice orthogonale, T une matrice triangulaire à valeurs propres strictement positives telles que $M = \Omega' T$

5. Trouver Ω' et T telles que $M = \Omega' T$ avec

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

BEOS 1860 MP

Énoncé(s) donné(s)

Pour $n \in \mathbb{N}$, p premier, on pose :

$$R_{n,p} = X^n + X^{n-1} + \cdots + X + p$$

1. a. Ecrire un programme de paramètres n et p, qui renvoie la liste des parties réelles et des parties imaginaires des racines de $R_{n,p}$. On pourra utiliser la fonction roots du module numpy.

b. Ecrire un programme de paramètres n et p, qui trace les racines de $R_{n,p}$, ainsi que le cercle unité. Conjecture sur les racines ?

On pose de plus $Q_{n,p} = pX^n + X^{n-1} + \cdots + X + 1$, et $F_{n,p} = (1-X)Q_{n,p}$

2. a. Montrer que toutes les racines de $F_{n,p}$ sont toutes dans le disque fermé $\overline{D(0,1)}$.

b. Montrer que toutes les racines de $Q_{n,p}$ sont toutes dans le disque $D(0,1)$.

c. Montrer qu'il n'existe pas $F, G \in \mathbb{Z}[X]$ non constants, tels que $R_{n,p} = FG$

BEOS 1802 PC

Soit (Xn), $n \geq 1$, une suite de variables aléatoires suivant la même loi et mutuellement indépendantes.

La loi de Xn est définie par : P(Xn = -1) = p, P(Xn = 1) = 1-p. p dans [0,1].

On définit la suite de variables aléatoires (Zn) par Zn = X_1*X_2* ... *Xn.

On définit les suites (a_n) et (b_n), $n \geq 1$, par a_n = P(Zn = -1) et b_n = P(Zn = 1).

1) Trouver une relation simple entre a_n et b_n pour tout $n \geq 1$?

2) a) Trouver une expression de a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n .

2) b) En déduire l'écriture en python d'une fonction calculant a_n et b_n et utilisant des écritures matricielles.

2) c) Trouver a_n en fonction de n et p et contrôler le programme précédent pour p = 0,2 et n allant de 1 à 20.

2) d) Calculer l'espérance de Zn

3) a) Calculer la covariance de Z_n et Z_{n+1}.

3) b) Calculer cov(Z_1,Z_2). Qu'en déduit-on ?

BEOS 1797 PSI

On pose $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

1/ Ecrire une fonction qui renvoie F_n pour tout entier n. Calculer F_{50}.

2/ Pour tout entier m non nul, on pose $F_n(m)$ le reste de la division euclidienne de F_n par m.

a/ Ecrire une fonction qui renvoie $F_n(m)$. Calculer $F_{100}(m)$ pour m = 5,7, [qques valeurs..].

Tracer le graphe donnant $F_n(m)$ en fonction de n pour $n \in [\![0,200]\!]$ et m = [une valeur...].

b/ Soient $a \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que la condition :

$(F_{a+p}(m), F_{a+p+1}(m)) = (F_a(m), F_{a+1}(m))$

est équivalente à la condition :

$F_p(m) = 0$ et $F_{p+1}(m) = 1$.

3/ Montrer que la suite $(F_n(m))_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique.

Ecrire une fonction qui donne la période de $(F_n(m))_{n\in\mathbb{N}}$ pour tout entier m non nul.

Calculer la période de $(F_n(3))_{n\in\mathbb{N}}$.

BEOS 1764 MP

Considérons l'application $A \in M_n(\mathbb{R}) \mapsto \widehat{A}$ C'est la centro-transposée.

$$a_{i,j} \mapsto a_{n+1-i,n+1-j}$$

et J_n *de terme général* $\delta_{i,n+1-i}$

A)1) Écrire en Python une fonction J(n) qui retourne la matrice Jn.

2) Écrire en Python une fonction qui renovoie une matrice pseudo aléatoire à coefficients entiers entre 0 et 100. (On pourra se servir de la fonction donnée en annexe : np.random.randint(0,100,(n,p)) de numpy)

3)Écrire en Python la fonction centroMatrix(A) qui renvoie $\widehat{A}$, puis trouver à l'aide de Python une relation entre J_n et l'application centro-transposée.

Justifier mathématiquement cette relation.

B)Quelques propriétés.

1)Montrer que l'application $A \in M_n(\mathbb{R}) \mapsto \widehat{A}$ est un automorphisme involutif.

2)Montrer que $\forall (A,B) \in M_n(\mathbb{R})^2 : \widehat{AB} = \widehat{A}\widehat{B}$

et que $\forall A \in Gl_n(\mathbb{R}) : \widehat{A^{-1}} = \widehat{A}^{-1}$

3)Montrer que: $\widehat{{}^tA} = {}^t\widehat{A}$

4)Montrer enfin que $\det \widehat{A} = \det A$

C)La centro-symétrie:

$C_n^+ = \{A \in M_n(\mathbb{R}) / \widehat{A} = A\}$

$C_n^- = \{A \in M_n(\mathbb{R}) / \widehat{A} = -A\}$

1)Montrer que C_n^+ et C_n^- sont supplémentaires.

2)Montrer que $M_n(\mathbb{R}) = (C_n^+ \cap S_n) \oplus (C_n^+ \cap A_n) \oplus (C_n^- \cap S_n) \oplus (C_n^- \cap A_n)$

Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve

A)3)Tester les produits J_nA, AJ_n, J_n, A, J_n et comparer avec $\widehat{A}$.

C)1)S'inspirer de la preuve de $M_n(\mathbb{R}) = S_n \oplus A_n$

BEOS 1743 PSI

Au rez de chaussée d'un immeuble à p étages, n personnes prennent l'ascenseur et s'arrêtent à un étage au hasard et de manière indépendante.

On note X la variable aléatoire qui donne le nombre d'arrêts de l'ascenseur.

1. Ecrire une fonction qui simule la variable aléatoire X.

On note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si l'ascenseur s'arrête à l'étage i, 0 sinon.

2. a. Donner la loi des X_i.

   b. Donner l'expression de X en fonction des X_i.

   c. Calculer l'espérance de X.

   d. Pour p variant de 3 à 20 et avec n=10, vérifier informatiquement le résultat précédent pour 1000 répétitions de l'expérience.

BEOS 1711 MP

Oral maths 2 (avec préparation). Durée : 30 min (de préparation) + 30 min (au tableau).

Soit $N \in \mathbb{N}$. On considère un sous-ensemble A de $I_N=[\![0, N]\!]$ défini par une liste L de booléens telle que $L[i] = True$ ssi $i \in A$.

1/ a) Ecrire une fonction Python qui prend en argument N, L_1 et L_2 deux listes de sous-ensembles X_1 et X_2 de I_N et qui renvoie une liste L des éléments somme d'un élément de X_1 et d'un élément de X_2.

b) En déduire sur Python une fonction qui renvoie pour $[\![0, 100]\!]$ la somme de 2 (resp. de 3 puis 4) carrés d'entiers.

2/ Soient $x, y, z, w, x', y', z', w'$ des entiers. On vérifie facilement que :

$$(x^2+y^2+z^2+w^2)\cdot(x'^2+y'^2+z'^2+w'^2) = (xx'+yy'+zz'+ww')^2+(xy'-x'y+zw'-w'z)^2+(xz'-x'z+yw'-w'y)^2+(xw'-w'x+yz'-zy')^2$$

Que peut-on en déduire ?

3/ On admet la propriété suivante :

Pour tout couple (a, b) de $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$, avec b impair,

il existe $a' \in \mathbb{Z}$ tel que : $|a'| < b/2$ et $a \equiv a'$ $[b]$.

Soit p un nombre premier impair. Soit $x \in \{0, 1, \ldots, (p-1)/2\}$.

Montrer que les classes d'équivalence de $1+x^2$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sont distinctes.

4/ En déduire l'existence de $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $1+x^2+y^2 \equiv 0$ $[p]$.

BEOS 1215 MP

On définit pour toute fonction φ continue sur [0,1] : $\| \varphi \|_\infty = sup_{x\in[0,1]} | \varphi(x) |$.

Soit f une fonction continue sur [0,1], $(X_n(x))_{n>0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la même loi de Bernouilli de paramètre x pour $x \in [0,1]$.

On définit pour tout n>0, $M_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k(x)$ et $B_n(x) = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k(1-x)^{n-k}$

1) Exprimer $E(M_n(x))$, $V(M_n(x))$ et justifier que $V(M_n(x)) \leq 1/4n$.

2) Exprimer $E(f(M_n(x)))$.

3) Cette question est à traiter à l'aide de Python:

   définir une fonction prenant en arguments une fonction f et un entier naturel n qui renvoie le graphe de $B_1, \ldots, B_n$ et de f sur le segment [0,1]. Tester cette fonction avec plusieurs fonctions et plusieurs valeurs de n.

   Indication: pour les coefficients binomiaux vous pourrez utiliser la fonction comb de la bibliothèque scipy.misc

BEOS 1193 PSI

Exercice 1 :

On sait que, pour tout $x \in]0,1[$, il existe une suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ telle que x s'écrive $x = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$ en base 10.

On définit f sur $[0,1]$ qui associe 0 à 0, 1 à 1 et, pour tout x de $]0,1[$ associe $0, a_2 a_1 a_3 \dots$.

1) Donner la représentation graphique de f.

2) f est-elle continue sur $[0,1]$?

3) f est-elle continue par morceaux sur $[0,1]$?

4) Donner une valeur approchée de $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 2 :

On définit g sur $]0,1]$telle que $g(x) = x^x$.

1) Trouver α réel tel que, en posant $g(0) = \alpha$, g soit continue sur $[0,1]$.

2) Donner la représentation graphique de g.

3) Expliciter l'allure de g en 0 et donner son minimum.

4) Donner une valeur approchée de $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$.

5) Trouver une suite (a_n) telle que $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ puis donner la valeur de $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$

<u>Indication(s) fournie(s) par l'examinateur pendant l'épreuve</u>

EX 1 - 1) et 2) : utiliser l'encadrement des parties entières sur $100x$.

EX 2 - 3) : utiliser une méthode d'approximation avec python

EX 2 - 4) : dérivabilité en 0 ?

EX 2 - 5) : DSE de e^z puis développement en séries de fonctions de $x^x = e^{x \ln x}$.

théorème d'intégration terme à terme puis expression par récurrence de $\int_0^1 x^\alpha ln^\beta x\,\mathrm{d}x$ pour trouver l'expression de $\int_0^1 x^i ln^i x\,\mathrm{d}x$