(1) $y'\ln x + \frac{y}{x} = 1 \iff (y\ln x)' = 1 \iff y\ln x = x + C \quad (C\in\mathbb{R})$

Donc SG sur $]0,1[$: $x \mapsto \frac{x+C_1}{\ln x} \quad (C_1\in\mathbb{R})$

sur $]1,+\infty[$ $x\mapsto \frac{x+C_2}{\ln x} \quad (C_2\in\mathbb{R})$

Recherche de solutions sur $]0,+\infty[$.

Analyse si f solution, on a $C_1, C_2\in\mathbb{R}$ tq

$\forall x\in]0,1[, \quad f(x) = \frac{x+C_1}{\ln x}$

$\forall x\in]1,+\infty[\quad f(x) = \frac{x+C_2}{\ln x}$

et (equation) $f(1) = 1$

Synthèse On fixe une telle fonction et on cherche une CNS sur C_1, C_2 pour que f soit dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et plus précisément au point 1.

CN : Comme $\lim_{x\to 1} \ln x = 0$, la continuité de f en 1 entraîne nécessairement $C_1 = C_2 = -1$.

CS : vérifions que $f : x \mapsto \begin{cases} \frac{x-1}{\ln x} & \text{si } x\neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1\end{cases}$ est dérivable en 1.

Méthodes de base. Rappel $\ln(1+h) = h - \frac{h^2}{2} + o(h^2)$ qd $h\to 0$

donc $\ln(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + o(x-1)^2$ si $x\to 1$.

(1) Tx d'accroissement :

$\forall x\neq 1, \quad \frac{\frac{x-1}{\ln x} - 1}{x-1} = \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} = \frac{(x-1)-\ln x}{(x-1)\ln x}$ (toujours réduire au dénom d'abord)

$\sim \frac{(x-1)^2/2}{(x-1)^2} \xrightarrow[x\to 1]{} 1/2$

donc f est dérivable (en 1) et $\underline{f'(1) = \frac{1}{2}}$

(2) Limite de la dérivée

$\forall x\neq 1 \quad f'(x) = \frac{x\ln x - (x-1)}{x(\ln x)^2} \overset{\text{poser } x = 1+h}{=} \frac{(1+h)(h - \frac{h^2}{2} + o(h^2)) - h}{(1+h)(\ln(1+h))^2}$

$= \frac{h^2 - h^2/2 + o(h^2)}{(1+h)(h^2 + o(h^2))} \sim 1/2$

Or f est C^0 en 1 (car $f(1+h) = \frac{h}{\ln(1+h)} \to 1$)

donc (Theorème de la LD) f est C^1 en 1 et $f'(1) = 1/2$

(3) Série entière. On a : $\ln(1+h) = \sum (-1)^{k+1} h^k/k$ pour $h\in]-1,1[$

donc $\forall x\in]0,2[\quad \frac{1}{f(x)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(x-1)^{k-1}}{k}$. $\frac{1}{f}$ est DSE, donc C^∞ sur $]0,2[$

donc $\underline{f \text{ est } C^\infty \text{ sur }]0,2[}$, (donc sur $\mathbb{R}_+^*$)

<u>Rq</u> ceci ne prouve pas que f est DSE sur $]0,2[$
(même si c'est vrai ici, ce n'est pas un résultat évident)
La méthode principale est ②, même si dans certains cas ① est plus rapide (comme ici) mais ne montre pas que f est C^∞ en 1.
<u>Conclusion</u> Unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$: $x \longmapsto \begin{cases} \frac{x-1}{\ln x} & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

---

② 1) EC : $r^2 - 2r - 3 = 0$
$\iff (r-3)(r+1) = 0$
donc SG de l'EH : $\boxed{x \longmapsto \lambda e^{3x} + \mu e^{-x}}$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$

2) $\begin{cases} y = z e^{3x} \quad (\iff z = y e^{-3x}) \\ y' = 3z e^{3x} + z' e^{3x} \\ y'' = 9z e^{3x} + 6z' e^{3x} + z'' e^{3x} \end{cases}$

$x \mapsto e^{3x}$ est une solution de (EH) qui ne s'annule pas
(Méthode de réduction de l'ordre)

donc $y'' - 2y' - 3y = \frac{e^{3x}}{(\operatorname{ch} x)^2} \iff 6z' e^{3x} + z'' e^{3x} - 2z' e^{3x} = \frac{e^{3x}}{(\operatorname{ch} x)^2}$

$\iff \boxed{z'' = -4z' + \frac{1}{(\operatorname{ch} x)^2}}$

$\iff \begin{cases} z' = \lambda e^{-4x} \text{ avec} \\ \lambda' e^{-4x} = \frac{1}{(\operatorname{ch} x)^2} \end{cases}$ (variation de la constante)

On révise les techniques d'intégration :

$\lambda' = \frac{4e^{4x}}{e^{2x}+2+e^{-2x}} \iff \lambda = \int_0^x \frac{4e^{4t}}{e^{2t}+2+e^{-2t}}\,dt + Cte$

changement de variable $u = e^{2t}$ $du = 2e^{2t}$

$\int_1^{e^{2x}} \frac{2u}{u+2+\frac{1}{u}}\,du = \int_1^{e^{2x}} \frac{2u^2}{u^2+2u+1}\,du = \int_1^{e^{2x}} \frac{2u^2}{(u+1)^2}\,du$

puis $u+1 = v$ $du = dv$

à ajouter à la constante.

$\dots = \int_2^{e^{2x}+1} \frac{2v^2-4v+2}{v^2}\,dv = 2(e^{2x}+1) - 4\ln(e^{2x}+1) - \frac{2}{e^{2x}+1} + Cte$

D'où $z' = 2e^{-2x} - 4(\ln(e^{2x}+1))e^{-4x} - \frac{2e^{-4x}}{e^{2x}+1} + \alpha e^{-4x}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Si on s'y prend mal, le reste du calcul est <u>très</u> pénible à la main et présente peu d'intérêt en PSI (décompositions en élts simples). L'astuce est de ne pas intégrer chaque terme séparément :

$$z = \int 2e^{-2x} - 4\ln(e^{2x}+1)e^{-4x} - \frac{2e^{-4x}}{(e^{2x}+1)} + \alpha e^{-4x}\,dx$$

ipp

$$= -e^{-2x} - \frac{\alpha}{4}e^{-4x} + e^{-4x}\ln(e^{2x}+1) - \int \underbrace{\frac{e^{-4x}\cdot 2e^{2x}}{e^{2x}+1} + \frac{2e^{-4x}}{e^{2x}+1}}_{=2e^{-4x}\ (!!)}\,dx$$

en réduisant au même dénom.

$$= -e^{-2x} - \frac{\alpha}{4}e^{-4x} + e^{-4x}\ln(e^{2x}+1) - \frac{e^{-4x}}{2} + Cte$$

Finalement, en rassemblant : $\lambda = -\frac{\alpha}{4} - \frac{1}{2}$ (donc λ est une constante qcq)

$\mu \in \mathbb{R}$.

$$z = e^{-4x}\ln(e^{2x}+1) - e^{-2x} + \lambda e^{-4x} + \mu$$

D'où la SG : $$y = \underbrace{e^{-x}\ln(e^{2x}+1) - e^{x}}_{SP} + \underbrace{\lambda e^{-x} + \mu e^{3x}}_{SGH}, \quad (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$$

---

(3) 1) (R!) Soit (a_n) suite réelle tq $R = R_{cv}\left(\sum a_n x^n\right) = +\infty$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

Analyse : S est solution de (E) ssi

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=1}^{\infty} 4a_n n(n-1)x^{n-1} + 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$

$\iff \sum_{n=0}^{\infty} \left(4a_{n+1}(n+1)n + 2(n+1)a_{n+1} - a_n\right)x^n = 0$

$\iff \forall n \in \mathbb{N}$, $2(n+1)(2n+1)a_{n+1} - a_n = 0$ (identification des coeffs, $R>0$)

$\iff \forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \frac{1}{(2n+2)(2n+1)}a_n$

$\iff$ (récurrence immédiate) $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{1}{(2n)!}a_0$

Synthèse : Soit donc $a_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{1}{(2n)!}a_0$.

Alors $R_{cv}\left(\sum a_n x^n\right) = +\infty$ puisque $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to+\infty} a_n x^n = 0$ (Abel)

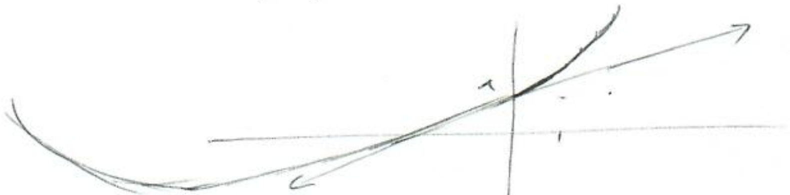
<u>Conclusion</u> : Les solutions DSE sur $\mathbb{R}$ sont de la forme $x \mapsto a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$ $(a_0 \in \mathbb{R})$

Calcul explicite de la somme

Si $x \geq 0$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{x})^{2n}}{(2n)!} = ch(\sqrt{x})$

si $x \leq 0$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(-x)^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(\sqrt{-x})^{2n}}{(2n)!} = \cos(\sqrt{-x})$

Allure (Rq $S(x) = 1 + x/2 + o(x)$, dc $S(0)=1$, $S'(0) = 1/2$)



2) On pose donc $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $z(t) = y(t^2)$ donc z ~~et~~ y sont de m̲ classe sur $\mathbb{R}_+^*$ (car $t \mapsto t^2$ C^∞)

On a donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$

$$y(x) = z(\sqrt{x})$$

$$y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} z'(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} x^{-1/2} z'(x^{1/2})$$

$$y''(x) = -\frac{1}{4} x^{-3/2} z'(\sqrt{x}) + \frac{1}{4x} z''(\sqrt{x})$$

d'où $4xy''(x) + 2y'(x) - y(x) = 0$

$$\iff -x^{-1/2} z'(\sqrt{x}) + z''(\sqrt{x}) + x^{-1/2} z'(\sqrt{x}) - z(\sqrt{x}) = 0$$

$$\iff z''(\sqrt{x}) - z(\sqrt{x}) = 0$$

Or $\forall x > 0$, $z''(\sqrt{x}) - z(\sqrt{x}) = 0 \iff \forall t > 0$ $z''(t) - z(t) = 0$.

$$\iff \forall t > 0\ \underline{z(t) = \alpha e^t + \beta e^{-t}}, \ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

On en déduit la SG sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$y : x \longmapsto \alpha e^{\sqrt{x}} + \beta e^{-\sqrt{x}} \qquad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

Rq $[x \mapsto e^{\sqrt{x}}]$ et $[x \mapsto e^{-\sqrt{x}}]$ forment une base de Vect$([x \mapsto ch\sqrt{x}], [x \mapsto sh\sqrt{x}])$

On peut donc écrire la solution :

$$\boxed{y : x \longmapsto A\, ch(\sqrt{x}) + B\, sh(\sqrt{x})}, \ (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

si $B = 0$, on reconnaît la solution DSE.

D'où

$$(E) \iff \overbrace{-z''(\sqrt{-x}) + (-x)^{-1/2} z'(\sqrt{-x})}^{4xy''(x)} - (-x)^{-1/2} z'(\sqrt{-x}) - z(\sqrt{-x}) = 0$$

$$\iff z''(\sqrt{-x}) + z(\sqrt{-x}) = 0 \quad (\forall x<0)$$

$$\iff z''(t) + z(t) = 0 \quad (\forall t>0)$$

$$\iff \boxed{z(t) = \alpha \cos t + \beta \sin t}, \quad (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$$

SG sur $\mathbb{R}_-^*$: $\boxed{y : x \longmapsto \underbrace{\alpha \cos(\sqrt{-x})}_{\text{DSE d'après 1.}} + \beta \sin(\sqrt{-x})}$ $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$

3. Soit f une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

D'après 2., f est de la forme : $x \longmapsto \begin{cases} A \operatorname{ch}\sqrt{x} + B \operatorname{sh}\sqrt{x} & \text{si } x>0 \\ \alpha\cos\sqrt{-x} + \beta\sin\sqrt{-x} & \text{si } x<0 \\ f(0) & (\text{si } x=0) \end{cases}$

avec $\alpha, \beta, A, B \in \mathbb{R}$

f est continue, donc $\lim\limits_{0^+} f = A = \lim\limits_{0^-} f = \alpha = f(0)$

Pour $x \geq 0$, $f(x) = A + B\sqrt{x} + o(\sqrt{x})$

donc f dérivable en $0 \Rightarrow B = 0$ et de m̂ $\beta = 0$.

On retrouve alors $\forall x\in\mathbb{R}$, $\boxed{f(x) = A\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!}}$

Conclusion Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les solutions DSE trouvées en 1.
Elles forment un sev de dimension 1 de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
Le théorème de Cauchy ne s'applique pas ici car (E) n'est pas résolue en y''.

---

(4) Analyse Soit f une solution.
• Par récurrence immédiate, on prouve que f est nécessairement C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$
(si f est k fois dérivable, alors aussi f' etc...)
• En particulier, $f''(x) = -1/x^2 \, f'(1/x) = -\frac{1}{x^2} f(x)$
donc f est solution de l'équation $\boxed{y'' = -\frac{1}{x^2} y}$ (1)

On pose le changement de variable : $x = e^t$
ie on définit : $\forall t\in\mathbb{R}$, $z(t) = y(e^t)$, càd $\forall x>0$, $y(x) = z(\ln x)$

D'où : $y'(x) = \frac{1}{x} z'(\ln x)$ $\quad y''(x) = -\frac{1}{x^2} z'(\ln x) + \frac{1}{x^2} z''(\ln x)$

(1) $\iff z''(\ln x) - z'(\ln x) + z(\ln x) = 0 \iff \boxed{\forall t\in\mathbb{R},\ z''(t) - z'(t) + z(t) = 0}$

EC : $r^2 - r + 1 = 0$ (sol° $r = -j, -j^2$, i.e $r = \frac{1}{2} \pm i\sqrt{3}/2$)

D'où $z(t) = e^{t/2}\left(A\cos(t\sqrt{3}/2) + B\sin(t\sqrt{3}/2)\right)$ $(A,B)\in\mathbb{R}^2$.

et donc $\forall x>0,\ y(x) = \sqrt{x}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)\right)$ $\quad (A,B)\in\mathbb{R}^2$

<u>Synthèse</u> On pose $f(x) = \sqrt{x}\left(A\cos\frac{\sqrt{3}}{2}(\ln x) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)\right)$ comme ci-dessus.

Alors
$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right) - B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)\right)$$
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(A\cos\frac{\sqrt{3}}{2}(\ln x) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)\right) + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}}\left(-A\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right) + B\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)\right)$$

D'ap le th de Cauchy, $x \mapsto \sqrt{x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)$ et $x \mapsto \sqrt{x}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)$ forment une famille libre, on peut donc identifier :

$$f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) \iff \begin{cases} A = \frac{1}{2}A + \frac{\sqrt{3}}{2}B \\ -B = \frac{1}{2}B - \frac{\sqrt{3}}{2}A \end{cases} \iff \boxed{A = \sqrt{3}B}$$

<u>Conclusion</u>
$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{ x \longmapsto \sqrt{x}\,B\left(\sqrt{3}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right) + \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)\right),\ B\in\mathbb{R}\right\}}$$

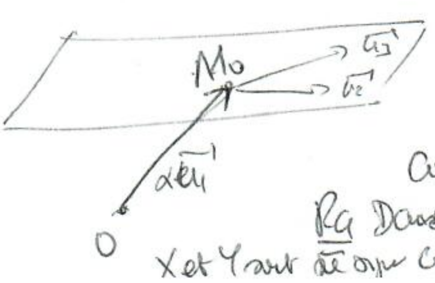
<u>Rq</u> $\sqrt{3}\cos\theta + \sin\theta = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos\theta + \sin\frac{\pi}{6}\sin\theta\right) = \frac{1}{2}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)$

donc $\mathcal{S} = \left\{ x \mapsto B\sqrt{x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x - \frac{\pi}{6}\right),\ B\in\mathbb{R}\right\}$

5) 1) On réduit A :
$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 & 0 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ 1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_1 - C_3}{=} \begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & -1 \\ 1-\lambda & -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix}$$
$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{=} (\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \underline{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}$$

χ_A est SRS donc A est DZ. Après calculs :
$$E_0(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad E_1(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad E_2(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

D'où <u>SG</u> : $X : t \mapsto \alpha\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}}_{\vec{u_1}} + \beta e^{t}\underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{u_2}} + \gamma e^{2t}\underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{u_3}}$



la courbe intégrale est incluse dans le plan contenant le point $\alpha(1,1,-3) = M_0$, de base $(\vec{u_2}, \vec{u_3})$

<u>Rq</u> Dans ce plan, coordonnées $X = \beta e^{t}$, $Y = \gamma e^{2t}$ donc $Y = \text{cte} \times X^2$: <u>arc de parabole</u>

X et Y sont de signe constant donc courbe dans un secteur de plan

(5).2) A est symétrique réelle donc DZ

$\chi_A(X) = (X-2)(X+2)(X+1)$

et $E_{-2}(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ $E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ $E_2(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$

<u>SG</u>: $X : t \longmapsto \alpha e^{-2t}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} + \beta e^{-t}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} + \gamma e^{2t}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$

<u>Cette courbe n'est pas plane</u>

En fait, on obtient une courbe plane, soit qd 0 est valeur propre,

soit qd une [illegible] propre est de dimension ≥ 2

Dans ces deux cas, on a :

$$X(t) = \alpha\vec{u_1} + \beta e^{\lambda t}\vec{u_2} + \gamma e^{\mu t}\vec{u_3} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

donc pour $\Omega_0 = \alpha\vec{u_1}$, $X(t) \in \mathrm{Plan}(\Omega_0, \vec{u_2}, \vec{u_3})$

ou $X(t) = \alpha e^{\lambda t}\vec{u_1} + \beta e^{\lambda t}\vec{u_2} + \gamma e^{\mu t}\vec{u_3}$ $(\lambda \neq \mu)$

$$= e^{\lambda t}\left(\alpha\vec{u_1} + \beta\vec{u_2}\right) + \mu e^{\mu t}\vec{u_3}$$

donc $X(t) \in \mathrm{Plan}\left(O, \alpha\vec{u_1} + \beta\vec{u_2}, \vec{u_3}\right)$

Dans les autres cas, p.ex $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 3 vaps distinctes et $\neq 0$,

on a, dans la base associée aux vecteurs propres :

$$\det\left(X'(t), X''(t), X'''(t)\right) = \begin{vmatrix} \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_1^2 e^{\lambda_1 t} & \lambda_1^3 e^{\lambda_1 t} \\ \lambda_2 e^{\lambda_2 t} & \lambda_2^2 e^{\lambda_2 t} & \lambda_2^3 e^{\lambda_2 t} \\ \lambda_3 e^{\lambda_3 t} & \lambda_3^2 e^{\lambda_3 t} & \lambda_3^3 e^{\lambda_3 t} \end{vmatrix}$$

$$= e^{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)t} \cdot \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \, \mathrm{VDM}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$$

$$= e^{(\mathrm{Tr} A)t} \cdot \det(A) \cdot \mathrm{VDM}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq 0$$

Si $t \mapsto X(t)$ est une courbe plane, alors $X'(t), X''(t), X'''(t)$

devraient être coplanaires pour tout $t \in \mathbb{R}$!

3. A est symétrique réelle donc DZ.

$E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $E_{-4}(A) = \mathrm{Vect}\left[\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right]$ par exemple

(<u>Rq</u> Comme $A \in S_3(\mathbb{R})$, ses espaces propres sont orthogonaux. Une fois trouvé $E_{-1}(A)$, et $\chi_A = (X+1)(X+4)^2$, on a $E_{-4}(A) = E_{-1}(A)^\perp$ donc d'équation $x+y+z=0$)

<u>SG</u> : $X : t \longmapsto \alpha e^{-t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + e^{-4t}\left[\beta\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right]$

Les courbes intégrales sont donc <u>planes</u> (cf remarque du 5.2).

Il est clair que les solutions de (1), (2) et (3) sont solutions du problème, on commence donc par résoudre ces équations :

(1) EC $r^2+r+1=0$ sol j, j^2 SG : $x \mapsto \alpha_1 e^{jx}+\beta_1 e^{j^2 x}$ $(\alpha_1,\beta_1)\in\mathbb{C}^2$

(2) EC $r^2+jr+j^2=0$ sol $1, j^2$ SG : $x \mapsto \alpha_2 e^{x}+\beta_2 e^{j^2 x}$ $(\alpha_2,\beta_2)\in\mathbb{C}^2$

(3) EC $r^2+j^2 r+j=0$ sol $1, j$ SG : $x \mapsto \alpha_3 e^{x}+\beta_3 e^{jx}$ $(\alpha_3,\beta_3)\in\mathbb{C}^2$

Question : peut-on passer d'une formule à l'autre ?

Soit f une solution et un intervalle I (non trivial) tel que $\forall x\in I,\ f(x)=\alpha_0 e^{\lambda x}+\beta_0 e^{\nu x}$ (on pose $\{\lambda,\mu,\nu\}=\{1,j,j^2\}$) $(\alpha_0,\beta_0)\in\mathbb{R}^2$ -

on a donc $f'(x)=\lambda\alpha_0 e^{\lambda x}+\nu\beta_0 e^{\nu x}$

$f''(x)=\lambda^2\alpha_0 e^{\lambda x}+\nu^2\beta_0 e^{\nu x}$.

- Si <u>en un point x_0</u> de I, f vérifie une des deux autres égalités ; par exemple $f''(x_0)-(\lambda+\mu)f'(x_0)+\lambda\mu f(x_0)=0$. (E')

Notons $P(X)=(X-\lambda)(X-\mu)=X^2-(\lambda+\mu)X+\lambda\mu$

Alors au point x_0 : $\alpha_0 \underbrace{P(\lambda)}_{=0} e^{\lambda x_0}+\beta_0 P(\nu)e^{\nu x_0}=0$

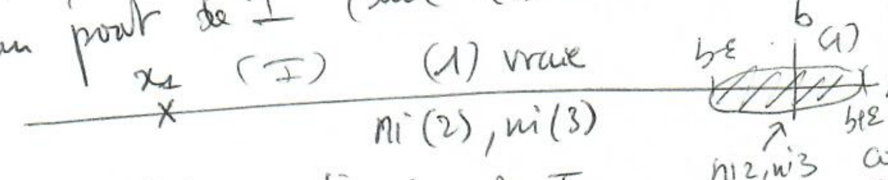
$\iff \beta_0 \underbrace{P(\nu)}_{\neq 0}\underbrace{e^{\nu x_0}}_{\neq 0}=0 \iff \boxed{\beta_0=0}$

donc en fait $\underline{\forall x\in I,\ f(x)=\alpha_0 e^{\lambda x}}$

et donc f est solution de l'autre équation (E') <u>sur tout l'intervalle I</u>

- Remarquons que si, en un point $x_0\in\mathbb{R}$, une égalité est fausse (p.ex : $f''(x_0)+f'(x_0)+f(x_0)\neq 0$) alors il existe $\varepsilon>0$ tq l'égalité <u>reste fausse</u> sur $]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[$: ceci vient de la <u>continuité</u> de f, f' et f'' (en x_0)

- Supposons qu'il existe un point $x_1\in\mathbb{R}$ tq p.ex (2) et (3) ne soient pas vérifiées en x_1. Par continuité, il existe un intervalle I non trivial, contenant x_1, tel que (2) et (3) ne soient vraies en aucun point de I (donc (1) est vraie sur I !)



<u>On choisit I le + grand possible</u> (p.ex. réunion des intervalles contenant x_1 et sur lesquels ni (2), ni (3))

Supposons I majoré, et notons <u>$b=\sup I$</u>

Par continuité au pt b, ($\forall x<b,\ f''(x)+f'(x)+f(x)=0 \Rightarrow f''(b)+f'(b)+f(b)=0$),

(1) est encore vraie en b. Si (2) ou (3) vraie en b, alors

5.4) $\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & 1 \\ -2 & \lambda-4 & 2 \\ -1 & 2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & -2 & 1 \\ 0 & \lambda-4 & 2 \\ \lambda-2 & 2 & \lambda-1 \end{vmatrix}$ $(C_1 \leftarrow C_1 + C_3)$

$= \begin{vmatrix} \lambda & -2 & 1 \\ -2\lambda & \lambda & 0 \\ \lambda-2 & 2 & \lambda-1 \end{vmatrix}$ $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$

$= \lambda \begin{vmatrix} \lambda & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ \lambda-2 & 2 & \lambda-1 \end{vmatrix}$

$= \lambda\left[\lambda(\lambda-1) + (\lambda-2)(-1) + 2(-2\lambda)\right]$ (Dév. 1ᵉ col.)

$= \lambda(\lambda^2 - 6\lambda + 2)$ $\qquad \Delta = 36 - 8 = 28 = (2\sqrt{7})^2$

$= \lambda(\lambda - 3 + \sqrt{7})(\lambda - 3 - \sqrt{7})$

$E_0(A) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\qquad E_{3-\sqrt{7}}(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} \sqrt{7}-2 \\ 2\sqrt{7}-4 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\qquad E_{3+\sqrt{7}}(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} -\sqrt{7}-2 \\ -2\sqrt{7}-4 \\ 3 \end{pmatrix}$

on obtient celui-ci en remplaçant $\sqrt{7}$ par $-\sqrt{7}$ car le choix de la racine carrée ($\sqrt{7}$ ou $-\sqrt{7}$) est arbitraire.

D'où S_{C_0} : $X : t \longmapsto \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta e^{(3-\sqrt{7})t} \begin{pmatrix} \sqrt{7}-2 \\ 2\sqrt{7}-4 \\ 3 \end{pmatrix} + \gamma e^{(3+\sqrt{7})t} \begin{pmatrix} -\sqrt{7}-2 \\ 2\sqrt{7}-4 \\ 3 \end{pmatrix}$

(Courbe plane car $0 \in Sp(A)$.)

(6) On doit résoudre : $\begin{vmatrix} y'' & y' & y \\ y & y'' & y' \\ y' & y & y'' \end{vmatrix} = 0$ en cherchant des solutions $\underline{C^2}$ sur $\mathbb{R}$

(le problème devient bien difficile si on ne suppose pas des solutions C^2 a priori)

On reconnaît une matrice circulante, on pose $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (p. ex.)

or $A = \begin{pmatrix} y'' & y' & y \\ y & y'' & y' \\ y' & y & y'' \end{pmatrix} = y'' I + y' J + y J^2$.

$J^3 = I$ donc $X^3 - 1$ est annulateur SRS sur $\mathbb{C}$ (⚠ pas sur $\mathbb{R}$!!) donc DZ sur $\mathbb{C}$. J est semblable à $\mathrm{diag}(1, j, j^2)$, donc

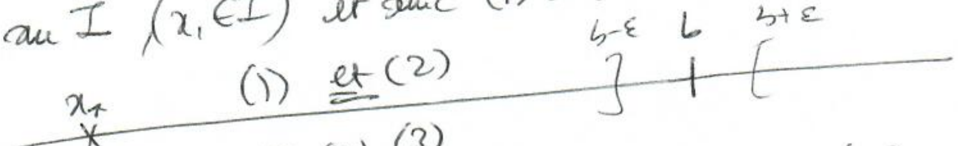
$\det(A) = \boxed{(y'' + y' + y)(y'' + j y' + j^2 y)(y'' + j^2 y' + j y)}$

On considère les équadiffs (1) $\underline{y'' + y' + y = 0}$ $\quad$ (2) $\underline{y'' + j y' + j^2 y = 0}$ $\quad$ (3) $\underline{y'' + j^2 y' + j y = 0}$

On aurait (2) ou (3) sur tout I (démontré + haut), contradiction.
donc ni (2), ni (3) ne sont vrais en b, mais alors (2) et (3) seraient fausses et
(1) serait vraie sur $]b-\varepsilon, b+\varepsilon[$ pour un certain $\varepsilon > 0$,
ce qui contredit $b = \sup I$!!
Donc I n'est pas majoré, ni (de même) minoré, donc $\underline{I = \mathbb{R}}$

- Supposons maintenant qu'en tout point, f vérifie au moins 2 égalités.

Soit $x_1 \in \mathbb{R}$ tq (3) non vraie en x_1.
Il existe donc I intervalle non trivial, le plus grand possible tq
(3) non vraie sur I ($x_1 \in I$) et donc (1) et (2) sont vraies sur tout I



On suppose $b = \sup I$
Par continuité, (1) et (2) sont encore vraies en b, donc (3) est fausse
(si 3 vraie en b, alors (3) vraie sur $I \cup \{b\}$ comme on a démontré).
Mais alors (3) reste fausse sur un intervalle $]b-\varepsilon, b+\varepsilon[$, donc I n'est pas
le plus grand possible ! Contrad:
On en déduit comme ci-dessus $I = \mathbb{R}$.

Finalement : on constate que les seules solutions sont les solutions
"pures" de (1), (2), (3) sur $\mathbb{R}$.

$\mathcal{S} = \{x \mapsto \alpha_1 e^{jx} + \beta_1 e^{j^2x}, (\alpha_1, \beta_1) \in \mathbb{C}^2\} \cup \{x \mapsto \alpha_2 e^{x} + \beta_2 e^{j^2x}, (\alpha_2, \beta_2) \in \mathbb{C}^2\}$

$\cup \{x \mapsto \alpha_3 e^{x} + \beta_3 e^{jx}, (\alpha_3, \beta_3) \in \mathbb{C}^2\}$

⚠ Faire attention à bien noter les ensembles de solutions

$\{\alpha_1 e^{jx} + \beta e^{j^2x}, (\alpha_1, \beta_1) \in \mathbb{C}^2\} \to$ NON ! ($\subset \mathbb{R}$?)

$\{x \mapsto \alpha_1 e^{jx} + \beta_1 e^{j^2x}\}, (\alpha_1, \beta_1) \in \mathbb{C}^2 \to$ NON ! (famille de singletons ?)

---

(7) 1. Sur $]-\infty, 1[$:

$\left\{\begin{array}{l}(E) \\ y(0)=0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} y' = \dfrac{-1}{2(x-1)} y + \dfrac{\sin(2x) + x^2}{2(x-1)} \\ y(0) = 0.\end{array}\right.$

Les coefficients sont continus sur $]-\infty, 1[$, l'équation est résolue
en y', donc d'ap le th de Cauchy, le pb (de Cauchy) admet une solution
et une seule.

(7).2 On a $\forall x \in]-\infty, 1[$,

$$f'(x) = -\frac{1}{2(x-1)} f(x) + \frac{\sin(2x)+x^2}{2(x-1)}$$

Par récurrence, on montre que f est C^∞ sur $]-\infty, 1[$, donc admet un DL en 0 à l'ordre 4 :

$$f(x) = \underbrace{f(0)}_{=0} + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + o(x^4)$$

On a donc $2(x-1)\left(a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + o(x^3)\right) + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + o(x^4)$

$$= 2x - \frac{4}{3}x^3 + o(x^3) + x^2$$

l'ordre 3 va l'emporter

$$\iff 2a_1 x + 4a_2 x^2 + 6a_3 x^3 - 2a_1 - 4a_2 x - 6a_3 x^2 - 8a_4 x^3 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$
$$= 2x + x^2 - 4/3\, x^3 + o(x^3)$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} -2a_1 = 0 \\ 2a_1 - 4a_2 + a_1 = 2 \\ 4a_2 - 6a_3 + a_2 = 1 \\ 6a_3 - 8a_4 + a_3 = -4/3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} a_1 = 0 \\ a_2 = -1/2 \\ a_3 = -\frac{5}{12} \\ a_4 = \frac{-19}{96} \end{array}\right.$$

Conc $\boxed{f(x) = -x^2/2 - 5/12\, x^3 - \frac{19}{96}x^4 + o(x^4)}$

(8) 1) Le principe est qu'on veut écrire $z(t) = y(x)$

On $t = 1-x^2 \iff x = \sqrt{1-t}$ ($t \mapsto \sqrt{1-t}$ est bijective de $]0,1[$ sur $]0,1[$)

On pose donc $z(t) = y(\sqrt{1-t})$ ce qui définit une fonction inconnue de même classe que y, donc

$$\left|\begin{array}{l} y(x) = z(1-x^2) \\ y'(x) = -2x\, z'(1-x^2) \\ y''(x) = -2z'(1-x^2) + 4x^2 z''(1-x^2) \end{array}\right.$$

$$(E) \iff \cancel{-2x z'(1-x^2)} + 4x^3 z''(1-x^2) + \cancel{2x z'(1-x^2)} - 4x^3 z(1-x^2) = 0$$

$$\iff z''(1-x^2) - z(1-x^2) = 0 \quad (\forall x \in]0,1[)$$

d'où déjà $z(t) = \alpha e^t + \beta e^{-t}$

$$\iff \forall t \in]0,1[, \ z''(t) - z(t) = 0$$

D'où

$\boxed{SG \quad y(x) = \alpha e^{1-x^2} + \beta e^{-1+x^2}}$ $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$

Rq on peut écrire $\boxed{y(x) = Ae^{-x^2} + Be^{x^2}}$

(8) 2. Notons $f : x \longmapsto -y(-x)$

donc $\begin{cases} f(x) = -y(-x) \\ f'(x) = y'(-x) \\ f''(x) = -y''(-x) \end{cases}$ $\quad f$ C^2 sur $]-1,0[\iff y$ C^2 sur $]0,1[$

f solution de (E) sur $]-1,0[\iff \forall x \in]-1,0[,$
$$x f''(x) - f'(x) - 4x^3 f(x) = 0$$

$\iff \forall x \in]-1,0[, \quad -x y''(-x) - y'(-x) + 4x^3 y(-x) = 0$

$\iff \forall t \in]0,1[$ (poser $x=-t$) $\quad t y''(t) - y'(t) - 4t^3 y(t) = 0$

$\iff$ y solution de (E) sur $]0,1[$, cqfd.

3. Soit g une solution sur $]-1,1[$. Elle est nécessairement sous la forme :
$$g : x \longmapsto \begin{cases} A e^{-x^2} + B e^{x^2}, \ (A,B) \in \mathbb{R}^2 \ \text{(sol° sur }]0,1[) \ \underline{\text{sur }]0,1[} \\ \alpha e^{-x^2} + \beta e^{x^2}, \ (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \ (\text{cf Q. 2}) \ \underline{\text{sur }]-1,0[} \\ g(0) \quad \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Concrètement, il faut donner une CNS pour qu'une telle fonction soit C^2 en 0.

- g C^0 en 0 $\iff$ $\underline{\alpha + \beta = A + B = g(0)}$ ($x \mapsto e^{x^2}$ et $x \mapsto e^{-x^2}$ paires)
- si g est C^0, g est C^1 en 0

$\forall x \in]0,1[, \quad g''(x) = A(-2e^{-x^2} + 4x^2 e^{-x^2}) + B(2e^{+x^2} + 4x^2 e^{x^2})$

donc (si g C^0), g C^2 en 0 $\iff$ $-2A + 2B = -2\alpha + 2\beta$

Or $\begin{cases} A + B = \alpha + \beta \\ A - B = \alpha - \beta \end{cases} \iff \begin{cases} A = \alpha \\ B = \beta \end{cases}$

donc g est C^2 sur $]-1,1[$ ssi g est de la forme $x \longmapsto A e^{x^2} + B e^{-x^2}$ sur $]-1,1[$.

Ccl° $\boxed{\mathcal{S} = \{ x \longmapsto A e^{x^2} + B e^{-x^2}, \ (A,B) \in \mathbb{R}^2 \}}$

(9) Si $\alpha \notin \mathbb{N}$, les fonctions ($x \mapsto x^\alpha$) ne sont définies que sur $\mathbb{R}_+^*$.
On va donc chercher plutôt des solutions de la forme $f : x \mapsto x^\alpha$
f est C^∞ sur $\mathbb{R}$, $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$, $f''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$ (abus de notation, bien sûr). A l'écrit, être attentif : par ex. $f'(x) = 0$ si $\alpha = 0$, « abus de notation si $\alpha \leq 1$ »

$\forall x \in \mathbb{R}$ $x^2 f''(x) - 2x f'(x) + 2f(x) = 0$

$\iff \alpha(\alpha-1)x^\alpha - 2\alpha x^\alpha + 2x^\alpha = 0$ $(\forall x \in \mathbb{R})$

$\iff \alpha(\alpha-1) - 2\alpha + 2 = 0 \iff (\alpha-2)(\alpha-1) = 0.$

On a donc deux solutions indépendantes $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$

2. A cause du coeff x^2, l'équation n'est pas résolue en x^2, le théorème de Cauchy ne s'applique que sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$.

Toute solution est de la forme $f : x \mapsto \begin{cases} \alpha x + \beta x^2 & \text{si } x > 0 \\ A x + B x^2 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \text{ (équation)}. \end{cases}$

Réciproquement, une telle fonction est solution $\mathbb{R}$ si elle est deux fois dérivable en 0 (elle est C^∞ sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$)

f C^0 en 0 : immédiat.

$\forall x > 0$, $f'(x) = \alpha + 2\beta x$ donc f C^1 en $0 \iff \underline{\alpha = A}$. (On suppose $\alpha = A$).

$\forall x > 0$, $f''(x) = 2\beta$ donc (limite de la dérivée de f')

f deux fois dérivable en $0 \iff \underline{2\beta = 2B}$.

L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ est donc

$\{x \mapsto Ax + Bx^2, \ (A,B) \in \mathbb{R}^2\}$,

sev, de base $([x \mapsto x^2], [x \mapsto x])$, de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

(10) On écrit $(E) \iff y' = \dfrac{\sin x}{\cos x} y - (\cos x)^2$

On pose $a(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ $A(x) = -\ln(\cos x)$

d'où $(E) \iff \begin{cases} y = \dfrac{\lambda}{\cos x} \\ \dfrac{\lambda'}{\cos x} = -(\cos x)^2 \end{cases}$ (variation de la constante)

$\lambda' = -(\cos x)^3 = -(\cos x)(1 - \sin^2 x) = -\cos x + (\cos x)\sin^2 x$

donc $\lambda = \sin x - \dfrac{\sin^3 x}{3} + C$ $(C \in \mathbb{R})$

D'où $\underline{SG}$ $\boxed{y = \dfrac{\sin x}{\cos x} - \dfrac{\sin^3 x}{3\cos x} + \dfrac{C}{\cos x}, \ (C \in \mathbb{R})}$

(11) Par récurrence, on mq f est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = -f'(a-x) = -f(x)$ donc f est de la

forme : $f(x) = Ae^{x} + Be^{-x}$ (solution de $y + y'' = 0$)

Synthèse $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(a-x)$

$$\Leftrightarrow Ae^{x} - Be^{-x} = Ae^{a-x} + Be^{-a+x} \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = Be^{-a} \\ -B = Ae^{a} \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{A = B = 0}$$

Donc la fonction nulle est la seule solution.

(12) On résout sur $]k\pi, (k+1)\pi[$ $(k \in \{0, 1, 2, 3\})$

$$(E) \Leftrightarrow y' = \frac{2\cos x}{(\sin x)^3}\, y$$

On pose $a(x) = \dfrac{2\cos x}{(\sin x)^3}$ $\qquad A(x) = \dfrac{-1}{(\sin x)^2}$

d'où $(E) \Leftrightarrow \boxed{y = \lambda_k \exp\left(\dfrac{-1}{(\sin x)^2}\right)}$ $(\lambda_k \in \mathbb{R})$.

On remarque $\lim\limits_{x \to k\pi} \exp\left(-\dfrac{1}{\sin^2(x)}\right) = 0$.

CN : Sur $[0, 4\pi]$, les solutions sont donc de la forme :

$$f : x \mapsto \begin{cases} \lambda_k \exp\left(\dfrac{-1}{(\sin x)^2}\right) & \text{si } x \in]k\pi, (k+1)\pi[\quad (k \in \{0, 1, 2, 3\}) \\ 0 & \text{si } x = k\pi \quad (k \in [\![0, 4]\!]) \end{cases} \qquad \lambda_0, \dots, \lambda_3 \in \mathbb{R}$$

CS ? f est clairement C^0 sur $[0, 4\pi]$

$\forall x \in]k\pi, (k+1)\pi[$, $f'(x) = \lambda_k \cdot \dfrac{2\cos x}{(\sin x)^3} \exp\left(-\dfrac{1}{(\sin x)^2}\right) \xrightarrow[x \to k\pi \text{ ou } (k+1)\pi]{} 0$

par croissance comparée (considérer $\ln |f'(x)| \dots$)

donc (th de la limite de la dérivée) f est C^1 en $k\pi$, $k \in [\![0, 4]\!]$,

donc sur $[0, 4\pi]$

Conclusion : On pose $f_k : x \mapsto \begin{cases} \exp\left(\dfrac{-1}{(\sin x)^2}\right) & \text{si } x \in]k\pi, (k+1)\pi[\\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Alors $\boxed{\mathcal{S} = \mathrm{Vect}(f_0, f_1, f_2, f_3)}$

Rq L'équation est d'ordre 1 et l'espace des solutions est de dimension 4. En effet, les hypothèses du th de Cauchy ne sont pas vérifiées sur $[0, 4\pi]$.

(13) Soit g une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ (g est clairement C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$)

et $\forall x>0$, on pose $f(x) = e^{-x}g(x)$, donc $g(x) = e^x f(x)$.

f est également C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Rq L'équation sans second membre est $y'' - 2y' + y = 0$,

EC : $r^2 - 2r + 1 = 0 \iff (r-1)^2 = 0$, donc SGH : $y = (Ax+B)e^x$.

$x \mapsto e^x$ est une solution particulière de l'EH qui donne par ,

il s'agit ici d'une méthode de réduction de l'ordre.

$$g(x) = e^x f(x)$$
$$g'(x) = e^x(f(x) + f'(x))$$
$$g''(x) = e^x(f(x) + 2f'(x) + f''(x))$$

donc $\quad e^x f''(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \quad$ (g sol° de (E))

$$\iff \boxed{f''(x) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}}$$

d'où $\boxed{f'(x) = C_1 + \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt}$

licite car $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$ est L^1 sur $\mathbb{R}_+^*$: C^0 sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$\dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ donc $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$ est L^1 en 0 par comparaison à une intégrale de Riemann.

Comme $x \mapsto \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt$ est C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$, avec un prolongement par continuité en 0 ;

$$\boxed{f(x) = C_0 + C_1 x + \int_0^x \left(\int_0^t \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,du\right) dt}$$

et donc $\quad g(x) = C_0 e^x + C_1 x e^x + e^x \int_0^x \left(\int_0^t \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,du\right) dx$.

or $\quad g'(x) = e^x(f(x) + f'(x))$

donc $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = C_0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} g'(x) = C_0 + C_1$

les conditions demandées imposent $C_0 = C_1 = 0$ d'où en prolongeant par continuité : $g(0) = 0$ et

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x) = e^x \int_0^x \left(\int_0^t \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,du\right) dt \overset{\text{ipp}}{=} \left(\left[t \int_0^t \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,du\right]_0^x - \int_0^x t\,\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt\right) e^x$

$$= \boxed{x e^x \int_0^x \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,du - e^x \int_0^x e^{-t}\sqrt{t}\,dt}$$

(14) On transforme l'équation scalaire en système différentiel d'ordre 1, en posant $y_k = y^{(k)}$ (donc $y_k = y_{k-1}'$)

d'où

$$y^{(n)} = y \iff \underbrace{\begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ \vdots \\ y^{(n)} \end{pmatrix}}_{Y'} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}}_{Y}$$

On constate $A^n = I_n$ donc A DZ sur $\mathbb{C}$

Calcul des vecteurs propres :

$$\left\{\begin{array}{l} x_2 = \lambda x_1 \\ x_3 = \lambda x_2 \\ \vdots \\ x_n = \lambda x_{n-1} \\ x_1 = \lambda x_n \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x_2 = \lambda x_1 \\ x_3 = \lambda^2 x_1 \\ \vdots \\ x_n = \lambda^{n-1} x_1 \\ (1-\lambda^n) x_n = 0 \end{array}\right.$$

D'où $Sp(A) = \{ e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in [\![0, n-1]\!] \}$. Notons $\zeta = e^{2i\pi/n}$

et $E_{\zeta^k} = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ \zeta^k \\ \vdots \\ \zeta^{k(n-1)} \end{pmatrix}$

La solution du système différentiel réduit

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} = Y = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k e^{\zeta^k t} \begin{pmatrix} 1 \\ \zeta^k \\ \vdots \\ \zeta^{k(n-1)} \end{pmatrix} \qquad (\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$$

donc celle de l'équation

$$SG : \boxed{y = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k e^{\zeta^k t}} \qquad (\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{C}^n.$$

---

(15) On écrit le système : $X' = AX + B(t)$ avec $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 7 \\ 3 & -2 & -6 \\ -4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ $B(t) = \begin{pmatrix} -4e^{-t} \\ 3e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}$

<u>On réduit A</u> :

$C_1 \leftarrow C_1 - C_2 + C_3$

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda+4 & -2 & -7 \\ -3 & \lambda+2 & +6 \\ 4 & 2 & \lambda-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -7 \\ 1-\lambda & \lambda+2 & 6 \\ \lambda-1 & 2 & \lambda-3 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1) \begin{vmatrix} 1 & -2 & -7 \\ -1 & \lambda+2 & 6 \\ 1 & 2 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-1) \begin{vmatrix} 1 & -2 & -7 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 4 & \lambda+4 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda^2+4\lambda+4) = \boxed{(\lambda-1)(\lambda+2)^2}$$

On calcule $E_1(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $E_2(A) = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

A n'est que trigonalisable

On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ← complété arbitrairement (sous réserve que P soit inversible)

On résout $\begin{cases} x+4y=a \\ -x-3y=b \\ x+2y+z=c \end{cases}$ pour trouver $P^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Notons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $X = PY$.

On a : $X' = AX + B \quad (1)$

$\Leftrightarrow P\cancel{Y}' = APY + B$

$\Leftrightarrow Y' = (P^{-1}AP)\,Y + P^{-1}B \quad (2)$

Ici $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $P^{-1}B = e^{-t}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

On résout (2) : $\begin{cases} y_1' = y_1 + 3y_3 \ (+0) & (E_1) \\ y_2' = -2y_2 + y_3 - e^{-t} & (E_2) \\ y_3' = -2y_3 + 2e^{-t} & (E_3) \end{cases}$

On remonte dans le système triangulaire :

- $(E_3) \Leftrightarrow \begin{cases} y_3 = \lambda e^{-2t} \\ \lambda' e^{-2t} = 2e^{-t} \Leftrightarrow \lambda' = 2e^{t} \Leftrightarrow \lambda = 2e^{t} + \gamma \end{cases}$

$\Leftrightarrow y_3 = (2e^{t}+\gamma)\,e^{-2t} = 2e^{-t} + \gamma e^{-2t} \quad (\gamma \in \mathbb{R})$

- $(E_2) \Leftrightarrow y_2' = -2y_2 + \gamma e^{-2t} + e^{-t}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y_2 = \lambda e^{-2t} \\ \lambda' e^{-2t} = \gamma e^{-2t} + e^{-t} \Leftrightarrow \lambda' = \gamma + e^{t} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \lambda = \gamma t + \beta + e^{t}$

$\Leftrightarrow y_2 = (\gamma t + \beta)e^{-2t} + e^{-t}$

$(E_1) \Leftrightarrow y_1' = y_1 + 6e^{-t} + 3\gamma e^{-2t}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = \lambda e^{t} \\ \lambda' e^{t} = 6e^{-t} + 3\gamma e^{-2t} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = \lambda e^{t} \\ \lambda' = 6e^{-2t} + 3\gamma e^{-3t} \end{cases}$

$\Leftrightarrow y_1 = e^{t}\left(-3e^{-2t} \cancel{+} - \gamma e^{-3t} + \alpha\right)$

$= \alpha \cancel{e^t} - 3e^{-t} - \gamma e^{-2t}$

Finalement, la solution générale de (2) s'écrit :

$$Y : t \mapsto \alpha e^{t}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \beta e^{-2t}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \gamma e^{2t}\begin{pmatrix}-1\\t\\1\end{pmatrix} + e^{-t}\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}$$

correspond aux vecteurs propres

D'où la SG de (1) :
$(X = PY)$

$$\boxed{X : t \mapsto \alpha e^{t}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} + \beta e^{-2t}\begin{pmatrix}4\\-3\\2\end{pmatrix} + \gamma e^{2t}\begin{pmatrix}-1+4t\\1-3t\\2t\end{pmatrix} + e^{-t}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}$$

(16) 1. Raisonnement "à la Cesàro". Soit $\varepsilon > 0$.

Soit $A \geq 0$ tq $\forall t \geq A$, $|u(t) - \ell| \leq \varepsilon$

Alors
$$\left| \frac{\int_0^x e^t u(t)\,dt - \int_0^x \ell e^t\,dt}{\int_0^x e^t\,dt} \right| \leq \underbrace{\frac{\overbrace{\int_0^A |u(t)-\ell| e^t\,dt}^{\text{constante}}}{\underbrace{\int_0^x e^t\,dt}_{\to +\infty}}}_{\substack{\text{ceci} \to 0 \\ \text{donc } \leq \varepsilon \text{ pour} \\ x \text{ assez gd.}}} + \underbrace{\frac{\varepsilon \int_A^x e^t\,dt}{\int_0^x e^t\,dt}}_{\leq \varepsilon}$$

$\leq 2\varepsilon$ pour x assez gd.

d'où $\displaystyle\int_0^x e^t u(t)\,dt \underset{+\infty}{\sim} \ell \int_0^x e^t\,dt$

$$= \ell(e^x - 1) \underset{+\infty}{\sim} \ell e^x, \text{ cqfd.}$$

2. On pose $f + f' = u$.

On résout l'équa diff $(*)$ $y' + y = u$ (donc $y' = -y + u$.)

$$(*) \iff \begin{cases} y = \lambda e^{-x} \\ \lambda' e^{-x} = u(x) \end{cases} \iff \begin{cases} y = \lambda e^{-x} \\ \lambda = \int_0^x u(t) e^t\,dt + C \end{cases}$$

On en déduit
$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) = \underbrace{e^{-x} \underbrace{\int_0^x u(t) e^t\,dt}_{\sim \ell e^x}}_{\to \ell} + \underbrace{Ce^{-x}}_{\to 0}.$$

donc $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell}$. Comme $\lim_{x\to+\infty} u(x) = \ell$, on a $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0}$

(et $u = f + f'$)

(17) 1. Soit (a_n) suite de tq $R_{cv}\left(\sum a_n x^n\right) = R > 0$

Pour $|x| < R$, on note $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

S est solution de (E) ssi

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} 3n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) n\, a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 3n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \quad \underbrace{(n(n-1) + 3n + 1)}_{=(n+1)^2} a_n - n(n+1) a_{n+1} = 0$ (rayon >0 donc on peut identifier les coefficients)

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+1) a_n - n a_{n+1} = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \frac{a_n}{n} = \frac{a_{n+1}}{n} \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ a_n = \lambda n}$ (pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$)

Synthèse $R_{cv}\left(\sum n x^n\right) = 1$ donc on a trouvé les solutions

DSE sur $]-1,1[$ $\quad x \longmapsto \lambda \sum_{n=0}^{\infty} n x^n = \frac{\lambda x}{(1-x)^2}$

2. $\varphi : x \mapsto \frac{x}{(1-x)^2}$ n'est DSE que sur $]-1,1[$.

Néanmoins, elle est C^∞ sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ et puisqu'elle vérifie (E) sur $]-1,1[$, il est clair qu'elle est solution sur les trois intervalles acceptables $]-\infty,0[$, $]0,1[$ et $]1,+\infty[$, (où elle reste $\neq 0$)

3. Notons $I =]-\infty,0[$ ou $]0,1[$ ou $]1,+\infty[$.

φ est C^∞ sur I. Si f est C^2 sur I, on pose $z = \frac{1}{\varphi} f$.

Alors z est C^2 sur I

On a
$$f = z\varphi$$
$$f' = z\varphi' + z'\varphi$$
$$f'' = z\varphi'' + 2z'\varphi' + z''\varphi$$

donc f est solution de (E) ssi (Réduction de l'ordre!)

$\forall x \in I \quad x(x-1)\left[2z'(x)\varphi'(x) + z''(x)\varphi(x)\right] + 3x z'(x)\varphi(x) = 0 \quad (3)$

(la partie avec z disparaît car φ est solution de (E))

On a $\varphi'(x) = \dfrac{1+x}{(1-x)^3}$ donc $\dfrac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \dfrac{1+\frac{1}{x}}{(1-x)}$

$$(3) \Leftrightarrow \quad x(x-1)\left[2\frac{(1+\frac{1}{x})}{(1-x)}z' + z''\right] + 3xz' = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -2(x+1)z' + x(x-1)z'' + 3xz' = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x-2)z' + x(x-1)z'' = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad z'' = \frac{-(x-2)}{x(x-1)}z' \quad \text{or} \quad \frac{x-2}{x(x-1)} = \frac{2}{x} - \frac{1}{x-1}$$

On pose $a(x) = -\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x-1}$ $\quad A(x) = -2\ln|x| + \ln|x-1|$

D'où $z' = \lambda\left(\dfrac{x-1}{x^2}\right)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (les valeurs absolues ne sont pas necessaires car les signes sont constants sur I en calcul de λ arbitraire).

$$= \lambda\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$$

et $\boxed{z = \lambda \ln|x| + \dfrac{\lambda}{x} + \mu}$ $\quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

4. Conclusion SCo sur chaque intervalle acceptable :

$$\boxed{f : x \longmapsto \lambda\left(\frac{x\ln|x|}{(1-x)^2} + \frac{1}{(1-x)^2}\right) + \mu\frac{x}{(1-x)^2}}$$

Recollement en 0 $\quad \lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lambda$

cependant le prolongement n'est derivable en 0 que si $\lambda = 0$ car le prolongement de $x \mapsto x\ln|x|$ par continuité n'est pas dérivable.

On suppose donc $\lambda = 0$ et $f : x \mapsto \begin{cases} \mu_1 \dfrac{x}{(1-x)^2} & \text{sur }]1, +\infty[\\ \mu_2 \dfrac{x}{(1-x)^2} & \text{sur }]-\infty, 1[\end{cases}$

La continuité de f impose $\mu_1 = \mu_2 = 0$

Conclusion La fonction nulle est la seule solution sur $\mathbb{R}$.

(18) Soit $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tq $R_{cv}(\sum a_n x^n) = R > 0$.

On note, pour $|x| < R$, $S(x) = \sum_{n\geq 0}^{\infty} a_n x^n$.

S est solution de (E) sur $]-R, R[$ ssi

$$\sum_{n\geq 2}^{\infty} 2n(n-1) a_n x^{n-1} + \sum_{n\geq 1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n\geq 0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n\geq 1}^{\infty} 2(n+1)n\, a_{n+1} x^n + \sum_{n\geq 0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n\geq 0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \quad 2n(n+1) a_{n+1} + (n+1) a_{n+1} - a_n = 0$

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)(2n+1)} a_n = \dfrac{2}{(2n+2)(2n+1)} a_n$.

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \dfrac{1}{(2n)!} 2^n a_0$.

Synthèse $R\left(\sum_{n\geq 0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} 2^n x^n\right) = \infty$ (d'Alembert)

donc les solutions DSE sur $\mathbb{R}$ sont $\boxed{x \longmapsto \lambda \sum_{n\geq 0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{(2n)!}, \ \lambda \in \mathbb{R}}$

(19) CN Si f est solution, alors

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x f(x) = x + x \int_0^x t f(t)\, dt$.

Posons $F(x) = \int_0^x t f(t)\, dt$. Alors F est solution de $y' = xy + x$

SGH $y_H : x \mapsto \lambda e^{x^2/2}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ SP évidente $y = -1$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = -1 + \lambda e^{x^2/2}$, $(\lambda \in \mathbb{R})$

En dérivant, il vient $x f(x) = \lambda x e^{x^2/2}$

donc f est de la forme $x \longmapsto \begin{cases} \alpha e^{x^2/2} & \text{si } x > 0 \\ f(0) & \\ \beta e^{x^2/2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

f doit être continue donc avec $\alpha = \beta = f(0)$

D'où $\boxed{f : x \mapsto \lambda e^{x^2/2}, \ \lambda \in \mathbb{R}}$ C'est une CN

Est-ce suffisant ?

Si $f : x \mapsto \lambda e^{x^2/2}$

alors $\int_0^x t f(t)\,dt = \int_0^x \lambda t e^{t^2/2}\,dt = \left[\lambda e^{t^2/2}\right]_0^x = \lambda e^{x^2/2} - \lambda$.

$f(x) = 1 + \int_0^x t f(t)\,dt \iff \lambda e^{x^2/2} = 1 + \lambda e^{x^2/2} - \lambda \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\iff \boxed{\lambda = 1}$

Conc la (seule) solution est $\boxed{f : \underset{\mathbb{R} \to \mathbb{R}}{x \mapsto e^{x^2/2}}}$

(20) On résout $y' + ay = b \iff y' = -ay + b$

Notons A une primitive de a :

Variation de la constante $\begin{cases} y = \lambda e^{-A} \\ \lambda' e^{-A} = b \end{cases} \iff \begin{array}{l} y = \lambda e^{-A} \\ \lambda = C_0 + \int_0^x b(t) e^{A(t)}\,dt \end{array}$

D'où $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = C_0 e^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int_0^x b(t) e^{A(t)}\,dt}$ $(C_0 \in \mathbb{R})$

On sait que $a \geq 1$

donc $\forall x \in \mathbb{R}_+$ $A(x) = C_1 + \int_0^x a(t)\,dt \geq x + C_1 \quad (C_1 \in \mathbb{R})$

- En particulier $\lim\limits_{x \to +\infty} A(x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} C_0 e^{-A(x)} = 0$.

Soit $\varepsilon > 0$

- Soit α tq $\forall t \geq \alpha, \ |b(t)| \leq \varepsilon$

$e^{-A(x)} \underbrace{\int_0^\alpha b(t) e^{A(t)}\,dt}_{\text{constante}} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ donc pour x assez gd,

$\left| e^{-A(x)} \int_0^\alpha b(t) e^{A(t)}\,dt \right| \leq \varepsilon$.

- D'autre part, pour x assez grand :

$\left| e^{-A(x)} \int_\alpha^x b(t) e^{A(t)}\,dt \right| \leq e^{-A(x)} \int_\alpha^x \varepsilon e^{A(t)}\,dt$

$\leq \varepsilon e^{-A(x)} \int_\alpha^x a(t) e^{A(t)}\,dt$ car $a \geq 1$

$= \varepsilon e^{-A(x)} \left[e^{A(t)} \right]_\alpha^x = \varepsilon (1 - \underbrace{e^{A(\alpha) - A(x)}}_{<1}) \leq \varepsilon$

Conclusion

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

(21) On a

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) = \int_0^x f''(t)\,dt = \int_0^x -q(t)f(t)\,dt$

Comme f est bornée, on a $-q(t)f(t) = O(q(t))$

et comme q est L^1, $t \mapsto -q(t)f(t)$ est L^1 sur $\mathbb{R}_+$

On en déduit que $\int_0^{+\infty} -q(t)f(t)\,dt$ converge, c'est-à-dire

que $\int_0^x -q(t)f(t)\,dt$ admet une limite $l \in \mathbb{R}$ qd $x \to +\infty$.

Or si $l > 0$, alors il existe α tq $\forall x \geq \alpha$, $f'(x) \geq l/2$

Alors $f(x) = f(\alpha) + \int_\alpha^x f'(t)\,dt \geq f(\alpha) + \frac{l}{2}(x-\alpha) \xrightarrow[\text{qd } x \to +\infty]{} +\infty$

Contradict $\underline{f \text{ bornée}}$, donc $\underline{l \leq 0}$

On peut écrire le m raisonnement si $l < 0$ (avec $f'(x) \leq l/2$)

On remarque que $-f$ est une solution bornée de l'équation différentielle,

donc $\lim\limits_{+\infty} -f' \leq 0$ d'où $\underline{l \geq 0}$. Ainsi $\underline{l = 0}$, cqfd.

<u>Rem</u> A propos des équations $y'' + qy = b$ (2)

On considère une équation (1) $y'' + py' + qy = b$ (p, q C^0)

On cherche y sous la forme $\begin{cases} y = uz \\ y' = u'z + uz' \\ y'' = u''z + 2u'z' + uz'' \end{cases}$ u à définir...

donc (1) $\overset{\text{à vérifier}}{\iff}$ $u''z + 2u'z' + uz'' + pu'z + puz' + quz = b$

$\iff uz'' + \underline{(2u' + pu)}z' + (u'' + pu' + qu)z = b$.

Maintenant on choisit u pour que $2u' + pu = 0$ $\left(\underline{u(x) = e^{-\frac{1}{2}P(x)}} \text{ avec } P'(x) = p(x)\right)$

Ainsi u ne s'annule pas

et (1) $\iff z'' + \left(\frac{u'' + pu' + qu}{u}\right)z = b/u$

<u>On est donc ramené à la forme de l'équation (2)</u>

(transformation de Liouville)