(16) Méthode 1 : calcul "direct"

On pose $c \in \mathbb{R}$ et on résout $\frac{x+y}{1+x^2+y^2} = c$ dans $\mathbb{R}^2$.

. Pour $c=0$, on obtient $x+y=0$ $\mathcal{S}_0 = \{(x,-x), x \in \mathbb{R}\}$

. On suppose $c \neq 0$

On doit résoudre $x^2+y^2+1 = \frac{1}{c}(x+y)$

$$\Leftrightarrow \boxed{x^2 - \frac{1}{c}x + y^2+1 - \frac{1}{c}y = 0} \quad (1)$$

C'est une équation du 2^d degré en x,

$$\Delta_1 = \frac{1}{c^2} - 4\left(y^2+1-\frac{1}{c}y\right)$$

$$= -4y^2 + \frac{4}{c}y + \frac{1}{c^2} - 4.$$

c'est encore un trinôme du 2^d degré en y, dont on étudie le signe :

$$\Delta_2 = \left(\frac{4}{c}\right)^2 + 16\left(\frac{1}{c^2}-4\right)$$

$$= 16\left[\frac{2}{c^2} - 4\right]$$

Donc si $|c| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$, alors $\Delta_2 \geq 0$ donc Δ_1 change de signe et donc, pour certaines valeurs de y, $\Delta_1 \geq 0$, donc (1) admet des solutions, c'est-à-dire que c admet (des) antécédents (au moins un).

Si $|c| > \frac{\sqrt{2}}{2}$, alors $\Delta_2 < 0$ donc Δ_1 est de signe constant, donc $\Delta_1 < 0$ (cf coeff dominant de Δ_1) donc (1) n'a pas de solution réelle.

$$f(\mathbb{R}^2) = \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, +\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \text{ donc } f \text{ est bornée}$$

Coeur :

Pour $c = \sqrt{2}/2$ on a $\Delta_2 = 0$ et $\Delta_1 = -4\left(y - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$

donc (1) admet des solutions pour $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et on trouve $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

D'où $\max_{\mathbb{R}^2} f$ atteint en $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $\left(f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

et $\min_{\mathbb{R}^2} f = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ atteint en $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, (par symétrie de la fonction : $f(-x,-y) = -f(x,y)$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$)

Méthode 2 On utilise la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$.

Si $\|(x,y)\| = R > 0$, alors $|f(x,y)| \leq \frac{2R}{1+R^2} \leq \frac{2}{R}$

On en déduit que f est arbitrairement petite en dehors d'une boule de centre 0,

plus concrètement :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists R > 0, \quad \|(x,y)\| \geq R \Rightarrow |f(x,y)| \leq \varepsilon$$

Ce que est parfois noté : $\lim_{\|(x,y)\| \to 0} f(x,y) = 0$

remarquer la notation avec $\|\cdot\|$

On détermine les points critiques de f sur $\mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}\left[1+x^2+y^2-(x+y)2x\right] = \frac{1-x^2+y^2-2xy}{(1+x^2+y^2)^2}$$

et par symétrie : $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{1-y^2+x^2-2xy}{(1+x^2+y^2)^2}$

donc pts critiques donnés par $\begin{cases}(1-2xy)+(y^2-x^2)=0\\(1-2xy)-(y^2-x^2)=0\end{cases} \iff \begin{cases}y^2-x^2=0\\1-2xy=0\end{cases}$

$\iff \begin{cases}x=y\\1-2x^2=0\end{cases}$ ou $\begin{cases}x=-y\\ 1+2x^2=0\end{cases}$ → pas de solution réelle

$\iff x=y=\frac{\sqrt2}{2}$ ou $x=y=-\frac{\sqrt2}{2}$

Or $f\left(\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt2}{2}\right)=+\frac{\sqrt2}{2}$ et $f\left(-\frac{\sqrt2}{2},-\frac{\sqrt2}{2}\right)=-\frac{\sqrt2}{2}$

On fixe $R>0$ tq $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \|(x,y)\|\geq R \Rightarrow |f(x,y)|\leq \frac{\sqrt2}{4}\ \left(<\frac{\sqrt2}{2}\right)$
p.ex.

Comme f est continue sur $B_F(0,R)$, qui est fermé et borné, f atteint ses bornes sur $B_F(0,R)$. Or $\|(x,y)\|=R \Rightarrow |f(x,y)|<\frac{\sqrt2}{2}$ alors que $f\left(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}\right)=\frac{\sqrt2}{2}$, $f\left(-\frac{1}{\sqrt2},-\frac{1}{\sqrt2}\right)=-\frac{\sqrt2}{2}$, donc les extrema de f sur $B_F(0,R)$ sont atteints dans la boule ouverte, donc en un pt critique (car f est C^1) et donc il s'agit des pts $\left(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}\right)$ et $\left(-\frac{1}{\sqrt2},-\frac{1}{\sqrt2}\right)$.

Le rayon R a été choisi de sorte que $\max_{\mathbb{R}^2} f = \max_{B_F(0,R)} f$

donc on a bien déterminé le max et le min de f sur $\mathbb{R}^2$

⚠ Type de raisonnement classique, a été présenté en cours !

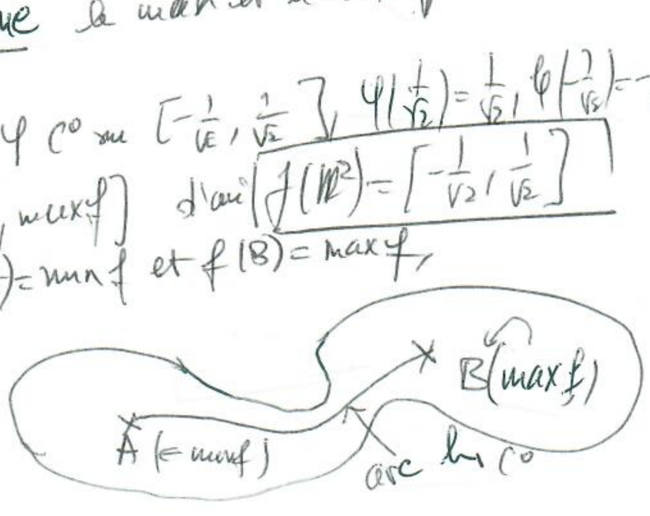
Rq Il n'y a pas de résultat direct du type "Th des valeurs intermédiaires" à plusieurs variables dans le programme. Néanmoins, on comprend que si on peut rejoindre de manière continue le min et le max par un arc paramétré C^0, alors on a gagné !

. Ici, considérer $\varphi(x)=f(x,x)$: φ C^0 sur $\left[-\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}\right]$, $\varphi\left(\frac{1}{\sqrt2}\right)=\frac{1}{\sqrt2}$, $\varphi\left(-\frac{1}{\sqrt2}\right)=-\frac{1}{\sqrt2}$,

donc $\varphi\left(\left[-\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}\right]\right)=\left[-\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}\right]=[\min f,\max f]$ d'où $\boxed{f(\mathbb{R}^2)=\left[-\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}\right]}$

. Plus généralement, sur un convexe, si $f(A)=\min f$ et $f(B)=\max f$, considérer $\varphi : t\longmapsto f((1-t)A+tB)$

. Encore + général : utiliser un arc C^0. Appliquer le TVI à $\varphi=f\circ h$.



(17) cf exo 6

principe $x_n \to 0$, $y_n \to 0$ $x_n \neq y_n$

$\exists\, c_n$ tq $\min(x_n, y_n) < c_n < \max(x_n, y_n)$ (donc $c_n \to 0$)

tq $\dfrac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n} = f'(c_n)$ (Égalité des acc finis)

Alors f' est C^0 sur $\mathbb{R}$ donc $f'(c_n) \to f'(0)$

Par caract° séquentielle, $\boxed{\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(0)}$

Rq l'hypothèse "f dérivable" ne suffirait pas pour conclure !

(18) 1. . Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, f est C^2 d'après les th. généraux.

(quotient, composition de fonctions C^2).

. En (0,0)

$\forall x \in \mathbb{R}$: $f(x,0) = 0$ donc $\exists \boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0}$.

(Rappel $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ est la dérivée en 0 de la fonction $x \mapsto f(x,0)$)

$\forall y \in \mathbb{R}$, $f(0,y) = 0$ donc $\exists \boxed{\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0}$.

Donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont définies sur $\mathbb{R}^2$

2. On a $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3\cos(x^3y)(x^2+y^2) - \sin(x^3y)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = 0 \quad \text{(d'après 1.)} \end{cases}$

donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0) = \left(\begin{cases} x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}\right) = x$

Ainsi $\boxed{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1}$ (dérivée de $x \mapsto x$ en $\underline{\underline{0}}$)

Il serait intéressant de comparer à :

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2y\cos(x^3y)(x^2+y^2) - \sin(x^3y)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = 0 \end{cases}$

donc $\forall y \in \mathbb{R}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y) = 0$

D'où $\boxed{\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 0}$. On constate $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$, ce

qui contredit le th. de SCHWARZ, donc f n'est pas C^2 sur $\mathbb{R}^2$

(19) Exemple de fonctions homogènes

- $f(x,y) = x^2 y^5 \quad f(tx,ty) = t^7 f(x,y)$ (7-homogène)
- $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} \quad f(tx,ty) = t\, f(x,y)$ ($\alpha = 1$)

⚠ m̂ qd $\alpha = 1$, f n'est en général pas linéaire

Cependant, les applications linéaires sont 1-homogènes !

1. ($\Rightarrow$) Supposons f α-homogène. On fixe $(x,y) \in U$.

On considère $\varphi : t \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto f(tx,ty) - t^\alpha f(x,y)$

Par composition, φ est C^1 et d'après la règle de la chaîne :

$$\forall t>0, \quad \varphi'(t) = x \frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty) + y \frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty) - \alpha t^{\alpha-1} f(x,y)$$

Or par hypothèse φ est constante (nulle) donc $\varphi' = 0$.

En particulier $\varphi'(1) = 0$ donc $x \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \alpha f(x,y)$ cqfd.

($\Leftarrow$) On suppose $\alpha f = x \dfrac{\partial f}{\partial x} + y \dfrac{\partial f}{\partial y}$

Posons, $\forall t>0$, $h(t) = f(tx,ty)$ avec $(x,y) \in U$ fixé

Toujours avec la règle de la chaîne :

$$h'(t) = x \frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty) + y \frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty) \quad \text{donc } \boxed{\cancel{t\,h'(t) = \alpha f(tx,ty)}} = \alpha h(t)$$

Attention ! $\alpha f(tx,ty) = \underline{(tx)} \dfrac{\partial f}{\partial x}(tx,ty) + \underline{(ty)} \dfrac{\partial f}{\partial y}(tx,ty)$

h est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ du pb de Cauchy :

$$\begin{cases} y' = \dfrac{\alpha y}{t} \\ y(1) = f(x,y) \end{cases}$$

donc (th de Cauchy : une solution et une seule sur $\mathbb{R}_+^*$)

$\forall t>0, \quad h(t) = f(x,y) \cdot t^\alpha$, ce qui montre que f est α-homogène

2. Méthode 1 avec les fonctions homogènes. Ce qui précède ne nécessite pas $\alpha > 0$, on l'applique pour $\alpha \in \mathbb{R}$

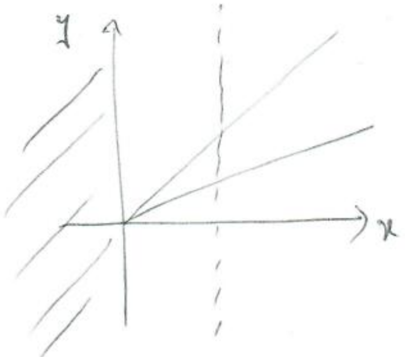
On note que ce qui précède ... $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ est un ouvert

En particulier, on a : $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ et $(x,y) \mapsto x$ est C^0 sur $\mathbb{R}^2$)

(défini par

Et $\forall (x,y) \in U$, $\forall t>0$, $tx > 0$ donc $(tx,ty) \in U$.

Analyse { donc si f est solution de l'EDP $x \dfrac{\partial f}{\partial x} + y \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$, alors f est 0-homogène, ie $\forall t>0$, $\forall (x,y) \in U$, $f(tx,ty) = f(x,y)$



Ceci signifie que f est constante sur les demi-droites issues de l'origine,

donc pour $\forall (x,y)\in U$, $f(x,y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$.

On pose $\forall m\in\mathbb{R}$, $\Phi(m) = f(1,m)$

Si f est C^1 sur U, alors par composition Φ est C^1 sur $\mathbb{R}$,

et on a $\forall (x,y)\in U$, $\boxed{f(x,y) = \Phi\left(\frac{y}{x}\right)}$

Synthèse Soit φ C^1 sur $\mathbb{R}$ et $f : (x,y)\in U \longmapsto \Phi\left(\frac{y}{x}\right)$

On a $\forall (x,y)\in U$

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\cdot \frac{-y}{x^2}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right) + y\cdot\frac{1}{x}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right) = 0$$

Donc $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\left[(x,y)\longmapsto \Phi\left(\frac{y}{x}\right)\right],\ \varphi\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})\right\}}$

Méthode 2 : On interprète l'équation à l'aide du produit scalaire et du gradient :

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\cdot \nabla f(x,y) = 0} \qquad (2)$$

Pour $(r,\theta)\in\mathbb{R}_+^*\times\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ on pose $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$

On a vu (cf poly) $\nabla f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)\,\vec{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)\,\vec{e_\theta}$

Or $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = r\,\vec{e_r}$

avec $\vec{e_r} = \begin{pmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{pmatrix}$ $\vec{e_\theta} = \begin{pmatrix}-\sin\theta \\ \cos\theta\end{pmatrix}$ BON

d'où $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\nabla f(x,y) = r\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)$

et donc $(2) \iff \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = 0$ $\longrightarrow$ cette équation montre que $g(r,\theta)$ ne dépend pas de r, localement. Comme $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$ est convexe, on a :

$\iff \exists A\in C^1\left(\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,\mathbb{R}\right)$, $g(r,\theta) = A(\theta)$

(justif : car $\mathbb{R}_+^*\times\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ est convexe)

(domaine de θ)

D'où $f(x,y) = g(r\cos\theta, r\sin\theta)$ avec $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\theta = \operatorname{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right)$

$= A(\operatorname{Arctan} y/x)$

Comme A est quelconque C^1, et Arctan C^1, bijection, on peut écrire les solutions :

$\boxed{f : (x,y)\longmapsto \Phi(y/x)}$

3. Ici, l'homogénéité n'est pas facile à appliquer (?)

On utilise les coordonnées polaires.

Pour $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on pose $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$

donc $\nabla f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)\vec{e_r} + \frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)\vec{e_\theta}$

avec $\vec{e_r} = \begin{pmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{pmatrix}$ $\vec{e_\theta} = \begin{pmatrix}-\sin\theta \\ \cos\theta\end{pmatrix}$

L'équation $x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xy\sqrt{x^2+y^2}$

se réécrit : $\begin{pmatrix}x \\ y\end{pmatrix} \cdot \nabla f(x,y) = xy\sqrt{x^2+y^2}$

$$\iff r\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = r^3\cos\theta\sin\theta$$

$$\iff \boxed{\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = r^2\cos\theta\sin\theta}$$

On intègre : $g(r,\theta) = \frac{r^3}{3}\cos\theta\sin\theta + C(\theta)$ avec C de classe C^1 sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

(principe on fixe θ, on intègre comme une ED ordinaire. On obtient une constante d'intégration qui dépend a priori de θ

– Comme $\mathbb{R}_+^* \times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est convexe, r varie dans $\mathbb{R}_+^*$ tout entier donc la constante ne dépend pas indirectement de r. –

et $C(\theta) = g(r,\theta) - \frac{r^3}{3}\cos\theta\sin\theta$ montre que C est de classe C^1).

On retrouve f en faisant $r = \sqrt{x^2+y^2}$ $\theta = \operatorname{Arctan} y/x$

Rq $\forall t \in \mathbb{R}$, $\cos\operatorname{Arctan} t = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\operatorname{Arctan} t)}} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$

$\sin\operatorname{Arctan} t = (\cos\operatorname{Arctan} t)(\tan\operatorname{Arctan} t) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$

donc $f(x,y) = \frac{1}{3}(x^2+y^2)^{3/2}\frac{y/x}{1+y^2/x^2} + \Phi(y/x) = \frac{1}{3}xy\sqrt{x^2+y^2} + \Phi(y/x)$

avec Φ C^1 sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ($\Phi = C$)

Rq La solution particulière

$f_0 : (x,y) \mapsto \frac{1}{3}xy\sqrt{x^2+y^2}$

est bien 3-homogène

(20) <u>Analyse</u> Soit f une solution.
On fixe $y \in \mathbb{R}$. $x \mapsto f(x,y)$ est C^1 sur $\mathbb{R}$ donc

$$f(x,y) = f(0,y) + \int_0^x \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(t,y)}_{\text{(dérivée de } t \mapsto f(t,y))} dt$$

$$= f(0,y) + \int_0^x u(t,y)\, dt$$

Or $y \mapsto \int_0^x u(t,y)\, dt$, à <u>$x$ fixé</u> $\in \mathbb{R}$, vérifie les hypothèses du théorème de dérivation :

- $y \mapsto u(t,y)$ est C^1 sur $\mathbb{R}$, dérivée : $y \mapsto \frac{\partial u}{\partial y}(t,y) = \frac{\partial v}{\partial x}(t,y)$
- $t \mapsto u(t,y)$ est C^0 donc L^1 sur $[0,x]$
- $t \mapsto \frac{\partial u}{\partial y}(t,y)$ est C^0 sur $[0,x]$
- Si $[a,b] \subset \mathbb{R}$ alors $[0,x] \times [a,b]$ <u>fermé borné</u> de $\mathbb{R}^2$

et $\frac{\partial u}{\partial y}$ C^0 sur $\mathbb{R}^2$, donc <u>bornée</u> sur $[0,x] \times [a,b]$.
Comme les constantes sont L^1 sur $[0,x]$, l'hypothèse de domination est vérifiée, donc à x fixé,

$y \mapsto \int_0^x u(t,y)\, dt$ est C^1 sur $\mathbb{R}$, de dérivée

$$y \mapsto \int_0^x \frac{\partial u}{\partial y}(t,y)\, dt$$

Ainsi, si on fixe x et qu'on dérive par rapport à y :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,y) + \int_0^x \frac{\partial u}{\partial y}(t,y)\, dt$$

$$= \frac{\partial f}{\partial y}(0,y) + \int_0^x \underbrace{\frac{\partial v}{\partial x}(t,y)}_{\text{dérivée de } t \mapsto v(t,y)} dt$$

$$= \frac{\partial f}{\partial y}(0,y) + v(x,y) - v(0,y)$$

On a donc $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = v(x,y) \iff \forall y \in \mathbb{R},\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,y) = v(0,y)$

$\iff$ (prim. à 1 variable) $f(0,y) = \int_0^y v(0,u)\, du + C_0$
(C₀ constante)

Finalement :

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\boxed{f(x,y) = \int_0^y v(0,u)\,du + \int_0^x u(t,y)\,dt + C_0}$

<u>Synthèse</u> On fixe f comme ci-dessus.

Pour y fixé, le th fondamental du calcul diff montre :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 + u(x,y) + 0$$

Pour x fixé, le th de dérivation des int. à paramètre donne :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = v(0,y) + \int_0^x \frac{\partial u}{\partial y}(t,y)\,dt + 0$$

$$= v(0,y) + \int_0^x \frac{\partial v}{\partial x}(t,y)\,dt = \cancel{v(0,y)} + v(x,y) - \cancel{v(0,y)}$$

D'où $\underline{\frac{\partial f}{\partial x} = u \; ; \; \frac{\partial f}{\partial y} = v}$ Comme u et v sont C^1,

on en déduit que f est C^2 sur $\mathbb{R}^2$, cqfd.

---

(21) Remarquons que f est C^2 sur $\underline{\mathbb{R}^2}$, donc on va pouvoir dériver sous l'intégrale par rapport à r, puisque, pour prouver la domination est prouvée en observant $[a,b] \subset \mathbb{R}$, la domination est prouvée en observant que $\frac{\partial g}{\partial r}$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}$ sont bornées car continues sur $[a,b]\times[0,2\pi]$, qui est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$ (je note $g(r,t) = f(r\cos t, r\sin t)$).

On a donc, par ex $K'(r) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial g}{\partial r}(r,t)\,dt$

Une fausse piste serait d'essayer de prouver $\frac{\partial g}{\partial r} = 0$, ce qui est en général faux.

La fonction $f : (x,y) \mapsto xy$, par ex, vérifie $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$

(on dit qu'elle est <u>harmonique</u>), mais $f(r\cos t, r\sin t) = r^2\cos t\sin t$

n'est pas nulle (ni constante) sur $[0,2\pi]$.

(En revanche, on a bien $K(r) = \int_0^{2\pi} r^2\cos t\sin t\,dt = r^2\left[\frac{(\sin t)^2}{2}\right]_0^{2\pi} = 0 \; (\forall r \in \mathbb{R})$

donc K est constante dans cet exemple)

Une meilleure idée est de traduire la condition sur f en une condition sur g.

On a $g(r,t) = f(r\cos t, r\sin t)$

Pour alléger, on omet de préciser en quels points sont calculées les fonctions : les dérivées de g sont en (r,t), celles de f en $(r\cos t, r\sin t)$:

(1) $\dfrac{\partial g}{\partial r} = \cos t \dfrac{\partial f}{\partial x} + \sin t \dfrac{\partial f}{\partial y}$ (règle de la chaîne)

(2) $\dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2} = \cos^2 t \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\cos t \sin t \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + (\sin t)^2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

(3) $\dfrac{\partial g}{\partial t} = -r\sin t \dfrac{\partial f}{\partial x} + r\cos t \dfrac{\partial f}{\partial y}$

(4) $\dfrac{\partial^2 g}{\partial t^2} = -r\cos t \dfrac{\partial f}{\partial x} - r\sin t \dfrac{\partial f}{\partial y} + r^2\sin^2 t \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2r^2\cos t \sin t \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + r^2\cos^2 t \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

$= -r\dfrac{\partial g}{\partial r} + r^2\sin^2 t \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2r^2\cos t \sin t \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + r^2\cos^2 t \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

$r^2 \times (2) + (4)$: $r^2 \dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial t^2} = \underbrace{r^2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + r^2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}}_{=0} - r\dfrac{\partial g}{\partial r}$

D'où : $\boxed{r^2 \dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2} + r\dfrac{\partial g}{\partial r} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial t^2} = 0}$

A r fixé, on intègre sur $[0, 2\pi]$:

$r^2 \displaystyle\int_0^{2\pi} \dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,t)\,dt + r \int_0^{2\pi} \dfrac{\partial g}{\partial r}(r,t)\,dt + \int_0^{2\pi} \dfrac{\partial^2 g}{\partial t^2}(r,t)\,dt = 0$

$\boxed{r^2 K''(r) + r K'(r) + \dfrac{\partial g}{\partial t}(r, 2\pi) - \dfrac{\partial g}{\partial t}(r,0) = 0}$

Rappelons $\dfrac{\partial g}{\partial t}(r,t) = -r\sin t \dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos t, r\sin t) + r\cos t \dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos t, r\sin t)$ (3)

donc $t \longmapsto \dfrac{\partial g}{\partial t}(r,t)$ est 2π périodique !

On a donc $\underline{r^2 K''(r) + r K'(r) = 0}$

d'où $\forall r > 0$, $K''(r) = -\dfrac{1}{r} K'(r)$ et donc $\boxed{K'(r) = \dfrac{\alpha}{r}}$

pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$.

Or g est continue sur $\mathbb{R}^2$, donc bornée sur tout $[a,b] \times [0, 2\pi]$, ce qui permet d'appliquer le th de continuité et $\underline{K}$ est C^0 sur $\mathbb{R}_+$.

Nécessairement, $\alpha = 0$ d'où $\forall r \in \mathbb{R}$, $K'(r) = 0$ et $\underline{K \text{ est constante}}$

(22) Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$,

$$\left|f(x,y)\right| = \left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right| \cdot |x^2-y^2| \leq \frac{|x^2-y^2|}{2} \to 0 \text{ donc } \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

donc on peut prolonger par continuité en posant $f(0,0) = 0$

D'après les th généraux, f est C^2 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (fonction rationnelle des coordonnées).

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y}{(x^2+y^2)^2}\left[(3x^2-y^2)(x^2+y^2) - 2x^2(x^2-y^2)\right]$

$$= \frac{y}{(x^2+y^2)^2}\left(x^4+4x^2y^2-y^4\right)$$

et par symétrie $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{x}{(x^2+y^2)^2}\left(y^4+4x^2y^2-x^4\right)$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x,0) = 0$ (si $x \neq 0$, formule de l'énoncé, si $x=0$: $f(0,0)=0$)

donc $\boxed{\exists \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0}$

et de m. $\forall y \in \mathbb{R}$, $f(0,y) = 0$ donc $\exists \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

Posons $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Alors $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2} = 0$ et on note $|x| \leq r$, $|y| \leq r$

donc $\forall (x,y) \neq (0,0)$ $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leq \frac{6r \cdot r^4}{r^4} = 6r \to 0$

Rq le dénominateur est $= r^4$, on majore le numérateur par inégalité triangulaire.

donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ est C^0 sur $\mathbb{R}^2$

De m, $\frac{\partial f}{\partial y}$ est C^0 sur $\mathbb{R}^2$ donc $\underline{f \text{ est } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}^2}$

$\forall y \neq 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -\frac{y^5}{y^4} = -y$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$

donc $\forall y \in \mathbb{R}$ $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -y$ et en dérivant pour $y=0$ $\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1}$

$\forall x \neq 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = x$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = x$ d'où $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = +1$

(dérivée de $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ au point $x=0$)

On a $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ donc le théorème de Schwarz ne s'applique pas, ce qui montre que $\underline{f \text{ n'est pas } C^2 \text{ sur } \mathbb{R}^2}$

(23) 1. On pose $f : (x,y) \longmapsto x^3+y^3+y^2-x^2$.

f est clairement C^1 sur $\mathbb{R}^2$ (polynomiale), (qui est un ouvert !)

~~Ast~~ les pts critiques sont donnés par :

$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2-2x \\ 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2+2y \end{cases} \iff \begin{cases} x(3x-2)=0 \\ y(3y+2)=0 \end{cases}$$

D'où 4 pts critiques : $(0,0)$, $(2/3, 0)$, $(0, -2/3)$ et $(2/3, -2/3)$

__Point (0,0)__ $f(x,0) = x^3-x^2 \sim -x^2$ qd $x \to 0$

$f(0,y) = y^3+y^2 \sim y^2$ qd $y \to 0$

donc au voisinage de $(0,0)$, $f(x,y)$ prend des valeurs <0 et des valeurs >0 donc $0 = f(0,0)$ n'est __pas un extremum local__

__Point (2/3, 0)__

$$f(2/3+x, y) = \left(\frac{2}{3}+x\right)^3 + y^3+y^2 - \left(\frac{2}{3}+x\right)^2$$

$$= \underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^3 - \left(\frac{2}{3}\right)^2}_{} + \cancel{4/3\, x} + 2x^2 + x^3 + y^3 + y^2 - \cancel{4/3\, x} - x^2$$

$$= f\left(\frac{2}{3}, 0\right) + \underbrace{x^2(1+x)}_{\geq 0} + \underbrace{y^2(1+y)}_{\geq 0}$$

Si (x,y) est au voisinage de $(0,0)$, alors $1+x>0$, $1+y>0$

donc $f(2/3+x, y) \geq f(2/3, 0)$: f admet un __minimum local__ en $(2/3, 0)$

__Point (0, −2/3)__ On peut refaire le même type d'étude, ou

remarquer : $f(-y,-x) = -y^3-x^3+x^2-y^2 = -f(x,y)$

donc f admet un minimum local en $(2/3, 0) \iff f$ admet un __maximum__ local en $(0, -2/3)$

__Point (2/3, −2/3)__ Par symétrie, on a vu que

f admet un minimum local en $(a,b) \iff f$ admet un maximum local en $(-b,-a)$

Or $(a,b) = (2/3, -2/3) \iff (-b,-a) = (2/3, -2/3)$

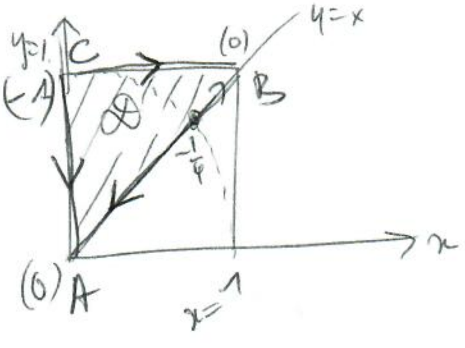
Si f admet un extremum en $(2/3, -2/3)$, alors f est __constante__ au voisinage de ce point, ce qui est absurde (il y aurait une infinité de points critiques !!)

__Ccl__ les extremum locaux sont en $(2/3, 0)$ (minimum local)

$(0, -2/3)$ (maximum local)

__Rq__ $\lim_{x \to +\infty} f(x,0) = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} f(x,0) = -\infty$ donc pas d'__extremum global !__

(23) 2).



$\mathcal{D}$ est fermé, car intersection de
$\{(x,y) \mid x \geq 0\}$
$\{(x,y) \mid y-x \geq 0\}$
$\{(x,y) \mid y \leq 1\}$

(fermés car $(x,y) \mapsto x$, $(x,y) \mapsto y-x$ et $(x,y) \mapsto y$ sont C^0 sur $\mathbb{R}^2$)

Et $\mathcal{D}$ est borné car $(x,y) \in \mathcal{D} \Rightarrow |x|, |y| \leq 1$.
Or g est polynomiale, donc C^0 sur $\mathbb{R}^2$ et donc
g est bornée et atteint ses bornes sur $\mathcal{D}$.

Points critiques :
$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + y^3 - x - x \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 3y^2(x-1) \end{cases}$$

Comme $3y^2(x-1) = 0 \iff x = 1$ ou $y = 0$,
il n'y a pas de point critique dans $\mathring{\mathcal{D}}$, donc les extremums sont atteints sur $\mathrm{Fr}(\mathcal{D})$.

Notons $A = (0,0)$, $B = (1,1)$, $C = (0,1)$. On paramètre $[AB]$:
Étude de g sur $[AB]$.
$$t \mapsto (1-t)A + tB = (t,t)$$
$$(0,1) \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

Notons $\varphi_1(t) = g(t,t) = t^4 - t^2$
$\varphi_1'(t) = 4t^3 - 2t = 2t(2t^2 - 1)$

D'où le tableau de variations :

t	0		$1/\sqrt{2}$		1
$\varphi_1'(t)$		$-$	0	$+$	
$\varphi_1(t)$	0	$\searrow$	$-1/4$	$\nearrow$	0

Étude sur $[AC]$
Notons $\varphi_2(t) = g(0,t) = -t^3$, décroissante sur $[0,1]$
$\varphi_2(0) = 0$, $\varphi_2(1) = -1$

Étude sur $[CB]$
On pose $\varphi_3(t) = g(t,1) = t^3 + t(1-t) - 1 = t^3 - t^2 + t - 1$.
donc $\varphi_3'(t) = 3t^2 - 2t + 1 > 0$ ($\Delta = 4 - 12 < 0$)
donc $\varphi_3 \uparrow$, $\varphi_3(0) = -1$, $\varphi_3(1) = 0$.

En réunissant les variations de g sur $\mathrm{Fr}\,\mathcal{D}$, on constate

$-1 = \min g = g(0,1)$ et $0 = \max g = g(0,0) = g(1,1)$

(24) Il s'agit bien sûr de la fonction $f : x \mapsto \|x-a\| + \|x-b\|$

Fixons une BOND $(e_1, \dots, e_n)$

et notons $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ $\quad a = \sum_{i=1}^n a_i e_i$ $\quad b = \sum_{i=1}^n b_i e_i$

$$f(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i-a_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i-b_i)^2}$$

donc $$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \frac{1}{2\|x-a\|} \cdot 2(x_k-a_k) + \frac{1}{2\|x-b\|} \cdot 2(x_k-b_k)$$

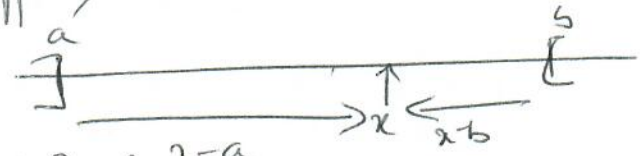
$$= \frac{x_k-a_k}{\|x-a\|} + \frac{x_k-b_k}{\|x-b\|}$$

x est un point critique ssi $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = 0$,

i.e $$\frac{x-a}{\|x-a\|} + \frac{x-b}{\|x-b\|} = 0 \quad (*)$$

Ceci définit $]a,b[= \{(1-t)a + tb \mid t \in]0,1[\} \subset E$.

En effet : si x vérifie (*), alors $x-a$ et $x-b$ sont colinéaires, de sens opposés donc $x \in]a,b[$.



Réciproquement, si $t \in]0,1[$ et $x = (1-t)a + tb$, alors

$x-a = t(b-a)$ et $\|x-a\| = t\|b-a\|$

$x-b = (1-t)(a-b)$ et $\|x-b\| = (1-t)\|b-a\|$

donc $$\frac{x-a}{\|x-a\|} + \frac{x-b}{\|x-b\|} = \frac{b-a}{\|b-a\|} + \frac{a-b}{\|b-a\|} = 0.$$

Conclusion l'ensemble des pts critiques est $]a,b[$.

(25) On pose $u = xy$ et $v = y/x$, c'est-à-dire $y = \sqrt{uv}$, $x = \sqrt{\frac{v}{u}}$, pour $(u,v) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$.

puis $g(u,v) = f\left(\sqrt{\frac{v}{u}}, \sqrt{uv}\right)$ donc g C^2 sur $\mathbb{R}_+^{*2}$

c'est-à-dire $\boxed{f(x,y) = g(xy, y/x)}$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}_+^{*2}$

On note ci-dessous $\frac{\partial f}{\partial x}$ pour $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial g}{\partial u}$, etc pour $\frac{\partial g}{\partial u}(xy, y/x)$.

On applique la règle de la chaîne :

$$f(x,y) = g(xy, y/x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\frac{\partial g}{\partial u}(xy, y/x) - \frac{y}{x^2}\frac{\partial g}{\partial v}(xy, y/x)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = y\left(y\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}\right) + \frac{2y}{x^3}\frac{\partial g}{\partial v}$$

$$- \frac{y}{x^2}\left(y\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\right)$$

Th. de Schwarz : $\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}$

$$= \boxed{y^2\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - \frac{2y^3}{x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{y^2}{x^4}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} + \frac{2y}{x^3}\frac{\partial g}{\partial v}} \quad (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\frac{\partial g}{\partial u}(xy, y/x) + \frac{1}{x}\frac{\partial g}{\partial v}(xy, y/x)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = x\left(x\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}\right) + \frac{1}{x}\left(x\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{1}{x}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\right)$$

$$= \boxed{x^2\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}} \quad (2)$$

Finalement,

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0 \overset{x^2(1)-y^2(2)}{\Longleftrightarrow} -4y^2\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{2y}{x}\frac{\partial g}{\partial v} = 0$$

$$\Longleftrightarrow -4uv\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v) + 2v\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}(u,v) = \frac{1}{2u}\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)} \quad (3)$$

On fixe u et on intègre par rapport à v :

$$(3) \Longleftrightarrow \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \frac{1}{2u}g(u,v) + \underbrace{\varphi(u)}, \quad \varphi \in C^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$$

« constante » d'intégration, mais qui dépend de u

(et de classe C^1 car $\varphi(u) = \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) - \frac{1}{2u}g(u,v)$)

Puis on fixe v et on résout l'équation différentielle : $y' = \frac{1}{2u}y + \varphi(u)$ (Rq on cherche des solutions C^2) $\to \alpha \in C^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y = \lambda\sqrt{u} \\ \lambda'\sqrt{u} = \varphi(u) \end{cases} \text{ donc } \lambda(u) = \underbrace{\Phi(u)} + \alpha(v) \to \text{« constante d'intégration »}$$

$(C^2) \to$ primitive de $u \mapsto \frac{1}{\sqrt{u}}\varphi(u)$

$\to \beta(u) = \Phi(u)\sqrt{u}$ en fait C^2 qcq.

Solution générale :

$$g(u,v) = \alpha(v)\sqrt{u} + \beta(u) \text{ d'où}$$

$$\boxed{f : (x,y) \longmapsto \alpha\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\sqrt{xy} + \beta(xy)}$$

avec α, β de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$

(26)

1. Oui ! puisque si on pose $r(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} r(x,y)=0$ or ;
alors $\forall (x,y)\neq(0,0)$, $|f(x,y)| \leq |r_{(x,y)}^2 \ln r_{(x,y)}^2| \to 0$
d'où $\boxed{\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0}$

On pose donc $f(0,0)=0$, par abus de notation.

2. On calcule les points critiques :
- On remarque $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x,0)=0$ donc $\exists \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$ (idem)
donc $(0,0)$ est un point critique
Qd (x,y) proche de $(0,0)$, $\ln(x^2+y^2)<0$ et xy est de signe arbitraire
donc f n'a pas d'extremum local en $(0,0)$
- Pour $(x,y)\neq(0,0)$ $\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \iff \begin{cases} y\left[\ln(x^2+y^2)+\frac{2x^2}{x^2+y^2}\right]=0 \\ x\left[\ln(x^2+y^2)+\frac{2y^2}{x^2+y^2}\right]=0\end{cases}$

$\iff$ (A) $\begin{cases} x=0 \\ \ln(y^2)=0\end{cases}$ ou (B) $\begin{cases} y=0 \\ \ln(x^2)=0\end{cases}$ ou (C) $\begin{cases} \ln(x^2+y^2)=-\frac{2x^2}{x^2+y^2} \\ x^2-y^2=0.\end{cases}$

Les solutions de (A) et (B) sont : $(1,0),(-1,0),(0,1),(0,-1)$

Notons que $f(x,y)=f(y,x)$ et $f(-x,y)=-f(x,y)$ pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$
donc il suffit d'étudier le point $(1,0)$, p.ex., pour conclure pour les autres. On calcule $f(1,0)=0$.
On considère $f(1+x,y)=(1+x)y\ \ln((1+x)^2+y^2)$ et $(1+x)^2+y^2>1$ donc
si on prend $x>0$, alors $1+x>0$ et
$f(1+x,y)$ est du signe de y
Ainsi f prend, au voisinage de $(1,0)$, des valeurs plus grandes et plus petites que $f(1,0)$ donc f n'a pas d'extremum local en $(1,0)$ (et donc non en $(-1,0),(0,1),(0,-1)$)

(C) $\iff \begin{cases} \ln 2x^2=-1 \\ x^2=y^2\end{cases} \iff \begin{cases} x^2=\frac{e^{-1}}{2} \\ y^2=x^2\end{cases} \iff (x,y)\in\{(\alpha,\alpha),(\alpha,-\alpha),(-\alpha,\alpha),(-\alpha,-\alpha)\}$
avec $\boxed{\alpha=\sqrt{1/2e}}$

Le même argument de symétrie permet de n'étudier, p.ex, que le point (α,α).
On va étudier $f(\alpha+x,\alpha+y)$ pour (x,y) au voisinage de 0.
Pour faciliter l'écriture, on posera $r=\sqrt{x^2+y^2}$; on observe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} r=0$ (abus de notation)

Alors

$$f(\alpha+x,\alpha+y) = (\alpha+x)(\alpha+y)\ \ln\left[(\alpha+x)^2+(\alpha+y)^2\right]$$
$$= (\alpha+x)(\alpha+y)\ \ln\left[2\alpha^2+2\alpha(x+y)+r^2\right]$$
$$= (\alpha+x)(\alpha+y)\left[\ln(2\alpha^2)+\ln\left(1+\frac{x+y}{\alpha}+\frac{r^2}{2\alpha^2}\right)\right]$$

Or $\ln\left(1+\frac{x+y}{\alpha}+\frac{r^2}{2\alpha^2}\right) = \frac{x+y}{\alpha}+\frac{r^2}{2\alpha^2}+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{x+y}{\alpha}\right)^2+o(r^2)$

(les termes en xr^2, etc. sont tous $=o(r^2)$).

D'où : $f(\alpha+x,\alpha+y) = \left[\alpha^2+\alpha(x+y)+xy\right]\cdot\left[\ln(2\alpha^2)+\frac{x+y}{\alpha}+\frac{r^2}{2\alpha^2}-\frac{(x+y)^2}{2\alpha^2}+o(r^2)\right]$

Rq dans le développement, le terme constant est $f(\alpha,\alpha)$ (correspond à $(x,y)=(0,0)$)
et le terme d'ordre 1 est nul car le point est critique, donc

(DL1) $f(\alpha+x,\alpha+y) = f(\alpha,\alpha) + o(x,y)$
(ou $o(r)$, ce qui revient au même)

On a donc

$$f(\alpha+x,\alpha+y) = \underbrace{\alpha^2\ln(2\alpha^2)}_{f(\alpha,\alpha)} + xy\ln(2\alpha^2)+(x+y)^2+\frac{\overset{(x^2+y^2)/2}{\overset{\|}{r^2}}}{2}-\frac{(x+y)^2}{2}+o(r^2)$$

$$= f(\alpha,\alpha) + \underline{x^2+xy\left(1+\ln(2\alpha^2)\right)+y^2} + o(r^2)$$

Or $\ln(2\alpha^2) = -1$ (système (C))

donc $f(\alpha+x,\alpha+y) = f(\alpha,\alpha) + x^2+y^2 + o(r^2)$
$$= f(\alpha,\alpha) + r^2 + o(r^2)$$

donc $f(\alpha+x,\alpha+y) - f(\alpha,\alpha) = r^2\left(1+o(r^2)\right) \geq 0$ au voisinage de $(0,0)$

Ccl° f admet un minimum local en (α,α)
et, par symétrie : minimum local en $(-\alpha,-\alpha)$
maximum local en $(\alpha,-\alpha)$ et $(-\alpha,\alpha)$

(27) On pose $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ f C^2 sur $\mathbb{R}^2$. On résout sur $\underline{\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}}$

$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \iff \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\cdot\nabla f(x,y) = r$

$\iff r\vec{e_r}\cdot\left(\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)\,\vec{e_r}+\frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)\,\vec{e_\theta}\right) = r$

$\Leftrightarrow \ r \dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = r \ \Leftrightarrow \ \dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = 1$

$\Leftrightarrow \ g(r,\theta) = r + \varphi(\theta)$, avec φ C^1

d'où la solution générale $f : (x,y) \longmapsto \sqrt{x^2+y^2} + \Phi\left(\frac{y}{x}\right)$, avec Φ C^1 sur $\mathbb{R}$

(Rq sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, $\theta = \operatorname{Arctan} y/x$
Comme φ est quelconque, on remplace "$\varphi \circ \operatorname{Arctan}$" par "$\Phi$").

<u>Autre méthode</u>

On veut $g(u,v) = f(x,y)$ tel qu'on voudrait

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial y} = x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Condition suffisante $\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial x}{\partial u} = x \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} = y \end{array}\right.$ donc $x = \lambda(v)e^u$, $y = \mu(v)e^u$

Par exemple, on va poser $\left|\begin{array}{l} x = e^u \\ y = ve^u \end{array}\right.$, ainsi $\left|\begin{array}{l} u = \ln x \\ v = y/x \end{array}\right.$

et $g(u,v) = f(e^u, ve^u)$. Notons que $\sqrt{x^2+y^2} = e^u\sqrt{1+v^2}$

Ainsi f solution sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ ssi $\dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v) = e^u\sqrt{1+v^2}$

$\Leftrightarrow \ g(u,v) = e^u\sqrt{1+v^2} + \varphi(v)$, avec φ C^1

d'où $\underline{f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + \varphi(y/x)}$, $\varphi \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$
(comme précédemment)