(1) 1. Voir exo (14), feuille "Normes"

Si $\mathcal{D}$ est l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

on a donc $\overline{\mathcal{D}} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (caractérisation séquentielle des pts adhérents)

2. ($\Rightarrow$) Soit P unitaire scindé sur $\mathbb{R}$

Alors on peut écrire $P = (X-\alpha_1)\dots(X-\alpha_n)$ avec $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$.

$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |P(z)| = |z-\alpha_1||z-\alpha_2|\dots|z-\alpha_n|$

Or $|z-\alpha_k| \geq |\mathrm{Im}(z-\alpha_k)| = |\mathrm{Im}\, z|$ car $\alpha_k \in \mathbb{R}$ $(\forall k \in [\![1,n]\!])$

d'où $\underline{|P(z)| \geq |\mathrm{Im}\, z|^n}$

($\Leftarrow$) Soit P unitaire de degré n de $\mathbb{R}[X]$ tq $\forall z \in \mathbb{C}, |P(z)| \geq |\mathrm{Im}\, z|^n$.

Si $\mathrm{Im}\, z \neq 0$, alors $|P(z)| \geq |\mathrm{Im}\, z|^n \neq 0$ donc $P(z) \neq 0$.

Ainsi toutes les racines complexes de P sont réelles, donc

P est scindé sur $\mathbb{R}$.

3. Soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices diagonalisables.

On suppose $\lim_{k\to+\infty} A_k = A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

χ_{A_k} est scindé sur $\mathbb{R}$ donc $\forall z \in \mathbb{C}, |\chi_{A_k}(z)| \geq |\mathrm{Im}\, z|^n$.

càd $\forall z \in \mathbb{C}, |\det(zI_n - A_k)| \geq |\mathrm{Im}\, z|^n$. (question 2.)

$\det$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (polynôme des coefficients de la matrice)

donc en faisant tendre $k \to +\infty$

$\underline{\forall z \in \mathbb{C}}$ fixé : $|\det(zI_n - A)| \geq |\mathrm{Im}\, z|^n$.

D'ap. 2, χ_A est donc scindé sur $\mathbb{R}$, donc A est TZ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Conclusion : L'adhérence de l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices trigonalisables.

(2) (fait en cours) $f : M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto M^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

chaque fonction coordonnée p. ex $(a,b,c,d) \longmapsto \frac{d}{ad-bc}$ est rationnelle

donc continue sur son ens. de déf° càd $GL_2(\mathbb{R})$.

(3) (fait en cours)

- $SL_n(\mathbb{C}) = \{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid |\det(M) - 1| = 0 \}$

Or $M \longmapsto |\det(M)-1|$ est une fonction C^0 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ds $\mathbb{R}$,

donc $SL_n(\mathbb{C})$ est fermée, donc $\boxed{\overline{SL_n(\mathbb{C})} = SL_n(\mathbb{C})}$

- Soit $M \in SL_n(\mathbb{C})$. χ_M est scindé sur $\mathbb{C}$ donc M est TZ.

Soit $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tq $M = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}$

On pose $M_k = M + \frac{1}{k} I_n = P \begin{pmatrix} \lambda_1 + \frac{1}{k} & & * \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n + \frac{1}{k} \end{pmatrix} P^{-1}$

Alors
- $M_k \longrightarrow M$ qd $k \to +\infty$
- $\det(M_k) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i + \frac{1}{k})$. On pose $P(X) = \prod_{i=1}^{n} (X + \lambda_i)$

L'équation $P(z) = 1$ admet au plus n solutions (car $\deg P = n$)

donc APCR, $\det(M_k) \neq 1$.

Ccl : M est adhérent au complémentaire de $SL_n(\mathbb{C})$, donc M n'est pas intérieur à $SL_n(\mathbb{C})$ et donc $\boxed{\mathring{SL_n(\mathbb{C})} = \emptyset}$

(4) $\forall x, y \in \mathbb{R}$,

$$|f(x)g(x) - f(y)g(y)| \leq |f(x)g(x) - f(x)g(y)| + |f(x)g(y) - f(y)g(y)|$$
$$\leq \|f\|_\infty |g(x) - g(y)| + \|g\|_\infty |f(x) - f(y)|$$
$$\leq (\|f\|_\infty K_g + \|g\|_\infty K_f) |x - y|$$

donc <u>fg est lipschitzienne</u>

<u>Contre ex si f, g non bornées</u> : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = g(x) = x$ (1-lipsch)

et $h(x) = f(x)g(x) = x^2$: <u>h n'est pas lipschitzienne</u>

$\left(\frac{h(y) - h(x)}{y - x} = y + x \text{ est arbitrairement grand} \ldots \right)$

(5) 1. V est de <u>dimension finie</u>* et $\begin{pmatrix} f \longmapsto f(t) \\ V \longrightarrow \mathbb{R} \end{pmatrix}$ est une <u>forme linéaire</u> sur V

donc (th de représentation), il existe un unique $g_t \in V$ tq

$$\forall f \in V, \quad f(t) = (f \mid g_t)$$

*: <u>euclidien</u> !

<u>Rq</u> le produit scalaire sur V est celui associé à $\|\cdot\|_2$ $\left((f, g) \mapsto \int_0^1 f(t)g(t) \right)$

2. Comme $(f_1,\dots,f_q)$ BON de V :

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{q} f_i(t)^2 = \sum_{k=1}^{q} (f_i|g_t)^2 = \|g_t\|_2^2}_{(A)} = (g_t|g_t) = g_t(t)$$

Or $g_t(t) \le \|g_t\|_\infty \le n\|g_t\|_2$

On a donc $\|g_t\|_2^2 \le n\|g_t\|_2$ donc $\underline{\|g_t\| \le n}$

D'où, en reprenant (A) : $\boxed{\sum_{k=1}^{q} f_i(t)^2 \le n^2}$

3. On a donc $\displaystyle\int_0^1 \sum_{k=1}^{q} f_i(t)^2\,dt \le n^2$

Or $f_1,\dots,f_q$ BON donc $\int_0^1 f_i(t)^2\,dt = 1$

d'où $q \le n^2$. Or $q = \dim V$, donc $\boxed{\dim V \le n^2}$

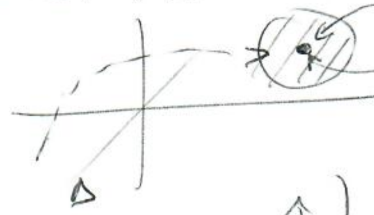
(6) Notons $\Delta = \{(x,x) \mid x\in\mathbb{R}^2\}$ (diagonale de $\mathbb{R}^2$)

Δ est un <u>fermé</u> de $\mathbb{R}^2$ (caractérisation séquentielle : si $u_n = (x_n,x_n)$ CV vers (a,b), alors $x_n \to a$, $x_n \to b$ donc $a=b$ et $(a,b)\in\Delta$)

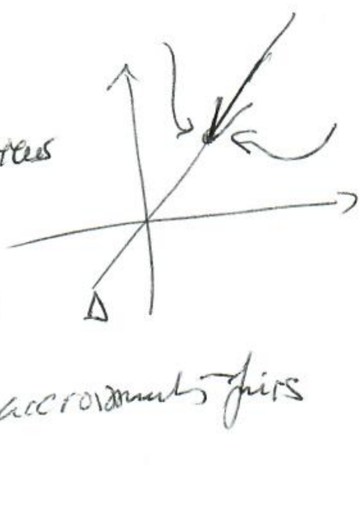
donc $\mathbb{R}^2\setminus\Delta$ est un ouvert.

Or F est C^0 sur $\mathbb{R}^2\setminus\Delta$ par les th généraux ($(x,y)\mapsto x$, $(x,y)\mapsto y$, $(x,y)\mapsto f(x)$, $(x,y)\mapsto f(y)$ sont C^0) ⊲ ($(x,y)\mapsto f(x)$ composée de $(x,y)\mapsto x$ et f par ex).

Il faut comprendre que, comme $\mathbb{R}^2\setminus\Delta$ est un <u>ouvert</u>, le cas de ces points est donc réglé, car pour tendre vers $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\Delta$, il faut entrer dans $\mathbb{R}^2\setminus\Delta$



En revanche, la continuité de F sur Δ (c'est à dire que $\Delta \to \mathbb{R}$, $(x,x) \mapsto F(x,x)$) n'est pas suffisante car les points de Δ ne sont pas intérieurs



On utilise la caractérisation séquentielle de la continuité.

Soit $((x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}^2$ qui tend vers $(a,a)\in\Delta$

Pour tout $n\in\mathbb{N}$: si $x_n \ne y_n$, on applique le th des accroissements finis et on fixe c_n entre x_n et y_n tq $\frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n} = f'(c_n)$

Si $x_n = y_n$, on pose $c_n = x_n = y_n$. ~~donc~~ $\forall n \in \mathbb{N}$, $F(x_n, y_n) = f'(c_n)$

Comme $x_n \to a$, $y_n \to a$ et $\min(x_n,y_n) \leq c_n \leq \max(x_n,y_n)$,

on a $c_n \to a$ donc (f' C^0) $f'(c_n) \to f'(a) = F(a,a)$

Conclusion $\underline{F \text{ est } C^0 \text{ en } (a,a)}$. et finalement F est C^0

en tout point de $\mathbb{R}^2$, donc sur $\mathbb{R}^2$.

(7) 1) $|f(x,y)| \leq x^2+y^2$ Or $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x^2+y^2 = 0$

donc $\boxed{\lim\limits_{(0,0)} f = 0}$

2) On pose $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ avec $r = \sqrt{x^2+y^2}$ r est en fait une fonction de (x,y)

et $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2} = 0$.

donc $f(x,y) = \frac{r^{a+b}\cos^a\theta \sin^b\theta}{r^2}$

$\underline{\text{Si } a+b>2}$ $|f(x,y)| \leq r^{a+b-2} \to 0$ donc $\lim\limits_{(0,0)} f = 0$.

$\underline{\text{Si } a+b<2}$ On choisit $\theta = \frac{\pi}{4}$

$|f(x,y)| = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{a+b} \cdot \frac{1}{r^{2-(a+b)}} \to +\infty$ qd $r \to 0$

donc f n'a pas de limite finie en $(0,0)$

$\underline{\text{Si } a+b=2}$ $f(x,y) = \cos^a\theta \sin^b\theta$

f est constante sur chaque demi-droite passant par 0 mais la valeur dépend de θ donc f n'a pas de limite en 0.

(par ex $f(x,0) = 0 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ mais $f(x,x) = \frac{1}{2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$)

3. Il suffit d'écrire $\sin t = t\,(1+\varphi(t))$ avec $\lim\limits_{t\to 0} \varphi(t) = 0$.

$\frac{(\sin x)(\sin y) - \sin(xy)}{x^2+y^2} = \frac{xy}{x^2+y^2}\left[(1+\varphi(x))(1+\varphi(y)) - (1+\varphi(xy))\right]$

Or $(|x|-|y|)^2 \geq 0$ donc $x^2+y^2 \geq 2|xy|$ d'où $\left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right| \leq 1/2$

D'où $|f(x,y)| \leq \frac{1}{2}\left|\underbrace{\varphi(x)}_{\to 0} + \underbrace{\varphi(y)}_{\to 0} + \underbrace{\varphi(x)\varphi(y)}_{\to 0} - \underbrace{\varphi(xy)}_{\to 0}\right| \longrightarrow 0$ $\underline{\text{qd } (x,y) \to (0,0)}$

(8) On comprendra de deux manières :

a) Soit F un sev de dim finie de E, evn de dim infinie

Alors $\boxed{\text{oui}}$ F est fermé. **Preuve** : Soit $a \in \bar{F}$.

Si (x_n) est une suite de F qui converge vers a,

on pose $G = F + \text{Vect}(a)$, on norme G par la norme de E

Alors G est de dim finie, donc F est fermé dans G,

et donc $a \in F$. Par caractérisation séquentielle, F est fermé

b) Si E est un evn de dim infini, tout sev est-il fermé ?

Alors $\boxed{\text{NON}}$

Par ex, prenons $E = C([0,1], \mathbb{R})$

et F l'ens des fonctions polynomiales sur $[0,1]$.

On norme E par $\|\cdot\|_\infty$

Posons $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ pour tout $x \in [0,1]$

Alors (P_n) est une suite de F qui converge uniformément (de par $\|\cdot\|_\infty$)

vers $\exp$ ($\underline{Rq}$ sur $[0,1]$, la convergence normale est claire ...)
(de la série)

Or $\exp$ n'est pas une fonction polynomiale (une fonction polynomiale est C^∞ et a dérivée n^e identiqt nulle pour un certain n). donc F n'est pas fermé

(9) . Commençons par les fermés. Soit B un fermé de F.

et (x_n) une suite convergente de $f^{-1}(B)$, c'à-dire :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) \in B$
- Il existe $a = \lim_{n \to +\infty} x_n \in E$

Comme $x_n \to a$ et f C^0 sur E (donc en a), on a $f(x_n) \to f(a)$

Or B est fermé et $(f(x_n))$ suite de B donc $f(a) \in B$

d'où $a \in f^{-1}(B)$ Conclusion, $\underline{f^{-1}(B) \text{ est fermé}}$

. Si B est ouvert, alors B^c est fermé

donc $f^{-1}(B^c)$ est fermé. Or $f^{-1}(B^c) = f^{-1}(B)^c$

donc $\underline{f^{-1}(B) \text{ est ouvert}}$

(10)

1. f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par les th généraux.

- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ (cf (7).1) donc f admet un ppc en $(0,0)$.

On pose $f(0,0) = 0$.

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \sin \frac{1}{x^2+y^2} + (x^2+y^2) \cdot \frac{-2x}{(x^2+y^2)^2} \cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$

$= \underbrace{2x \sin \frac{1}{x^2+y^2}}_{\to 0 \text{ qd } (x,y)\to(0,0)} - \frac{2x}{(x^2+y^2)^2} \cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$

Posons $h(x,y) = \frac{-2x}{(x^2+y^2)^2} \cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$ On a $h(0,y) = 0$ $(\forall y \neq 0)$

et $\forall x \neq 0$, $h(x,0) = \frac{-2}{x^3} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$ qui n'a pas de limite en 0

donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'a pas de limite en $(0,0)$ (et en tout cas ne tend pas vers 0 !)

et f n'est pas C^1 en $(0,0)$.

Rq $\forall x \neq 0$, $f(x,0) = x^2 \sin \frac{1}{x^2} = 0 + 0 \cdot x + o(x)$, encore vrai en $(0,0)$ car $f(0,0) = 0$.

($0 = f(0,0)$, $0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$)

donc $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0}$ et de même $\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0}$

2. Je préfère traiter des cas particuliers ;

- $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$; on a vu pas de limite en $(0,0)$

mais $f(x,0) = f(0,y) = 0$ donc prolongeons par $f(0,0)$.

f n'est pas continue en $(0,0)$ (car $\lim\limits_{x\to 0} f(x,x) = 1/2$, p. ex)

mais $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x,0) = 0$ donc $\exists \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

f non pas C^1 car pas continue !

- $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$. f est C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (Th gaux)

Raisonnement classique : $\left|\frac{2xy}{x^2+y^2}\right| \leq 1$ donc $|f(x,y)| \leq \left|\frac{y}{2}\right| \to 0$

donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ et f est PPC en $(0,0)$. On pose $f(0,0) = 0$

f est donc C^0 sur $\mathbb{R}^2$.

On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x,0) = 0$ donc $\exists \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$

$\forall y \in \mathbb{R}$, $f(0,y) = 0$ de $\exists \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

On calcule

$\forall (x,y) \neq (0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^2}{x^2+y^2} + xy^2 \frac{-2x}{(x^2+y^2)^2}$$

Posons $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ Alors $\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) = \sin^2\theta - 2\cos^2\theta\sin^2\theta$

$r = \sqrt{x^2+y^2}$ donc la limite qd $r \to 0$ dépend de θ !

La fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est donc pas C^0 en $(0,0)$ donc f n'est pas C^1.

<u>Rq</u> $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2yx}{x^2+y^2} + xy^2 \frac{-2y}{(x^2+y^2)^2}$

donc $\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) = 2\cos\theta\sin\theta - 2\cos\theta\sin^3\theta = 2(\cos^3\theta)(\sin\theta)$

donc $\frac{\partial f}{\partial y}$ n'est pas non plus C^0 en $(0,0)$.

(11) La méthode la plus simple est de considérer la fonction $\operatorname{sinc} : t \mapsto \begin{cases} \frac{\sin t}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$

On constate $\forall t \in \mathbb{R}$, $\operatorname{sinc}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} t^{2k}$ donc

sinc est DSE sur $\mathbb{R}$, et donc <u>C^∞ sur $\mathbb{R}$</u> (en particulier C^2)

Or si $x \neq y$, $\frac{\sin x - \sin y}{x-y} = \frac{2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)}{x-y} = \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\operatorname{sinc}\left(\frac{x-y}{2}\right)$

La formule $f(x,y) = \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \times \operatorname{sinc}\left(\frac{x-y}{2}\right)$ est encore vraie si $x = y$!

Par composition de fonctions C^2, $(x,y) \mapsto \operatorname{sinc}\left(\frac{x-y}{2}\right)$ est C^2 sur $\mathbb{R}^2$

$(x,y) \mapsto \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$ est C^2 sur $\mathbb{R}^2$

donc <u>f est C^2 sur $\mathbb{R}^2$</u>

(12) Traitons d'abord le cas $k=2$ pour comprendre ce qui va arriver. On fixe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors

$$(M+H)^2 = M^2 + MH + HM + H^2$$

Trace

donc $f(M+H) = f(M) + \operatorname{Tr}(MH) + \operatorname{Tr}(HM) + \operatorname{Tr}(H^2)$

$= f(M) + 2\operatorname{Tr}(MH) + \operatorname{Tr}(H^2)$

Or Tr est linéaire, donc lipschitzienne. Notons C la constante de Lipschitz.

On en déduit $|Tr(H^2)| \leq C \cdot \|H^2\|$

Si on choisit une norme sous multiplicative, par ex $A \longmapsto n\|A\|_\infty$

on a donc $|Tr(H^2)| \leq C \|H\|^2$ donc $\underline{Tr(H^2) = o(H)}$

Finalement : $f(M+H) = \underbrace{f(M)}_{\substack{\text{valeur}\\ \text{en } M}} + \underbrace{2Tr(MH)}_{\substack{\text{forme linéaire}\\ \text{de } H}} + \underbrace{o(H)}_{\text{reste négligeable}}$

On reconnaît $\boxed{df(M) : H \longmapsto 2Tr(MH)}$

Rq. Avec le produit scalaire classique, $Tr(MH) = \langle M^T, H\rangle$

donc $\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $df(M)(H) = \langle 2M^T, H\rangle$

c'est-à-dire $\boxed{\nabla f(M) = 2M^T}$ et donc $\boxed{\frac{\partial f}{\partial m_{ij}}(M) = 2\, m_{ji}}$

Cas général

$$(M+H)^k = M^k + \sum_{i=0}^{k-1} M^i H M^{k-1-i} + R(H)$$

$R(H)$ est la somme d'un nb fini de termes (précisément $\binom{k}{2} - (k+1)$ termes).

Chaque terme est un produit de k facteurs, avec au moins 2 fois le facteur H et les autres facteurs étant M.

Avec q fois le facteur H, le terme a une norme majorée par $\|M\|^{k-q}\|H\|^q$

donc $R(H) = o(H)$ C'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$,

pour $\|H\|$ assez proche de 0 : $\|R(H)\| \leq \varepsilon \|H\|$.

Or Tr est lipschitzienne, donc $|Tr(R(H))| \leq C \|R(H)\|$

$\leq C\varepsilon \|H\|$

Quitte à changer ε en ε/C, on constate $\underline{Tr(R(H)) = o(H)}$

Or $Tr\left(\sum_{i=0}^{k-1} M^i H M^{k-1-i}\right) = \sum_{i=0}^{k-1} Tr(M^i H M^{k-1-i}) = k\,Tr(M^{k-1}H)$

Conclusion $f(M+H) = f(M) + Tr(kM^{k-1}H) + o(H)$

et on reconnaît $\boxed{df(M) : H \longmapsto Tr(kM^{k-1}H)}$

(13) f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ (qui est un ouvert !)

$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x+y-2 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x+2y-1 \end{cases}$

d'où l'unique pt critique donné par $\begin{cases} 2x+y-2=0 \\ x+2y-1=0 \end{cases} \iff \underline{(x,y)=(1,0)}$

On étudie, pour x,y proches de 0 :

$$f(1+x,y)-f(1,0) = (1+x)^2+(1+x)y+y^2-2(1+x)-y+1$$
$$= \cancel{1}+\cancel{2x}+x^2+\cancel{y}+xy+y^2-\cancel{2}-\cancel{2x}-\cancel{y}+\cancel{1}$$
$$= x^2+xy+y^2 .$$

(On peut étudier $t\mapsto t^2+yt+y^2$ ($\Delta=-3y^2\leq 0\ldots$) ou réduire à la forme canonique)

$$= \left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4}$$
$$\geq 0$$

__Conclusion__ f admet un __minimum__ (absolu) au point $(1,0)$.

(14) Comme $x\longmapsto x_i$ (on note $x=(x_1,\ldots,x_n)$)

est C^0 sur $\mathbb{R}^n$, et donc $x\longmapsto x_1+\ldots+x_n-1$ également C^0,

on constate que K est un __fermé__ de $\mathbb{R}^n$

Or $\forall x\in\mathbb{R}^n$, $0\leq x_i\leq x_1+\ldots+x_n \leq 1$ donc K est __borné__

Comme f est également C^0 sur K (polynôme), __elle est donc bornée et atteint ses bornes__.

__Piège__ : K est inclus dans l'hyperplan (affine) H : $x_1+\ldots+x_n=1$,

qui n'a pas de point intérieur, donc $\mathring{K}=\emptyset$, donc calculer les points critiques de f est futile !

On considère $K'=\{(x_1,\ldots,x_{n-1})\in\mathbb{R}^{n-1} \;/\; x_1\geq 0,\ldots,x_{n-1}\geq 0,\ x_1+\ldots+x_{n-1}\leq 1\}$

Alors $\varphi : (x_1,\ldots,x_{n-1})\longmapsto (x_1,\ldots,x_{n-1},1-x_1-x_2-\ldots-x_{n-1})$

définit une bijection de K' sur K.

On note $g=f\circ\varphi$. Alors $g(K')=f(K)$ donc on est ramené au pb des extrema de g.

Reprenons : $g : (x_1, \dots, x_{n-1}) \longmapsto x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 + (1 - x_1 - x_2 - \dots - x_{n-1})^2$

$K' \longrightarrow \mathbb{R}$

avec $K' = \{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \mid x_1 \geq 0, \dots, x_{n-1} \geq 0, x_1 + \dots + x_{n-1} \leq 1\}$

On admet $\overset{\circ}{K'} = \{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \mid x_1 > 0, x_2 > 0, \dots, x_{n-1} > 0, x_1 + \dots + x_{n-1} < 1\}$

Si g atteint un extremum sur $\overset{\circ}{K}$, le point est critique.

Or $\quad \dfrac{\partial g}{\partial x_i}(x) = 2x_i - 2(1 - x_1 - x_2 \dots - x_{n-1}) = 0$

$\iff x_i + x_1 + \dots + x_{n-1} = 1$

On résout le système :

$$\begin{cases} x_1 + x_1 + \dots + x_{n-1} = 1 \\ x_2 + x_1 + \dots + x_{n-1} = 1 \\ \vdots \\ x_{n-1} + x_1 + \dots + x_{n-1} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + x_1 + \dots + x_{n-1} = 1 \\ x_2 - x_1 = 0 \\ x_3 - x_1 = 0 \\ \vdots \\ x_{n-1} - x_1 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} n x_1 = 1 \\ x_2 = \dots = x_{n} \end{cases} \iff \boxed{x_1 = \dots = x_{n-1} = \frac{1}{n}}$$

On note : $\boxed{g\left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right) = n \times \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}}$

Reste à étudier la situation sur la frontière de K', c'est-à-dire qd l'une des coordonnées $= 0$ ou bien $x_1 + \dots + x_{n-1} = 1$

Ceci revient à étudier les extremums de $f(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_n^2$ sur $K_i = K \cap \{x \mid x_i = 0\}$, c'est à dire à étudier le même problème mais pour $n-1$ au lieu de n.

On va donc reprendre la stratégie et répondre au problème posé par récurrence sur n.

$(n=1)$ $\quad K = \{1\} \quad f(x_1) = x_1^2 \quad f$ est constante et vaut 1 !

$(n=2)$ $\quad K = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 = 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\} \quad f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$

donc $K' = \{x_1 \in \mathbb{R}, \ 0 \leq x_1 \leq 1\} \quad g(x_1) = x_1^2 + (1 - x_1)^2$

$= 1 - 2x_1 + 2x_1^2$

$g'(x_1) = -2 + 4x_1 \quad$ tableau de variations

x_1	0		$1/2$		1
$g'(x_1)$		$-$	0	$+$	
$g(x_1)$	1	$\searrow$	$1/2$	$\nearrow$	1

donc $\begin{cases} \max\limits_{K} f = \max\limits_{K'} g = 1 \quad \text{atteint aux éléments } (1,0) \text{ et } (0,1) \text{ de } K \\ \min\limits_{K} f = 1/2 \quad \text{atteint au point } (1/2, 1/2) \end{cases}$

Soit $n \geq 3$. On suppose que le problème à l'ordre $n-1$,

c'à-d max et min de $x_1^2+\dots+x_{n-1}^2$ sur $\{(x_1,\dots,x_{n-1}) \mid x_1\geq 0,\dots,x_{n-1}\geq 0,\ x_1+\dots+x_{n-1}=1\}$

a pour solution : minimum $\frac{1}{n-1}$ atteint en $(\frac{1}{n-1},\dots,\frac{1}{n-1})$

maximum 1 atteint aux points $(1,0,\dots,0)\in\mathbb{R}^{n-1}$
$(0,1,0,\dots,0)$ etc

(donc $n-1$ points).

On revient maintenant au problème à l'ordre n.

D'après l'hypothèse de récurrence, pour tout $i\in[\![1,n]\!]$,

$\min\limits_{K_i} f = \frac{1}{n-1}$, atteint au point x tq $\begin{cases} k\neq i \Rightarrow x_k=\frac{1}{n-1}\\ x_i=0\end{cases}$

$\max\limits_{K_i} f = 1$, atteint aux points tq une des coordonnées $=1$ (nec. pas la i-ème !), et les autres $=0$.

On a vu $f(\frac1n,\dots,\frac1n)=\frac1n<\frac1{n-1}$

donc $\min f$ n'est pas atteint sur les K_i, donc $\min g$ est atteint dans $\mathring{K'}$,

et donc nécessairement en $(\frac1n,\dots,\frac1n)\in\mathbb{R}^{n-1}$

d'où $\boxed{\min\limits_K f = f(\frac1n,\dots,\frac1n)=\frac1n}$.

Comme g n'est pas constante $\max\limits_{K'} g$ n'est pas atteint dans $\mathring{K'}$ (un seul pt critique), donc $\max\limits_K f = \max\limits_{K'} g$ est atteint dans $K_1\cup\dots\cup K_n$. Conclusion $\boxed{\max\limits_K f = 1}$, atteint pour $(1,0,\dots,0)$, $(0,1,0,\dots,0)$, $\dots$, $(0,\dots,0,1)$.

ce qui complète la récurrence et répond à la question.

(15) $\mathbb{R}_+^{*2}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, on calcule les points critiques :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y}{1+y}\left(\frac{(1+x)(x+y)-x(1+2x+y)}{(1+x)^2(x+y)^2}\right)=\frac{y}{1+y}\,\frac{(y-x^2)}{(1+x)^2(x+y)^2}$$

Et par symétrie : $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{x}{1+x}\,\frac{(x-y^2)}{(1+y)^2(x+y)^2}$

donc $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \iff \begin{cases}y=x^2\\x=y^2\end{cases} \iff \begin{cases}x=x^4\\y=x^2\end{cases} \iff \begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$ (car $\mathbb{R}_+^{*2}$!)

Or $f(1,1)=1/8$.

De plus $\forall(x,y)\in\mathbb{R}_+^{*2}$ $\frac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)} = \frac{\sqrt x}{1+x}\times\frac{\sqrt y}{1+y}\times\frac{\sqrt{xy}}{x^2+y^2}\le \frac12\times\frac12\times\frac12=\frac18$ $\left(\forall\ \left|\frac{ab}{a^2+b^2}\right|\le\frac12\right)$

donc f admet son maximum en $(1,1)$.