Normes

① Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ et $\forall t\in\mathbb{R}$, $f(t)=\dfrac{|y+tx|}{1+t^2}$

f est C^0 sur $\mathbb{R}$ et $\lim\limits_{+\infty} f=\lim\limits_{-\infty} f=0$ donc (classique) f bornée sur $\mathbb{R}$

d'où $\exists \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} f(t)$, qui est de plus positif car $f\geq 0$.

N est donc bien défini, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$

- $N(x,y)=0 \Leftrightarrow \forall t\in\mathbb{R},\ y+tx=0 \Leftrightarrow \underline{y=x=0}$ (fonction affine nulle)

- $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $\left|\dfrac{\lambda y+t\lambda x}{1+t^2}\right| = |\lambda|\,\dfrac{|y+tx|}{1+t^2}$

  donc par passage à la borne sup dans $\mathbb{R}_+$: $\underline{N(\lambda x,\lambda y)=|\lambda|\cdot N(x,y)}$

- Si $(x,y),(x',y')\in\mathbb{R}^2$:

$\forall t\in\mathbb{R}$, $\dfrac{|(y+y')+t(x+x')|}{1+t^2} \leq \dfrac{|y+tx|}{1+t^2}+\dfrac{|y'+tx'|}{1+t^2}\leq N(x,y)+N(x',y')$

puis passage au sup : $\underline{N(x+x',y+y')\leq N(x,y)+N(x',y')}$

Conclusion N définit une norme sur $\mathbb{R}^2$

Boule unité $N(x,y)\leq 1 \Leftrightarrow \forall t\in\mathbb{R},\ |y+tx|\leq 1+t^2$

$\Leftrightarrow \forall t\in\mathbb{R}\quad (1+t^2)^2-(y+tx)^2\geq 0$

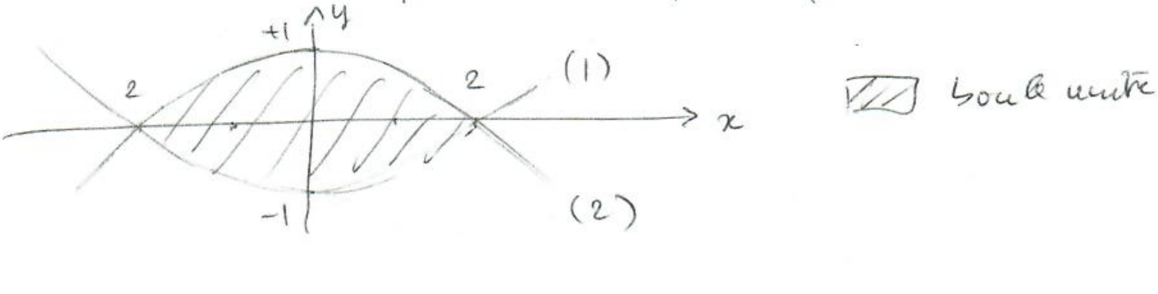
$\Leftrightarrow \forall t\in\mathbb{R}\quad \underbrace{(t^2+tx+y+1)}_{p(t)}\ \underbrace{(t^2-tx-y+1)}_{q(t)}\geq 0.$

On remarque $p(t)=q(t)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} tx+y=0\\ t^2+1=0\end{cases}$ donc p et q n'ont pas de racine commune

Si, p.ex, p admet une racine simple t_1, alors le produit pq change de signe en t_1 : contradiction.

On obtient la CNS $\Delta_p\leq 0$, $\Delta_q\leq 0$

i.e : $\begin{cases} x^2-4(y+1)\leq 0\\ x^2-4(-y+1)\leq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\geq \frac{1}{4}x^2-1 & (1)\\ y\leq -\frac{1}{4}x^2+1 & (2)\end{cases}$



(2) Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. $[t\mapsto |x+ty|]$ est C^0 sur le segment $[0,1]$, donc est bornée et atteint ses bornes.
Ainsi N est bien défini sur $\mathbb{R}^2$ et $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$.

- $N(x,y)=0 \iff \forall t\in[0,1],\ x+ty=0 \iff x=y=0$
(fonction affine avec au moins 2 racines)

- $\forall \lambda\in\mathbb{R},\ \forall t\in[0,1],\ |\lambda x+t\lambda y| = |\lambda|\ |x+ty|$
donc $N(\lambda x,\lambda y) = |\lambda|\ N(x,y)$ (passage à la borne sup dans $\mathbb{R}_+$)

- $\forall (x,y),(x',y')\in\mathbb{R}^2$
$\forall t\in[0,1] : |(x+x')+t(y+y')| \le |x+ty| + |x'+ty'| \le N(x,y)+N(x',y')$
puis passage au sup : $N(x+x',y+y') \le N(x,y)+N(x',y')$

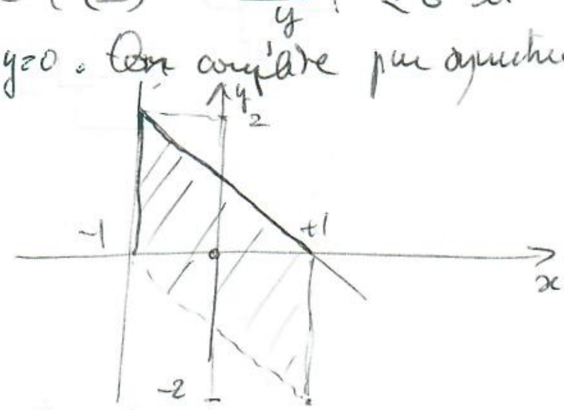
Conclusion : N est bien une norme sur $\mathbb{R}^2$

Boule unité Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.
$N(x,y)\le 1 \iff \forall t\in[0,1],\ (x+ty)^2\le 1$
$\iff \forall t\in[0,1]\ \ (yt+x)^2-1 \le 0$

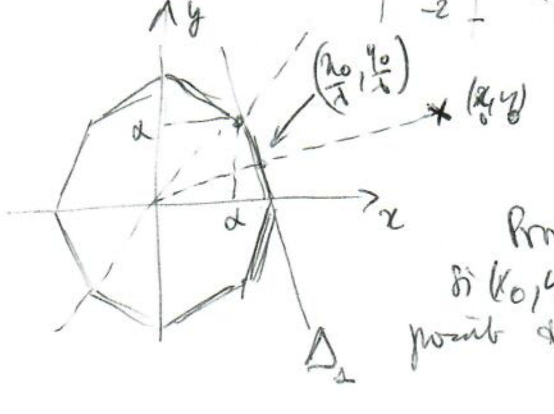
Supposons $y>0$ On a un polynôme du 2^{nd} degré, de coeff dominant y^2, qui doit être ≤ 0 sur $[0,1]$ donc la CNS est que $[0,1]$ est entre les racines, qui sont : $\frac{-x-1}{y}$ et $\frac{-x+1}{y}$

D'où $N(x,y)\le 1 \iff \frac{-x-1}{y} \le 0$ et $\frac{-x+1}{y} \ge 1 \iff \begin{cases} x\ge -1 \\ x+y\le 1 \end{cases}$

Cette CNS est encore vraie si $y=0$. On complète par symétrie par rapport à $(0,0)$



(3)



Notons $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$
Remarque : l'octogone est inscrit dans le cercle trigonométrique.
Principe de construction de la norme N
Si $(x_0,y_0)\ne(0,0)$, il existe $\lambda>0$ tq $\left(\frac{x_0}{\lambda},\frac{y_0}{\lambda}\right)$ est un point de l'octogone. On a

alors $N\left(\frac{x_0}{\lambda},\frac{y_0}{\lambda}\right)=1$ donc $\lambda = N(x_0,y_0)$

P. exemple, si $0 \le y_0 \le x_0$ (1^{e} octant)

L'équation de la droite qui supporte le côté (Δ_1 au-dessous) est donnée par $\begin{vmatrix} x-1 & \alpha-1 \\ y & \alpha \end{vmatrix} = 0 \iff \boxed{\alpha(x-1)-(\alpha-1)y=0}$

(droite passant par $(1,0)$ et (α,α), de vecteur directeur $\begin{pmatrix}\alpha-1\\ \alpha\end{pmatrix}$)

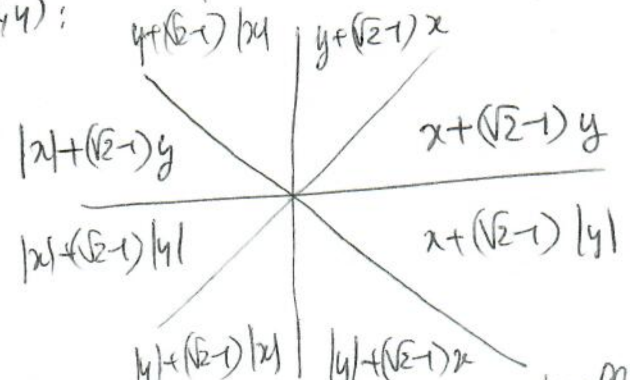
On a donc $\alpha\left(\frac{x_0}{\lambda}-1\right)-(\alpha-1)\frac{y_0}{\lambda}=0$

$$\iff \alpha(x_0-\lambda)-(\alpha-1)y_0=0$$

$$\iff \lambda = \frac{\alpha x_0+(1-\alpha)y_0}{\alpha} = x_0+(\sqrt{2}-1)y_0$$

rappel: $\left(\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

On peut procéder de même pour les 8 octants, ce qui donne $\underline{\underline{8}}$ formules pour $N(x,y)$:



En fait, on peut s'épargner beaucoup d'efforts en utilisant les symétries de l'octogone. On obtient:

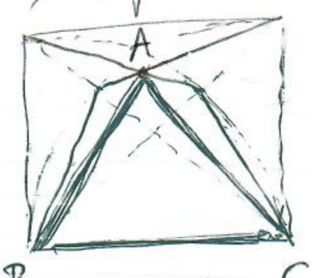
$$N(x,y) = \max(|x|,|y|)+(\sqrt{2}-1)\min(|x|,|y|)$$

Or $\max(|x|,|y|) = \|(x,y)\|_\infty$

$\min(|x|,|y|) = |x|+|y| - \max(|x|,|y|) = \|(x,y)\|_1 - \|(x,y)\|_\infty$

D'où $N(x,y) = (2-\sqrt{2})\,\|(x,y)\|_\infty + (\sqrt{2}-1)\,\|(x,y)\|_1$

Il reste à vérifier que cette formule définit bien une norme, ce qui est facile, en utilisant (sans les redémontrer) les propriétés des normes classiques $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.



(ABC) est un triangle équilatéral pour N.

Triangle équilatéral BAC sur une droite horizontale. On construit deux "cercs" d'octogones de centre B passant par C (resp C et B). Les octogones ont des axes de symétrie // axes et bissectrices du repère (dessin + conséquence si $(BC) // (Ox)$).

(4) Ambiguïté ! Ici il faut comprendre que P a un coefficient dominant $=1$. $\quad P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0$

($n \geq 1$ sinon P n'a pas de racine !) donc $N(P) = 1 + |a_{n-1}| + \dots + |a_0| \geq 1$

Soit r une racine ; supposons $|r| > N(P)$ (donc $|r| > 1$)

On a $\quad r^n = -a_{n-1}r^{n-1} - \dots - a_0$

$$\begin{aligned} \text{donc } |r|^n &\leq |a_{n-1}|\,|r|^{n-1} + |a_{n-2}|\,|r|^{n-2} \dots + |a_0| \qquad (IT) \\ &\leq |a_{n-1}|\,|r|^{n-1} + |a_{n-2}|\,|r|^{n-1} + \dots + |a_0|\,|r|^{n-1} \quad (\text{car } |r|>1) \\ &\leq N(P)\cdot|r|^{n-1} \quad \text{donc } |r| \leq N(P) \dots \text{contradiction} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{donc } |r| \leq N(P) \ !}$

<u>Rq</u> Il s'agit d'un pb de <u>localisation</u> des racines, qui se trouvent donc, dans le plan complexe, dans le disque* de centre 0 et de rayon $N(P)$. (* fermé)

(5) 1. • Pour tout $f \in E$, f et f'' sont continues, donc également $f+f''$.

On a donc $N(f) = \|f + f''\|_\infty$

On en déduit immédiatement que N est bien définie, positive, homogène, et l'inégalité triangulaire (via la linéarité de la dérivation) :

$$\|(f+g) + (f+g)''\|_\infty = \|f+f'' + g+g''\|_\infty \leq \|f+f''\|_\infty + \|g+g''\|_\infty$$

Reste à montrer $\quad N(f)=0 \Rightarrow f=0$.

Or $N(f) = 0 \Rightarrow \begin{cases} f''+f=0 \\ f(0)=0 \\ f'(0)=0 \end{cases}$ Ce problème de Cauchy admet, par théorème une unique solution, évidente ici : <u>$f=0$</u>

<u>Donc N est une norme sur E</u>

• Pour tout $f \in E$, $|f|$ et $|f''|$ sont C^0 donc $|f|+|f''|$ C^0 sur le segment $[0,1]$ et N_S est bien définie, positive.

• $N_S(f) = 0 \Rightarrow \forall x \in [0,1],\ \underbrace{|f(x)|}_{\geq 0} + \underbrace{|f''(x)|}_{\geq 0} = 0 \Rightarrow$ <u>$f=0$</u>

• $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall x \in [0,1]$ $\quad |\lambda f(x)| + |\lambda f''(x)| = |\lambda| \cdot (|f(x)| + |f''(x)|)$

donc (passage au sup) $\quad N_S(\lambda f) = |\lambda|\, N_S(f)$

• IT facile $\quad$ donc <u>N_S norme sur E</u>

⑤ 2. $\left| \begin{array}{l} \forall f \in E \\ \forall x \in [0,1], \end{array} \right.$ $|f(x)+f''(x)| \leq |f(x)| + |f''(x)| \leq N_S(f)$

donc (sup) $\boxed{N(f) \leq N_S(f)}$

3. Le paramètre x est à la fois dans la fonction et dans la borne de l'intégrale, c'est une situation compliquée.
La meilleure stratégie est de développer le sinus pour se débarrasser du x dans la fonction :

$$I(x) = \int_0^x \sin(x-t)\,(f(t)+f''(t))\,dt = (\sin x)\int_0^x (\cos t)\,(f(t)+f''(t))\,dt$$
$$- (\cos x)\int_0^x (\sin t)(f(t)+f''(t))\,dt$$

$x \mapsto I(x)$ est clairement dérivable (f'' est C^0, pas plus a priori)

donc $\forall x \in [0,1]$ $I'(x) = (\cos x)\int_0^x (\cos t)(f(t)+f''(t))\,dt$
$$+ (\sin x)\cancel{.(\cos x)(f(x)+f''(x))}$$
$$+ (\sin x)\int_0^x (\sin t)(f(t)+f''(t))\,dt$$
$$\cancel{-(\cos x)(\sin x)(f(x)+f''(x))}.$$

$x \mapsto I'(x)$ est encore dérivable et :

$\forall x \in [0,1]$ $I''(x) = -(\sin x)\int_0^x (\cos t)(f(t)+f''(t))\,dt$
$$+ (\cos x)^2\,(f(x)+f''(x))$$
$$+ (\cos x)\int_0^x (\sin t)(f(t)+f''(t))\,dt$$
$$+ (\sin x)^2\,(f(x)+f''(x))$$
$$= -I(x) + f(x) + f''(x)$$

donc f est solution du pb de Cauchy :

$\left\{ \begin{array}{l} y''+y = I''+I \\ y(0)=0 \\ y'(0)=0 \end{array} \right.$ Or I est une solution évidente ($I(0) = I'(0) = 0$ est clair)

donc (th de Cauchy)

$\boxed{f = I}$ cqfd.

Rq $N_S \leq 3N$

Difficulté : majorer $|f''(x)|$

En fait, on peut faire

$$\forall x\in[0,1],\quad |f''(x)| = |f(x)+f''(x) - f(x)|$$
$$\leq |f(x)+f''(x)| + |f(x)|$$
$$\leq N(f) + |f(x)|$$

Or d'après l'égalité démontrée au 3.

$$\forall x\in[0,1],\quad |f(x)| \leq \int_0^x \underbrace{|\sin(x-t)|}_{\leq 1}\ \underbrace{|f(t)+f''(t)|}_{\leq N(f)}\,dt$$
$$\leq x\,N(f) \leq N(f)$$

On en déduit $|f''(x)| \leq 2N(f)$

D'où $\forall x\in[0,1]\quad |f(x)|+|f''(x)| \leq 3N(f)$ et donc $\boxed{N_S \leq 3N}$

(6) • La partie difficile est de montrer

$$\forall f\in E,\quad f(0)f(1)+\int_0^1 f'(t)^2\,dt \geq 0.$$

L'intégrale est ≥ 0 fait penser à Cauchy-Schwarz :

$$f(1) = f(0) + \int_0^1 f'(t)\,dt$$

donc $(f(1)-f(0))^2 = \Big(\int_0^1 \underbrace{f'(t)}_{=f'(t)\times 1}\,dt\Big)^2 \leq \underbrace{\int_0^1 f'(t)^2dt \times \int_0^1 1\,dt}_{=\int_0^1 f'(t)^2dt}$

donc $f(0)f(1)+\int_0^1 f'(t)^2\,dt \geq (f(1)-f(0))^2 + f(0)f(1)$
$$= f(1)^2 - f(0)f(1) + f(0)^2$$

On peut étudier $\lambda \longmapsto \lambda^2-\lambda f(0)+f(0)^2$: $\Delta = -3f(0)^2 \leq 0$ donc le trinôme est de signe (positif) constant.

(Rq on peut aussi écrire $= \left(f(1)-\frac{f(0)}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}f(0)^2 \geq 0$)

Ccl On a bien $\forall f\in E,\quad f(0).f(1) + \int_0^1 f'(t)^2dt \geq 0$

et N est bien défini sur E

• La forme de l'expression nous suggère plutôt une norme euclidienne

Il serait très maladroit d'attaquer N directement.
On définit le produit scalaire (à vérifier)

$$\langle f,g\rangle = \frac{f(0)g(1)+f(1)g(0)}{2} + \int_0^1 f'(t)g'(t)\,dt$$

On obtient cette formule par dédoublement ou en appliquant la formule de polarisation : Il faut bien sûr vérifier qu'il s'agit bien d'un produit scalaire !

- symétrie claire (construit ainsi...)
- bilinéarité claire (linéarité de l'intégration, de la dérivation, du produit).

positivité : démontrée ci-dessous !

On vérifie la définie positivité : Soit $f\in E$ tq

$$f(0)f(1) + \int_0^1 f'(t)^2\,dt = 0.$$

(Attention : A priori, on ne peut rien affirmer du signe de $f(0)f(1)$!)
D'après l'étude ci-dessous, on a donc $f(1)^2 - f(0)f(1) + f(0)^2 = 0$
donc $f(1)$ est racine de $X^2 - f(0)X + f(0)^2$, de discriminant $\Delta = -3f(0)^2$.
On en déduit $f(0)=0$ et donc $f(1)=0$.
Il reste alors $\int_0^1 f'(t)^2\,dt$ et f'^2 est C^0, ≥ 0 sur $[0,1]$
donc $\forall t\in[0,1]$, $f'(t)=0$, donc f est constante sur $[0,1]$
or $f(0)=0$ d'où $f=0$, cqfd.
Conclusion $\langle\cdot,\cdot\rangle$ définit bien un produit scalaire sur E et N est la norme euclidienne associée (donc c'est une norme sur E !).

(7) Soit $P\in E$.

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad |\theta_n(P)| \leq \int_0^1 |P(t)|\,t^n\,dt \leq \int_0^1 |P(t)|\,dt$$

donc la suite $(|\theta_n(P)|)$ est majorée et N est bien définie sur P, à valeurs ≥ 0.

- Soit $P\in E$ tq $N(P)=0$. On a donc $\forall n\in\mathbb{N}$, $\int_0^1 P(t)t^n\,dt = 0$.

Supposons $P(t)=\sum_{k=0}^d a_k t^k$. On a $\sum_{k=0}^d \int_0^1 P(t)t^k\,dt = 0$ donc $\int_0^1 P(t)^2\,dt = 0$

$P^2 \geq 0$, C^0 sur $[0,1]$ donc $P=0$ sur $[0,1]$ donc $\underline{P=0}$ (infinité de racines)

- Si $\lambda \in \mathbb{R}$, $P \in E$, alors

$\forall n \in \mathbb{N}$, $|\theta_n(\lambda P)| = |\lambda| |\theta_n(P)|$ (clair)

donc $N(\lambda P) = |\lambda| \, N(P)$ (prop. sur sup des $\mathbb{R}_+$)

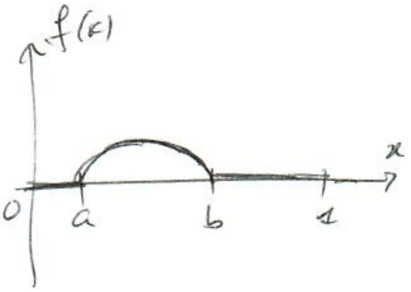
- Enfin si $P, Q \in E$ alors

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\theta_n(P+Q) = \theta_n(P) + \theta_n(Q)$

donc $|\theta_n(P+Q)| \leq |\theta_n(P)| + |\theta_n(Q)| \leq N(P) + N(Q)$

d'où $\underline{N(P+Q) \leq N(P) + N(Q)}$

Conclusion $\underline{N \text{ est une norme sur } E}$.



(8). Soient $0 \leq a < b \leq 1$ tq $\varphi = 0$ sur $[a,b]$

($\Rightarrow$) (par contraposée) On considère $f : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [a,b] \\ (b-x)(x-a) & \text{si } x \in [a,b] \end{cases}$

Alors $f \neq 0$ et $N_\varphi(f) = 0$ donc $\underline{N_\varphi \text{ n'est pas une norme}}$

- On suppose que φ n'est identiquement nulle sur aucun intervalle

($\Leftarrow$) non trivial ! Soit $f \in E$ tq $N_\varphi(f) = 0$

Supposons $f \neq 0$; alors comme f est C^0, il existe $0 \leq a < b \leq 1$

tq $\forall x \in [a,b]$, $\underline{f(x) \neq 0}$: f est (toujours par continuité)

de signe constant sur $[a,b]$, on suppose par ex $f > 0$ sur $[a,b]$.

On a alors $0 = \int_0^1 |f| \varphi \geq \int_a^b f \varphi$ (≥ 0) donc $\int_a^b f\varphi = 0$

Or $f\varphi$ C^0, ≥ 0 sur $[a,b]$ donc $f\varphi = 0$ sur $[a,b]$ et $\varphi = 0$

sur $[a,b]$. $\underline{\text{Contradiction}}$. Donc $\boxed{f = 0}$.

Les autres axiomes sont facilement vérifiés, donc N_φ est une norme sur E.

(9) Une matrice A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est trigonalisable (χ scindé)

Si elle n'est pas DZ, alors elle admet une vap double et

On peut écrire $A = P\begin{pmatrix}\alpha & \lambda \\ 0 & \alpha\end{pmatrix}P^{-1}$ avec $\boxed{\lambda \neq 0}$ (non DZ!) et $P \in GL_2(\mathbb{C})$

On montre par récurrence $\forall k \geq 1$, $\begin{pmatrix}\alpha & \lambda \\ 0 & \alpha\end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix}\alpha^k & k\lambda\alpha^{k-1} \\ 0 & \alpha^k\end{pmatrix}$

et comme $A^k = P\begin{pmatrix}\alpha^k & k\lambda\alpha^{k-1} \\ 0 & \alpha^k\end{pmatrix}P^{-1}$, A^k admet une limite finie ssi (α^k) et $(k\lambda\alpha^{k-1})$ convergent, donc ssi $\boxed{|\alpha| < 1}$

($\underline{\text{Rq}}$ si $|\alpha| = 1$, $|k\lambda\alpha^{k-1}| = k|\lambda| \longrightarrow +\infty$)

Si A est DZ et $A = P\begin{pmatrix}\alpha & 0 \\ 0 & \beta\end{pmatrix}P^{-1}$

Alors $A^k = P\begin{pmatrix}\alpha^k & 0 \\ 0 & \beta^k\end{pmatrix}P^{-1}$ donc (A^k) CV $\Leftrightarrow$ les valeurs propres sont $= 1$ ou de module < 1

$\underline{\text{Bilan}}$ (A^k) CV ssi
- $A = I_2$
- A admet 1 unique valeur propre de module < 1
- A admet 2 valeurs propres $\neq$, soit égale à 1, soit de module < 1

(10) La norme ici est la norme euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^n$.

1) L'idée est de travailler avec ${}^tAA$, qui est $\underline{\text{symétrique}}$.

Elle apparaît naturellement dans : $\|AX\|^2 = {}^tX\,\underline{{}^tAA}X$

Soit $(X_1, \dots, X_n)$ une BON de vecteurs propres de ${}^tAA$ (th spectral)

On pose ${}^tAAX_i = \lambda_i X_i$ $\quad i \in [\![1, n]\!]$.

On remarque ${}^tX_i\,{}^tAAX_i = \lambda_i\,{}^tX_iX_i$ donc $\underline{\lambda_i = \|AX_i\|^2 \geq 0}$

Quitte à réindexer, on suppose $\boxed{(0 \leq)\ \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n}$

Soit $X \in \mathbb{R}^n$. On décompose $X = \sum_{i=1}^n x_i X_i$

Alors ${}^tAAX = \sum_{i=1}^n x_i\lambda_i X_i$ et donc ${}^tX\,{}^tAAX = \langle X, {}^tAAX\rangle \overset{(BON)}{=} \sum_{i=1}^n x_i^2\lambda_i$

D'où $\|AX\|^2 = {}^tX\,{}^tAAX \leq \sum_{i=1}^n \lambda_n x_i^2 = \lambda_n \|X\|^2$

Pour $X \neq 0$, on a donc $\dfrac{\|AX\|}{\|X\|} \leq \sqrt{\lambda_n}$

donc $\boxed{\sup\limits_{X\neq 0} \dfrac{\|AX\|}{\|X\|} \leq \sqrt{\lambda_n}}$

Or si $X = X_n$, $\|AX_n\|^2 = {}^tX_n\, {}^tAAX_n = \lambda_n\, {}^tX_n X_n = \lambda_n$

donc $\dfrac{\|AX_n\|}{\|X_n\|} = \sqrt{\lambda_n}$: la borne supérieure est donc atteinte, d'où

$\boxed{\sup\limits_{X\neq 0} \dfrac{\|AX\|}{\|X\|} = \sqrt{\lambda_n}}$ avec $\lambda_n = \max Sp({}^tAA)$

2. N est donc bien définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
  Si $N(A) = 0$, alors $\underline{\forall X \in \mathbb{R}^n,\ AX = 0}$, donc $A = 0$
  ceci signifie que l'endo can. associé est nul!

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
  $\forall X \neq 0$, $\dfrac{\|\lambda AX\|}{\|X\|} = |\lambda| \dfrac{\|AX\|}{\|X\|}$ donc $N(\lambda A) = |\lambda| N(A)$ (passage au sup)

- Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
  $\forall X \neq 0$, $\|(A+B)X\| = \|AX + BX\| \leq \|AX\| + \|BX\|$
  donc $\dfrac{\|(A+B)X\|}{\|X\|} \leq \ldots \leq N(A) + N(B)$ puis passage au sup :
  $\underline{N(A+B) \leq N(A) + N(B)}$

<u>Conc°</u> $\underline{N \text{ est bien une norme sur } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$

$\forall X \neq 0$, $\|ABX\| \leq N(A)\|BX\|$ car par définition, si $Y \neq 0$ $\|AY\| \leq N(A)\|Y\|$ ce qui est trivialement vrai si $Y = 0$.

et de même $\|BX\| \leq N(B)\|X\|$

donc $\|ABX\| \leq N(A)N(B)\|X\|$

D'où $\dfrac{\|ABX\|}{\|X\|} \leq N(A)N(B)$ et par passage au sup $\boxed{N(AB) \leq N(A)N(B)}$

(norme $\underline{\text{sous-multiplicative}}$)

3) Avec 2, on montre par récurrence

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad N(A^k) \leq N(A)^k$$

On a $N(A) < 1$ donc $N(A)^k \to 0$ d'où $\boxed{A^k \to 0}$

4) On considère la 2^e colonne, c'est-à-dire $A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

Notons $e = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ On a $\|e\| = 1$

et $Ae = \begin{pmatrix}1\\1/2\end{pmatrix}$ donc $\|Ae\| = \sqrt{5/4}$ d'où $\underline{N(A) \geq \frac{\|Ae\|}{\|e\|} = \sqrt{5/4} > 1}$

Or par récurrence, on peut vérifier :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad A^k = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^k} & k\frac{1}{2^{k-1}} \\ 0 & \frac{1}{2^k} \end{pmatrix} \text{ donc } \underline{A^k \to 0}$$

On constate que la condition $N(A) < 1$ n'est pas nécessaire (comparer avec 9). (ni même $N(A) \leq 1$)

11 1) On note $A_k = (a_{ij}^{(k)})$ et $B_k = (b_{ij}^{(k)})$

et $A_k B_k = (w_{ij}^{(k)})$. Pour tout (i,j), $(a_{ij}^{(k)})_k$ et $(b_{ij}^{(k)})_k$ $\underline{\text{CV}}$

Alors $w_{ij}^{(k)} = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}^{(k)} b_{\ell j}^{(k)}$ donc $(w_{ij}^{(k)})_k$ CV,

donc $(A_k B_k)_k$ <u>converge</u>. En particulier si $A = (a_{ij})$

et $B = (b_{ij})$, on a $a_{i\ell}^{(k)} \to a_{i\ell}$, $b_{\ell j}^{(k)} \to b_{\ell j}$.

donc $w_{ij}^{(k)} \to \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell} b_{\ell j}$ (terme général de AB)

d'où $\underline{A_k B_k \to AB}$.

<u>Rédaction + courte :</u> $(X, Y) \to XY$ est bilinéaire

sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc continue ...

2) NON pour les matrices de passage changent aussi

p. ex : $A_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1/k \end{pmatrix}$ et $B_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/k \end{pmatrix}$ sont semblables

(A_k est DZ car χ_{A_k} est SRS)

Cependant $A_k \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$B_k \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

donc les limites ne sont pas semblables !

3) Notons $P = \lim\limits_{k \to +\infty} A^k$.

Alors $A^{2k} \to P$ Or $A^{2k} = A^k \times A^k$

donc $A^{2k} \to P^2$. Par unicité de la limite : $\boxed{P^2 = P}$

(12) 1) Soit $A = (a_{ij})$ $B = (b_{ij})$ et $(AB) = (w_{ij})$

Alors $\forall (i,j)$ $w_{ij} = \sum\limits_{\ell=1}^{n} a_{i\ell} b_{\ell j}$ donc $|w_{ij}| \leq \sum\limits_{\ell=1}^{n} |a_{i\ell}| \cdot |b_{\ell j}|$

$\leq \sum\limits_{\ell=1}^{n} \|A\|_\infty \|B\|_\infty = n \|A\|_\infty \|B\|_\infty$

Par passage au max :

$$\|AB\|_\infty \leq n \|A\|_\infty \cdot \|B\|_\infty$$

Par récurrence, on montre facilement

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\|A^k\|_\infty \leq n^{k-1} \|A\|_\infty^k$

donc $\boxed{\|A^k\|_\infty \leq n^k \|A\|_\infty^k}$

2) Notons $E_m = \sum\limits_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} A^k = (e_{ij}^{(m)})$ et $A^k = (a_{ij}^{(k)})$

Alors $e_{ij}^{(m)} = \sum\limits_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} a_{ij}^{(k)}$ Or $\frac{|a_{ij}^{(k)}|}{k!} \leq \frac{\|A^k\|_\infty}{k!} \leq \frac{n^k \|A\|_\infty^k}{k!}$

et la série $\sum \frac{n^k \|A\|_\infty^k}{k!}$ CV (sa somme est $\exp(n\|A\|_\infty)$). Par comparaison, $\sum \frac{a_{ij}^{(k)}}{k!}$ est absolument convergente.

donc la suite $(e_{i,j}^{m})_{m\in\mathbb{N}^*}$ <u>CV</u>.

Comme chaque coordonnée converge, on en déduit que $(E_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ CV.

$\boxed{Rq}$ Bien comprendre la méthode présentée ici.
Il ne faut surtout pas chercher à majorer $|e_{ij}^{(m)}|$ car cela ne va pas prouver que la suite $(e_{ij}^{(m)})_m$ <u>converge</u> !

3. Comme A et I commutent :

$$\left(I+\frac{A}{k}\right)^k = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\frac{A^j}{k^j}$$

Comparons avec E_k :

$$E_k-\left(I+\frac{A}{k}\right)^k = \sum_{j=0}^{k}\frac{1}{j!}A^j-\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\frac{1}{k^j}A^j$$

$$= \sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j!}\underbrace{\left(1-1\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{2}{k}\right)\cdots\left(1-\frac{j-1}{k}\right)\right)}_{\text{on remarque que ce coefficient est positif!!}}A^j$$

! $\to$

donc

$$\left\|E_k-\left(I+\frac{A}{k}\right)^k\right\|_\infty \leq \sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j!}\left(1-1\left(1-\frac{1}{k}\right)\cdots\left(1-\frac{j-1}{k}\right)\right)\underbrace{n^j\|A\|_\infty^j}_{\text{cf Ex 1.}}$$

$$= \sum_{j=1}^{k}\Big(\underbrace{\frac{1}{j!}-\binom{k}{j}\frac{1}{k^j}}_{=0 \text{ si } j=0}\Big)n^j\|A\|_\infty^j$$

$$= \sum_{j=0}^{k}\frac{n^j\|A\|_\infty^j}{j!}-\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\left(\frac{n}{k}\|A\|_\infty\right)^j$$

$$= \sum_{j=0}^{k}\frac{n^j\|A\|_\infty^j}{j!}-\left(1+\frac{n\|A\|_\infty}{k}\right)^k$$

Or $\displaystyle\sum_{j=0}^{k}\frac{n^j}{j!}\|A\|_\infty^j \xrightarrow[k\to+\infty]{} \exp(n\|A\|_\infty)$ et

$$k \ln\left(1+\frac{n\|A\|_\infty}{k}\right) \sim n\|A\|_\infty$$

donc $\left(1+\frac{n\|A\|_\infty}{k}\right)^k \longrightarrow \exp(n\|A\|_\infty)$ aussi.

D'où $\left\| E_k - \left(I+\frac{A}{k}\right)^k \right\|_\infty \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$

Or $E_k \to \exp(A)$ donc $\boxed{\left(I+\frac{A}{k}\right)^k \to \exp(A)}$

(13) (fait en cours)

On considère $A_k = \begin{pmatrix} 1 & & & (0) \\ & 2 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & k \end{pmatrix}$, qui est semblable à $D = \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & 2 & \\ (0) & & \ddots \; n \end{pmatrix}$

S'il existait une norme N qui respecte la similitude, on aurait $\forall k \in \mathbb{N}$, $N(A_k) = N(D)$ (constant)

donc (A_k) est une suite bornée

Or $\|A_k\|_\infty = k \longrightarrow +\infty$ et le caractère borné ne dépend pas de la norme

(Rq on peut aussi voir $N(\frac{1}{k}A_k) = N(\frac{1}{k}D) = \frac{1}{k}N(D) \to 0$

alors que $\|\frac{1}{k}A_k\|_\infty = 1$ donc (A_k) tend vers 0 pour N et ne peut tendre vers 0 pour $\|\cdot\|_\infty$, ce qui contredit l'équivalence des normes en dimension finie).

(14) 1). (fait plein de fois) $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $A_k = A - \frac{1}{k} I_n \xrightarrow[k\to+\infty]{} A$

$Sp(A)$ fini donc APCR, $A_k \in GL_n(\mathbb{K})$.

2) Soit $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$. On considère $D = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & \ddots \\ & & & n \end{pmatrix}$

et on pose $T_k = T + \frac{1}{k} D$. On considère les i^e et j^e coefficients diagonaux de T_k ($i \neq j$), c'àd: $\lambda_i + \frac{i}{k}$ et $\lambda_j + \frac{j}{k}$

On a $\lambda_i + \frac{i}{k} = \lambda_j + \frac{j}{k} \iff \lambda_i - \lambda_j = \frac{j-i}{k}$ cette équation admet au plus une solution

(et en général, aucune car $k = \frac{j-i}{\lambda_i - \lambda_j}$ nécessite non seulement $\lambda_i \neq \lambda_j$ mais que le quotient soit entier!)

Ainsi, à part pour au plus $\binom{n}{2}$ valeurs de k (correspondant aux $\binom{n}{2}$ paires $\{i,j\}$), les coefficients diagonaux de T_k sont 2 à 2 distincts, donc T_k est DZ

Or $T_k \to T$ est évident, donc T est la limite d'une suite de matrices diagonalisables.

3. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. M est TZ, donc il existe T triangulaire et $P \in Gl_n(\mathbb{C})$ tq $M = P.T.P^{-1}$.
Soit (T_k) une suite de matrices diagonalisables tq $T_k \to T$ (question 2.) Alors $M_k = P\, T_k\, P^{-1}$ est DZ (semblable à T_k) et $M_k \to M$.

(15) On vérifie l'inégalité "rappelée" (pas demandée, mais bon...)

Posons $\forall t \in [0,1]$, $\varphi(t) = ta^p + (1-t)b^p - (ta+(1-t)b)^p$

On remarque $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$.

(lemme de Rolle, $\exists c \in]0,1[$ tq $\varphi'(c) = 0$)

On a : $\varphi'(t) = a^p - b^p - p\,(ta+(1-t)b)^{p-1}(a-b)$

Si $a=b$, l'inégalité est en fait une égalité ($a^p = a^p$), on peut supposer $a \neq b$. Comme $ta+(1-t)b$ parcourt le segment $[a,b]$, on est assuré que $ta+(1-t)b > 0$ si $t \in]0,1[$, donc on peut dériver à nouveau :

$$\forall t \in]0,1[, \quad \varphi''(t) = -p(p-1)(ta+(1-t)b)^{p-2}(a-b)^2 < 0$$

On rassemble les informations :

t	0		c		1
$\varphi''(t)$			$-$		
$\varphi'(t)$		$(+)$ $\searrow$	0	$\searrow$ $(-)$	
$\varphi(t)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

On conclut $\forall t \in [0,1]$, $\varphi(t) \geq 0$, cqfd.

2) On a $N_p(tx+(1-t)y)^p = \sum_{i=1}^{n} |tx_i + (1-t)y_i|^p$

$\leq \sum_{i=1}^{n} (t|x_i| + (1-t)|y_i|)^p$ (I.T et croissance de $x \mapsto x^p$ sur $\mathbb{R}_+$).

$$\leq \sum_{i=1}^{n} t|x_i|^p + (1-t)|y_i|^p$$ (inégalité vérifiée ci-dessus)

$$= t\, N_p(x)^p + (1-t) N_p(y)^p$$

$$\leq t + (1-t) = 1,$$ (car $N_p(x), N_p(y) \leq 1$)

cqfd.

b) Il est immédiat que $N_p : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_+$.

- Si $x \in \mathbb{K}^n$, $N_p(x) = 0 \Rightarrow \forall i, |x_i| = 0$ donc $x = 0$.
- Si $x \in \mathbb{K}^n$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$N_p(\lambda x) = \left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda x_i|^p\right)^{1/p} = |\lambda|\, N(x)$$

- Enfin, on fixe $\underline{x, y \text{ non nuls}}$. Pour l'inégalité triangulaire on veut appliquer a) donc on considère $\frac{x}{N_p(x)}$ et $\frac{y}{N_p(y)}$

Comme on veut : $N_p\left(\frac{x+y}{N_p(x)+N_p(y)}\right) \leq 1$,

: On cherche $t \in [0,1]$ tq

$$\frac{x+y}{N_p(x)+N_p(y)} = t\frac{x}{N_p(x)} + (1-t)\frac{y}{N_p(y)}$$

Il suffit de poser $t = \frac{N_p(x)}{N_p(x)+N_p(y)}$, donc $N_p\left(\frac{x+y}{N_p(x)+N_p(y)}\right) \leq 1$ d'ap. a)

On a alors $N_p(x+y) \leq N_p(x) + N_p(y)$, évidemment vrai si x ou $y = 0$.

Ccl : $\underline{N_p \text{ est une norme sur } \mathbb{K}^n}$

La pté de (a) est la convexité de la boule unité.

c) Supposons que pour k coordonnées, on ait $|x_i| = \|x\|_\infty$ ($k \in \mathbb{N}^*$!)

Alors $$\lim_{p \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{|x_i|^p}{\|x\|_\infty^p} = k$$ (les autres termes sont des suites géométriques de limite 0).

donc $$\frac{1}{p}\ln \sum_{i=1}^{n} \frac{|x_i|^p}{\|x\|_\infty^p} \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0$$ et par continuité de l'exp :

$$N_p\left(\frac{x}{\|x\|_\infty}\right) \to 1$$ donc $$\boxed{N_p(x) \xrightarrow[p \to +\infty]{} \|x\|_\infty}$$