Fonctions de plusieurs variables

PSI*

U désigne toujours un ouvert de $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

1 Dérivation d'une fonction à plusieurs variables

1.1 Dérivées partielles

Définition Soit $f : U \to \mathbb{R}$.
Soit $a = (a_1, \cdots, a_n) \in U$.
Comme U est ouvert, la i-ème application partielle de f en a : $x_i \mapsto f(a_1, \cdots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \cdots, a_n)$ est définie au voisinage de a_i.
Si elle est dérivable, sa dérivée en a_i est la dérivée partielle de f en a par rapport à la i-ème variable.

Notation $\partial_i f(a)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ (NB : Si $n = 1$, $\partial_1 f(a) = f'(a)$.)

Définition Si f admet une i-ème dérivée partielle en tout point $a \in U$, on définit la i-ème application dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$: $a \in U \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

Remarque L'expression de $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ est obtenue en dérivant f par rapport à la seule variable x_i, mais $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ est une fonction de n variables.

Exemples

1. $f(x, y) = x\sin(x + y^2)$. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, $x \mapsto x\sin(x + y^2)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc f admet une dérivée partielle par rapport à x :
$$\frac{\partial f}{\partial x} : (x, y) \mapsto \sin(x + y^2) + x\cos(x + y^2)$$
NB : la valeur est obtenue en dérivant $x \mapsto x\sin(x + y^2)$, mais $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est une fonction de (x, y).
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y \mapsto x\sin(x + y^2)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc f admet une dérivée partielle par rapport à y :
$$\frac{\partial f}{\partial y} : (x, y) \mapsto 2xy\cos(x + y^2)$$
2. On identifie $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^{n^2}$ et on considère $f : M \mapsto \det(M)$. Pour toute matrice M, on a :
$$\det(M) = m_{ij}.(-1)^{i+j}\det(M_{ij}) + C_M$$
où M_{ij} est M privée de ses i-ème ligne et j-ème colonne et C_M est indépendant de m_{ij}. On en déduit : $\dfrac{\partial \det}{\partial m_{ij}}(M) = (-1)^{i+j}\det(M_{ij})$.

1.2 Notations en mathématiques et en physique

Remarque En mathématiques, la notation "x_i" est purement conventionnelle. Si $p = 2$ ou 3, on note habituellement $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a)$, $\dfrac{\partial f}{\partial z}(a)$ les dérivées partielles en a.

En physique, les variables ont une "signification physique" ; en outre, pour alléger les notations, on ne les fait apparaître qu'en cas de besoin. On écrit, par ex. : $P = P(T,H)$ pour $P = f(T,H)$ et $P = P(V,H)$ pour $P = g(V,H)$. et donc $\dfrac{\partial P}{\partial T}$ pour $\partial_1 f(T,H)$, $\dfrac{\partial P}{\partial V}$ pour $\partial_1 g(V,H)$. Lorsque la notation risque d'être ambiguë, par exemple : $\dfrac{\partial P}{\partial H}$, on précise quelles variables restent fixes, et on note $\left(\dfrac{\partial P}{\partial H}\right)_T$ pour $\partial_2 f(T,H)$ et $\left(\dfrac{\partial P}{\partial H}\right)_V$ pour $\partial_2 g(V,H)$.

1.3 Dérivées partielles et continuité

Proposition La continuité n'entraîne pas l'existence de dérivées partielles.

Exemple $f(x_1,\cdots,x_n) = \sqrt{{x_1}^2+\cdots+{x_n}^2}$ n'admet aucune dérivée partielle en $(0,\cdots,0)$.

Proposition L'existence de dérivées partielles n'entraîne pas la continuité.

Exemple On considère la fonction $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

On vérifie que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

Cependant, $\lim\limits_{x\to 0} f(x,x) = \dfrac{1}{2}$ donc f n'est pas continue en 0.

1.4 Recherche d'extrema

Rappel $f : D \to \mathbb{R}$ admet un extremum local en a ssi il existe un ouvert U tel que $f|_{U\cap D}$ admette un extremum en a. Un extremum global, (i.e, sur le domaine D tout entier), est un extremum local (réciproque fausse en général).

Proposition Soit $f : U \to \mathbb{R}$. Si f admet un **extremum** local en $a \in U$ et si elle admet une dérivée partielle $\partial_i f(a)$, alors $\partial_i f(a) = 0$.

Remarque Attention : propriété fausse si U n'est pas un ouvert! (exemple : $x \in [0,1] \mapsto x$).

Définition f admet un point critique en a si f admet des dérivées partielles en a par rapport à toutes les variables, toutes nulles.

Exemple On considère $f(x,y) = xy(1-x-y)$ définie sur $T = \{(x,y) | x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}$.
Déterminer les extrema de f sur T.

Comparer à l'énoncé : extrema de $f(x,y,z) = xyz$ définie sur $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x,y,z \geq 0, x+y+z = 1\}$.

2 Fonctions de classe C^1

2.1 Développement limité

Définition Soit f une fonction définie sur l'ouvert U et qui admet des dérivées partielles en tout point $a \in U$.

f est de classe C^1 sur U ssi ses dérivées partielles sont continues sur U.

Théorème (**fondamental**) Soit $f : U \to \mathbb{R}$. Si f est C^1 sur U et $a \in U$, alors pour $||h||$ assez petite :

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) + o(h)$$

(développement limité de f en a, à l'ordre 1). On utilise la notation $o(h)$ pour une fonction de type $\|h\|\varphi(h)$, où $\varphi(h) \to 0$ si $h \to 0$.

Démonstration Soit $\eta > 0$ tel que $B(a,\eta) \subset U$. Pour tout $x \in B(a,\eta)$:

$$\begin{aligned} f(x_1,\dots,x_n) - f(a_1,\dots,a_n) &= \sum_{i=1}^{n} f(a_1,\dots,a_{i-1},x_i,x_{i+1},\dots,x_n) - f(a_1,\dots,a_{i-1},a_i,x_{i+1},\dots,x_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1,\dots,a_{i-1},c_i,x_{i+1},\dots,x_n) \end{aligned}$$

avec $c_i \in [a_i, x_i]$ (on applique le théorème des accroissements finis).

Comme $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ est continue en a, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1,\dots,a_{i-1},c_i,x_{i+1},\dots,x_n) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + o(1).$$

Il suffit de développer pour obtenir le DL attendu.

2.2 Différentielle d'une fonction C^1

Définition Si f est C^1 de U dans $\mathbb{R}$, la différentielle de f en a est la forme linéaire :

$$df(a) : h \mapsto \sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial}{\partial x_j} f(a)$$

Notation En calcul différentiel, on note $df(a)\cdot h = df(a)(h)$.

Remarque On a donc le développement limité à l'ordre 1 :

$$f(a+h) = f(a) + df(a)\cdot h + o(h)$$

Remarque L'application $a \mapsto df(a)$ (différentielle de f sur U) n'est pas une forme linéaire, mais elle est continue de U dans $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ (forme différentielle).

Exemples

1. Si $n = 1$, $df(a) : h \mapsto f'(a)h$.
2. Si f est constante sur U, alors f est C^1 sur U et $df(a) = 0$.
3. Si f est la restriction à U d'une forme linéaire v, f s'écrit : $f(x_1,\cdots,x_n) = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$. On constate que f est C^1 sur U et $\partial_i f(a) = c_i$.
   On a donc $df(a)\cdot h = c_1h_1 + \cdots + c_nh_n = v(h)$, c'est-à-dire $df(a) = v$.
4. En particulier, les surjections canoniques $(x_1,\dots.,x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto x_i$ sont C^1.

2.3 Écriture en sciences physiques

Supposons $y = f(x_1,\cdots,x_n)$ décrive une relation entre la grandeur physique y et les grandeurs x_1, ..., x_n.
Si pour tout i, l'accroissement h_i est petit, (et donc également $h = (h_1,\cdots,h_n)$), on fait l'approximation ("à l'ordre 1") :

$$f(x_1+h_1,\cdots,x_n+h_n) - f(x_1,\cdots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

Comme h_i décrit une petite variation de x_i, on note dx_i pour h_i dy pour la variation $f(x_1+dx_1,\cdots,x_n+dx_n) - f(x_1,\cdots,x_n)$, et $\dfrac{\partial y}{\partial x_i}$ pour $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,\cdots,x_n)$, donc :

$$dy = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i} dx_i$$

2.4 Continuité des fonctions de classe C^1

Proposition Si f est de classe C^1 sur U, alors f est continue sur U.

Démonstration En tout point $a \in U$, on a, quand h tend vers 0 :

$$f(a+h) = f(a) + df(a) \cdot h + o(h) \to f(a)$$

donc f est continue en a.

2.5 Opérations algébriques sur les fonctions C^1

Proposition Si f et g sont C^1 de U dans $\mathbb{R}$:

1. $f + g$ est C^1 sur U
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, λf est C^1 sur U
3. fg est C^1 sur U.

Démonstration Avec les dérivées partielles.

Exemple Les fonctions polynômiales en $(x_1, \cdots, x_n)$, et en particulier, le déterminant (considéré comme une fonction des coefficients de la matrice) sont de classe C^1.

2.6 Gradient d'une fonction de classe C^1

Définition Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1. L'application $h \mapsto df(a).h$ est une forme linéaire, donc il existe un unique vecteur, appelé **gradient de** f **en** a et noté $\nabla f(a)$, tel que $\forall h \in E$, $df(a).h = (\nabla f(a)|h)$.

Remarques

1. En physique : $\mathrm{d}y = (\nabla y|dM)$ (où $y = f(M)$).
2. Coordonnées du gradient de f en a dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$:
   $(\partial_1 f(a), \partial_2 f(a), \cdots, \partial_n f(a))$.
3. f admet un **point critique** en a ssi $df(a) = 0$ (ou encore, $\nabla f(a) = 0$).
4. Si f atteint un extremum ou un minimum local en $a \in U$, alors $\nabla f(a) = 0$.

Exemples

1. Gradient de $f : (x, y, z) \mapsto xyz$ sur $\mathbb{R}^3$.
2. $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $f(M) = \mathrm{Tr}(M^2) = \displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} m_{ji} m_{ij}$. Alors $\partial_{ij} f(M) = 2m_{ji}$ donc

$$df(M).H = \sum_{1 \leq i,j \leq n} 2m_{ji} h_{ij} = 2\,\mathrm{Tr}(MH)$$

3. $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $f = \det$. On note A_{ij} le cofacteur de a_{ij} dans A. Alors :

$$df(A).H = \sum_{i,j} h_{ij} A_{ij} = \mathrm{Tr}({}^t\mathrm{Com}(A).H)$$

   où $\mathrm{Com}(A)$ désigne la matrice des cofacteurs (A_{ij}) ("comatrice").
4. Déterminer le point F du triangle ABC tel que $f(M) = AM + BM + CM$ est minimale.

2.7 Dérivée le long d'un arc paramétré

Proposition Soit f de U dans $\mathbb{R}$, classe C^1 et $\varphi : t \in I \mapsto (x_1(t), \cdots, x_n(t))$, de classe C^1 telle que $\varphi(I) \subset U$. Alors $f \circ \varphi$ est C^1 sur I et :

$$\forall t \in I, (f \circ \varphi)'(t) = df(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) =< \nabla f(\varphi(t))|\varphi'(t) >= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\varphi(t)) {x_i}'(t)$$

(**règle de la chaîne**).

Démonstration On pose $t_0 \in I$ et $\varphi(t) = \varphi(t_0) + (t - t_0) w(t)$, avec $w(t) \to \varphi'(t_0)$ quand $t \to t_0$.

Comme f est de classe C^1 sur U :

$$f(\varphi(t)) = f(\varphi(t_0)) + (t - t_0) df(\varphi(t_0)) \cdot w(t) + o(t - t_0).$$

On a donc $\dfrac{f(\varphi(t)) - f(\varphi(t_0))}{t - t_0} \to df(\varphi(t_0)) \cdot \varphi'(t_0)$,

On vérifie facilement que $t \mapsto df(\varphi(t))\varphi'(t)$ est continue sur I, cqfd.

Exemple Dériver de $g : x \mapsto f(x, x^2)$, où f est C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque En physique, on notera volontiers, d'une part : $y = y(t)$ pour $y = f(\varphi(t))$ et $\dfrac{dy}{dt}$ pour $(f \circ \varphi)'(t)$, et d'autre part : $\dfrac{\partial y}{\partial x_i}$ pour $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \cdots, x_n)$, ce qui donne l'écriture :

$$\frac{dy}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt}$$

Attention, les fonctions dans les produits ne s'appliquent pas aux mêmes variables !

2.8 Changement de variables

Proposition Soit f de classe C^1 sur $V \subset \mathbb{R}^2$ et x, y des applications de classe C^1 sur $U \in \mathbb{R}^2$.

Alors $g : (u, v) \mapsto f(x(u, v), y(u, v))$ est de classe C^1 sur U et :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) \\
\frac{\partial g}{\partial v}(u, v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial y}{\partial v}(u, v)
\end{aligned}$$

Démonstration On fixe v et on applique la règle de la chaîne à $f \circ \varphi$, où $\varphi : u \mapsto (x(u, v), y(u, v))$. On en déduit la première dérivée partielle de g...

Remarque En physique, on écrit : $z = z(u, v)$ pour $z = g(u, v)$ et $z = z(x, y)$ pour $z = f(x, y)$ et on omet les variables :

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}$$

Il est parfois besoin de clarifier la notation :

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \frac{\partial x}{\partial u} + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \frac{\partial y}{\partial u}$$

Exemples Soit f de classe $C^1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

1. Dérivées partielles de $g(x, y) = f(y, x)$.
2. Dérivées partielles de $F(x, y) = \displaystyle\int_0^y f(t, x)\, dt$. En déduire la dérivée de $h(x) = \displaystyle\int_0^x f(t, x)\, dt$.
3. (Coordonnées polaires). On pose $x(r, \theta) = r\cos\theta$ et $y(r, \theta) = r\sin\theta$, et enfin $g(r, \theta) = f(x(r, \theta), y(r, \theta))$. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) &= \cos\theta \frac{\partial f}{\partial x}(x(r, \theta), y(r, \theta)) + \sin\theta \frac{\partial f}{\partial y}(x(r, \theta), y(r, \theta)) \\
\frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) &= -r\sin\theta \frac{\partial f}{\partial x}(x(r, \theta), y(r, \theta)) + r\cos\theta \frac{\partial f}{\partial y}(x(r, \theta), y(r, \theta))
\end{aligned}$$

2.9 Expression du gradient "en coordonnées polaires"

Soit $f : U \to \mathbb{R}$. On pose $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$.
En omettant les variables pour alléger les notations :

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}$$
$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = -r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}$$

C'est-à-dire : $\frac{\partial g}{\partial r} = (\nabla f | u_r)$ et $\frac{\partial g}{\partial \theta} = (\nabla f | r u_\theta)$. Comme (u_r, u_θ) est une base orthonormale :

$$\nabla f = \frac{\partial g}{\partial r}u_r + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}u_\theta$$

Exemple (Potentiel coulombien) Si $V(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, alors

$$\nabla V(r\cos\theta, r\sin\theta) = -\frac{1}{r^2}u_r$$

3 Équations aux dérivées partielles

3.1 Fonctions constantes sur un ouvert convexe

Proposition On suppose $U \subset E$ convexe et f une application de classe C^1 sur U.
f est constante ssi $df(a) = 0$ pour tout $a \in U$ ou ssi $\nabla f(a) = 0$ pour tout $a \in U$.

Démonstration Le sens direct est déjà démontré plus haut. Réciproque :
Soient $a, b \in U$ et $\varphi : t \mapsto (1-t)a + tb$. Alors $f\circ\varphi$ est C^1, de dérivée nulle (règle de la chaîne), donc $f\circ\varphi$ est constante. D'où $f(a) = f(b)$, cqfd.

Remarque La caractérisation s'étend aux ouverts pour lesquels on peut toujours relier deux points par un arc paramétré C^1.

3.2 Intégration par rapport à une variable

Remarque Les équations aux dérivées partielles font souvent apparaître, à la place des constantes d'intégration des équations différentielles ordinaires, des fonctions.

Exemple On cherche $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, de classe C^1, telle que $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ (E).
CN : Pour tout $y \in \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x,y)$ est constante. A priori, cette "constante" dépend du y qui a été fixé. On notera $f(x,y) = G(y)$. G est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ car f est de classe C^1.
CS Réciproquement, si $f(x,y) = G(y)$ avec G C^1 sur $\mathbb{R}$, on a bien $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$.
Conclusion : La solution générale de l'équation (E) est $f(x,y) = G(y)$, où G est une fonction arbitraire de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Remarques

1. Si on cherche f définie sur $]a,b[\times]c,d[$, la méthode ci-dessus s'applique directement.
2. Si on cherche des fonctions f définies sur un ouvert convexe U, on adapte la démonstration, en remarquant qu'on peut écrire U sous la forme : $U = \{(x,y) | a < y < b, c(y) < x < d(y)\}$.
3. Attention, si le domaine U n'est pas convexe ! Par ex., la fonction f définie sur $U = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}_- \times \{0\}$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 \text{ si } x > 0 \\ x^2 \text{ si } x \geq 0 \text{ et } y > 0 \\ -x^2 \text{ si } x \leq 0 \text{ et } y < 0 \end{cases}$$

vérifie $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ mais n'est pas sous la forme $f(x,y) = F(x)$ avec F de classe C^1.

3.3 Changements de variables

Pour résoudre une équation aux dérivées partielles, on est amené à effectuer des changements de variables. On résout la nouvelle équation. Si le changement de variable est bijectif, on écrit les solutions en fonction des anciennes variables...

Exemples

1. On cherche f C^1 telle que :
$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=0$$
sur $U=\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$. On applique le changement de variables :
$$\begin{cases} u=x \\ v=\dfrac{y}{x}\end{cases}$$
L'équation devient : $\dfrac{\partial g}{\partial u}=0$, d'où $f(x,y)=A(\dfrac{y}{x})$ où A est C^1 sur $\mathbb{R}$.
2. Idem avec :
$$x\frac{\partial f}{\partial x}-y\frac{\partial f}{\partial y}=xy^2$$
et le changement de variables $u=x$, $v=xy$.

Exemple Soit à résoudre :
$$x\frac{\partial f}{\partial y}-y\frac{\partial f}{\partial x}=af$$
sur $U=\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$ (avec $a>0$).

On pose $F(r,\theta)=f(r\cos\theta,r\sin\theta)$.

L'équation $[\overrightarrow{OM},\nabla f]=af$ devient, dans la base polaire (u_r,u_θ) : $\begin{vmatrix} r & F_r \\ 0 & \dfrac{1}{r}F_\theta\end{vmatrix}=aF$

soit $F_\theta=aF$, et donc $F(r,\theta)=C(r)\exp(a\theta)$.
Finalement, $f(x,y)=C(\sqrt{x^2+y^2})\exp(a\operatorname{Arctan}\frac{y}{x})$.

4 Applications géométriques

4.1 Variations le long d'un arc paramétré

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f une application C^1 de U dans $\mathbb{R}$. Soit $M_0\in U$ tel que $\nabla f(M_0)\neq 0$.

Proposition Soit φ un arc **régulier** sur I admettant un paramétrage normal (c'est-à-dire $||\varphi'(t)||=1$ pour tout $t\in I$), tel que $\varphi(t_0)=M_0$.

D'après la règle de la chaîne, $f\circ\varphi$ est C^1 sur I et
$$(f\circ\varphi)'(t_0)=\nabla f(M_0)\cdot\varphi'(t_0)=||\nabla f(M_0)||\cdot\cos\theta,$$
où θ est l'angle formé par $\varphi'(t_0)$ et $\nabla f(M_0)$.

Conséquence

1. $f\circ\varphi$ est croissante au voisinage de t_0 (resp. décroissante) si l'angle θ est aigu (resp. obtus).
2. $(f\circ\varphi)'(t_0)$ est maximale lorsque $\cos\theta=1$: le gradient indique la direction de la plus forte croissance de f.
3. Si f est **constante** le long de l'arc φ, alors $\nabla f\perp\varphi'$: le gradient est normal à la courbe.
4. Un arc paramétré régulier φ pour lequel φ' et ∇f sont colinéaires est une ligne de champ (applications : trajectoire le long d'une pente, trajet de la lumière dans un milieu non homogène...)

4.2 Équation cartésienne d'une courbe du plan

On admet que si f une fonction de classe C^1 sur l'ouvert U de $\mathbb{R}^2$, l'équation (cartésienne) $f(x,y)=0$ définit une **courbe** Γ de $\mathbb{R}^2$.

Théorème (fonctions implicites) Si $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$, on dit que (x_0, y_0) est régulier et il existe $\delta > 0$ et un arc régulier φ : $t \in I =]-\delta, \delta[\to (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$ de classe C^1, tel que :

1. $\varphi(0) = (x_0, y_0)$
2. $\varphi(I) \subset \Gamma$.

Proposition La courbe d'équation $f(x, y) = 0$ admet au point régulier (x_0, y_0) une tangente normale à $\nabla f(x_0, y_0)$.

Démonstration Soit φ un arc régulier comme ci-dessus. f est constante sur l'arc définit par φ, donc $\varphi'(t) \perp \nabla f(\varphi(t))$ en tout point.

Exemple Soit (C) la courbe d'équation $y - x^2 + x^2 y + y^3 + 6x^3 = 0$. Préciser son allure au voisinage du point $(0, 0)$.

4.3 Équation d'une surface de l'espace de dimension 3

Proposition On admet que si f une fonction de classe C^1 sur l'ouvert U de $\mathbb{R}^3$, l'équation (cartésienne) $f(x, y, z) = 0$ définit une **surface** S de $\mathbb{R}^3$.

Définition Le point (x_0, y_0, z_0) est régulier ssi $\nabla f(x_0, y_0, z_0) =\neq 0$.

Définition L'arc paramétré $\varphi : t \in I \mapsto (x(t), y(t), z(t))$ est dit tracé sur la surface S d'équation cartésienne $f(x, y, z) = 0$ ssi, pour tout $t \in I$, $f(x(t), y(t), z(t)) = 0$.

Remarque Si φ, tracé sur S, est C^1 en t_0 et $\varphi(t_0) = M_0$, alors $\varphi'(t_0) \perp \nabla f(M_0)$.

Théorème (fonctions implicites) Si $\nabla f(M_0) \neq 0$, on dit que M_0 est régulier et il existe $\delta > 0$ et un arc C^1 régulier $\varphi : t \in I =]-\delta, \delta[\to \mathbb{R}^3$, tracé sur S, tel que $\varphi(0) = M_0$.

Conséquence et définition Si M_0 est un point régulier de S, tout arc régulier tracé sur S et passant par M_0 est normal à $\nabla f(M_0)$.

Le plan tangent en M_0 à S est le plan passant par M_0 et orthogonal à $\nabla f(M_0)$.

Il contient les tangentes à tout arc régulier C^1 tracé sur la surface S et passant par M_0.

Exemple Déterminer les plans tangents à $xy = z^2$.

4.4 Surfaces d'équation $z = g(x, y)$

Soit g une fonction de classe C^1 sur U. On considère la surface S d'équation $z = g(x, y)$.

Définition Les courbes coordonnées sont définies par :

$$\begin{cases} (x = x) \\ y = y_0 \\ z = g(x, y_0) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = x_0 \\ (y = y) \\ z = g(x_0, y) \end{cases}$$

Au point (x_0, y_0) ces courbes admettent pour vecteurs dérivés, respectivement : $(1, 0, \dfrac{\partial g}{\partial x})$ et $(0, 1, \dfrac{\partial g}{\partial y})$, qui définissent le plan tangent à S en M_0.

Remarque On peut également retrouver le plan tangent en posant $f(x, y, z) = g(x, y) - z$ et se ramener au paragraphe précédent. Comme $\dfrac{\partial f}{\partial z} = -1$, on note que les points de S sont tous réguliers. Comme $\nabla f = (\dfrac{\partial g}{\partial x}, \dfrac{\partial g}{\partial y}, -1)$, on en déduit :

Proposition Le plan tangent en M_0 admet l'équation :

$$z = z_0 + \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0).(x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0).(y - y_0)$$

5 Second ordre

5.1 Dérivées partielles d'ordre 2

Définition Soit $f : U \to \mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles (premières) définies sur U. Les dérivées partielles d'ordre 2 de f sont les dérivées partielles des dérivées partielles (premières) de $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$.

Notation $\partial^2_{i,j} f$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)$.

Exemple On considère $f(x,y) = \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$, $f(0,0) = 0$.

1. $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y}$
   On calcule donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0$
   et pour $y \neq 0$: $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,y)-f(x,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{y(x^2-y^2)}{y^2} = -y$
   et donc $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{-y-0}{y} = -1$.
2. En échangeant x et y, on en déduit : $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$.
3. Vérifier $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 0$.

Exemple $f(x,y) = x^2 y^3$, dérivées croisées égales.

5.2 Fonctions de classe C^2

Définition Soit f de classe $C^1 : U \to \mathbb{R}$.
On dit que f est de classe C^2 sur U si ses dérivées partielles sont de classe C^1 sur U.
Les dérivées partielles d'ordre 2 de f sont les dérivées partielles des dérivées partielles (premières) de f.

Proposition

1. Les applications coordonnées $(x_1, \cdots, x_n) \mapsto x_j$ sont C^2 sur $\mathbb{R}^n$.
2. $C^2(U)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, stable par produit.
3. (Composition) La composée de fonctions de classe C^2 est de classe C^2.

Corollaire Si $f \in C^2(U,\mathbb{R})$ et f ne s'annule pas, alors $\frac{1}{f}$ est C^2 sur U.

Théorème (de Schwarz) Si f est de classe C^2 sur U, alors pour tout (i,j) :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

(ADMIS)

Exemples

1. La fonction $(x,y) \mapsto x^2 y^3$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, on a déjà vérifié l'égalité des dérivées croisées.
2. Pour $f(x,y) = \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$, $f(0,0) = 0$, le théorème tombe en défaut, donc f n'est pas de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$. (On peut vérifier qu'elle est bien de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.)

5.3 Exemples d'équations aux dérivées partielles

Exemple On cherche les applications f C^2 sur $\mathbb{R}^2$ telles que :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 5\frac{\partial^2 f}{\partial xy} + 6\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

On résout $r^2 - 5r + 6 = 0$ et on constate que l'équation s'écrit $(\partial_x - 3\partial_y)(\partial_x - 2\partial_y)f = 0$. On veut trouver (u, v) de telle sorte que $\partial_v = \partial_x - 3\partial_y$ et $\partial_u = \partial_x - 2\partial_y$. Il faut donc $\frac{\partial x}{\partial u} = 1$ et $\frac{\partial y}{\partial u} = -2$, de même pour v, on pose donc : $x = u + v$ et $y = -2u - 3v$. Ainsi, on est ramené à l'équation $\frac{\partial g}{\partial v \partial u} = 0$, donc $\frac{\partial g}{\partial u} = A_1(u)$, d'où $g = A(u) + B(v)$, avec A et B C^2. Finalement, $f(x, y) = A(3x + y) + B(2x + y)$, avec A et B de classe C^2.

Exemple On cherche les fonctions $f : (x, t) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(x, t)$ qui vérifient :

$$c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

Soit f une solution. On pose $u = x - ct$, $v = x + ct$, c'est-à-dire $x = \frac{u+v}{2}$ et $t = \frac{v-u}{2c}$. On pose $g(u, v) = f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2c}\right)$. Alors g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et, $f(x, t) = g(x - ct, x + ct)$. En omettant les variables pour clarifier : $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v}$, donc :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$$

De même, $\frac{\partial f}{\partial t} = -c\frac{\partial g}{\partial u} + c\frac{\partial g}{\partial v}$ et :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - 2c^2\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + c^2\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$$

L'équation devient $\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0$.

Cette égalité a lieu sur $\mathbb{R}^2$ (convexe) si et seulement si $u \mapsto \frac{\partial g}{\partial v}(u, v)$ est constante. Notons $\frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = h(v)$. g est C^2 donc h est C^1 sur $\mathbb{R}$. Elle admet donc une primitive H de classe C^2, unique à une constante près (qui dépend à priori de u) : $g(u, v) = H(v) + K(u)$. Comme g et H sont C^2, la fonction K est nécessairement de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

Conclusion : les solutions sur $\mathbb{R}^2$ de l'équation de départ sont de la forme : $f(x, t) = H(x - ct) + K(x + ct)$, où H et K sont des fonctions arbitraires de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ (NB : après vérification...)