Ex. 1 Résoudre $y' \ln x + \dfrac{y}{x} = 1$.

Ex. 2 Soit (E) l'équation différentielle : $y'' - 2y' - 3y = \dfrac{e^{3x}}{(\operatorname{ch} x)^2}$.

1. Résoudre l'équation homogène associée.
2. On pose $y = ze^{3x}$. Montrer que (E) est équivalente à une équation en z et en déduire les solutions de (E).

Ex. 3 Soit (E) l'équation différentielle : $4xy'' + 2y' - y = 0$

1. Déterminer les solutions développable en série entière sur $\mathbb{R}$.
2. Sur $\mathbb{R}_+^*$, effectuer le changement de variable $t = \sqrt{x}$: poser $z(t) = y(x)$, obtenir et résoudre une équation en z. Procéder de même sur $\mathbb{R}_-^*$ en posant $t = \sqrt{|x|}$.
3. Étudier les recollements et résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.

Ex. 4 Déterminer les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ telles que, pour tout $x > 0$, $f'(x) = f(1/x)$.

Ex. 5 Résoudre $X' = AX$:

1. pour $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (montrer que les courbes intégrales sont planes) ;
2. pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ (montrer que les courbes intégrales sont planes) ;
3. pour $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$;
4. pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$;

Ex. 6 Résoudre $\begin{vmatrix} y'' & y' & y \\ y & y'' & y' \\ y' & y & y'' \end{vmatrix}$.

Ex. 7 Soit (E) l'équation différentielle $2(x-1)y' + y = \sin(2x) + x^2$

1. Montrer que (E) admet une unique solution f définie sur $]-\infty, 1[$ telle que $f(0) = 0$.
2. Déterminer un développement limité à l'ordre 4 de f au voisinage de 0.

Ex. 8 Soit (E) : $xy'' - y' - 4x^3 y = 0$.

1. Résoudre (E) sur $]0,1[$ à l'aide du changement de variable $t = 1 - x^2$.
2. Montrer que $x \mapsto y(x)$ est solution de (E) sur $]0,1[$ ssi $x \mapsto -y(-x)$ est solution de (E) sur $]-1,0[$.
3. Déterminer les solutions de (E) sur $]-1,1[$.

Ex. 9 Soit (E) : $x^2 y''(x) - 2xy'(x) + 2y(x) = 0$.

1. Trouver des solutions de la forme $x \mapsto x^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. Donner une base de l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$.

Ex. 10 Résoudre $y' - (\tan x)y = -(\cos x)^2$ sur $]-\pi/2, \pi/2[$.

Ex. 11 Soit $a > 0$. Déterminer les fonctions f de classe C^1 telles que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(a - x)$.

Ex. 12 Résoudre l'équation $y' \sin(x)^3 = 2y \cos x$ sur $[0, 4\pi]$. Quelle est la dimension de l'espace des solutions ?

Ex. 13 Soit (E) l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. À l'aide du changement d'inconnue $z = ye^{-x}$, résoudre et déterminer une solution admettant un prolongement g de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$, avec $g(0) = g'(0) = 0$.

Ex. 14 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation $y^{(n)} = y$.

Ex. 15 Résoudre :

$$\begin{cases} x' = -4x + 2y + 7z - 4e^{-t} \\ y' = 3x - 2y - 6z + 3e^{-t} \\ z' = -4x - 2y + 3z \end{cases}$$

Ex. 16

1. Montrer que si u, continue sur $[0, +\infty[$, tend vers $\ell \neq 0$ en $+\infty$, alors $\displaystyle\int_0^x e^t u(t)\,dt \sim \ell e^x$.
2. Soit f une fonction C^1 de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f + f'$ admette une limite $\ell \neq 0$ en $+\infty$. Déterminer les limites de f et f' en $+\infty$.

Ex. 17

1. Chercher les solutions développables en série entières de :

$$x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0 \qquad (E)$$

2. En déduire une solution particulière φ non nulle sur chaque intervalle acceptable.
3. Montrer que toute fonction C^2 sur un tel intervalle s'écrit $f = z\varphi$, où z est de classe C^2. Déterminer une CNS sur z pour que f soit solution de (E).
4. En déduire les solutions de (E) sur tout intervalle acceptable. Étudier les solutions sur $\mathbb{R}$.

Ex. 18 Soit l'équation différentielle $2xy'' + y' - y = 0$.

1. Montrer qu'il existe une solution développable en série entière.
2. Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série obtenue.

Ex. 19 Déterminer les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que : $f(x) = 1 + \displaystyle\int_0^x t f(t)\,dt$.

Ex. 20 a, b sont continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose $a \geq 1$ et b tend vers 0 en $+\infty$. Montrer que si $f' + af = b$, alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Ex. 21 Soit q une fonction continue intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et f une solution de $y'' + q(x)y = 0$. Montrer que si f est bornée, alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$. [Indic : exprimer $f'(x)$ à l'aide d'une intégrale].