Fonctions de plusieurs variables

Ex. 1

1. Montrer que toute matrice trigonalisable est limite d'une suite de matrice diagonalisables. Quelle est l'adhérence de l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$?
2. Montrer qu'un polynôme réel P unitaire et de degré n est scindé ssi pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|P(z)| \geq |\operatorname{Im} z|^n$.
3. En déduire les points adhérents à l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Ex. 2 Montrer que l'application $M \mapsto M^{-1}$ est continue sur $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$.

Ex. 3 Déterminer les points adhérents et intérieurs à $SL_n(\mathbb{C})$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

Ex. 4 Montrer que le produit de deux fonctions lipschitziennes bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est une fonction lipschitzienne et donner un contre-exemple dans le cas de fonctions non bornées.

Ex. 5 Soit $E = C([0,1], \mathbb{R})$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère un sous-espace V de E, de dimension finie, telle que : $\forall f \in V$, $||f||_\infty \leq n||f||_2$, avec $||f||_2 = \sqrt{\int_0^1 f(t)^2\, dt}$.

1. Soit $t \in [0,1]$. Montrer qu'il existe $g_t \in V$ tel que, pour tout $f \in V$, $f(t) = (f|g_t)$.
2. Soit $(f_1, ..., f_q)$ une base orthonormale de V. Montrer que pour tout $t \in [0,1]$: $\sum_{k=1}^{q} f_i(t)^2 \leq n^2$.
3. En déduire $\dim V \leq n^2$.

Ex. 6 Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et F définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $F(x,y) = \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y}$ si $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $x \neq y$, et $F(x,x) = f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Ex. 7 Étudier le prolongement par continuité en $(0,0)$ des fonctions :

1. $f(x,y) = (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$
2. $f(x,y) = \dfrac{x^a y^b}{x^2+y^2}$ $(a,\, b > 0)$
3. $f(x,y) = \dfrac{(\sin x)(\sin y) - \sin(xy)}{x^2+y^2}$

Ex. 8 Justifier qu'en dimension finie, tout sev est fermé. Est-ce encore vrai si la dimension est infinie ?

Ex. 9 Soit $f : E \to F$, continue. Montrer que l'image réciproque d'un ouvert est un ouvert, et que l'image réciproque d'un fermé est un fermé.

Fonctions de plusieurs variables : calcul différentiel

Ex. 10 Étudier le prolongement par continuité et la différentiabilité des fonctions :

1. $f(x,y) = (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$
2. $f(x,y) = \dfrac{x^a y^b}{x^2+y^2}$

Ex. 11 On pose $f(x,y) = \dfrac{\sin x - \sin y}{x - y}$ si $x \neq y$ et $f(x,y) = \cos x$ si $x = y$. Montrer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

Ex. 12 Déterminer la différentielle de la fonction $f : M \mapsto \mathrm{Tr}(M^k)$ définie sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Ex. 13 Déterminer les extrema relatifs de $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$ sur $\mathbb{R}^2$.

Ex. 14 Étudier les extrema de $f(x_1, \cdots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_n^2$ sur $K = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n | \forall i \in \{1, \cdots, n\},\, x_i \geq 0 \text{ et } x_1 + \cdots + x_n = 1\}$

Ex. 15 Montrer que la fonction $f(x,y) = \dfrac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)}$ admet un unique extremum sur ${\mathbb{R}_+^*}^2$ à déterminer.

Ex. 16 Soit $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \dfrac{x+y}{1+x^2+y^2}$.

1. Déterminer les $c \in \mathbb{R}$ pour lesquels $f(x,y) = c$ admet des solutions.
2. L'application f est-elle bornée ?

Ex. 17 Soit $f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Déterminer $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$.

Ex. 18 Soit $f : (x,y) \neq (0,0) \mapsto \dfrac{\sin(x^3y)}{x^2+y^2}$ et $f(0,0) = 0$.

1. La fonction f admet-elle des dérivées partielles premières en tout point de $\mathbb{R}^2$?
2. Étudier l'existence de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$.

Ex. 19 Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ tel que : $\forall (x,y) \in U,\ \forall t > 0,\ (tx,ty) \in U$.
Soient $\alpha > 0$ et $f \in C^1(U,\mathbb{R})$. On dit que f est α-homogène si :
$\forall (x,y) \in U,\ \forall t > 0,\ f(tx,ty) = t^\alpha f(x,y)$.

1. Montrer que f est α-homogène ssi $\alpha f = x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y}$.
2. Montrer que les solutions $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R},\mathbb{R})$ de $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ sont de la forme $(x,y) \mapsto \Phi(y/x)$ avec $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R})$.
3. Déterminer les solutions $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R},\mathbb{R})$ de $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = xy\sqrt{x^2+y^2}$

Ex. 20 Soient u et v dans $C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ telles que $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial x}$. Montrer qu'i existe $f \in C^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ telle que $\dfrac{\partial f}{\partial x} = u$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = v$.

Ex. 21 Soit $f \in C^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ telle que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ et $K : r > 0 \mapsto \displaystyle\int_0^{2\pi} f(r\cos t, r\sin t)\, dt$. Montrer que K est constante.

Ex. 22 Soit $f : (x,y) \mapsto \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$. La fonction f admet-elle un prolongement C^0 à $\mathbb{R}^2$? Même question pour C^1 puis C^2.

Ex. 23

1. Déterminer les extrema locaux de $(x,y) \mapsto x^3+y^3+y^2-x^2$.
2. Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq y \leq 1\}$. Déterminer les extrema globaux de $g : (x,y) \in D \mapsto x^3 + x(y^3-x) - y^3$.

Ex. 24 Soient a, b deux points distincts de l'eve E. Déterminer les points critiques de $x \in E\backslash\{a,b\} \mapsto ||x-a||+||y-b||$.

Ex. 25 Détérminer les solutions $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ de classe C^2 de l'équation aux dérivées partielles : $x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

Ex. 26 Soit $f : (x,y) \mapsto xy\ln(x^2+y^2)$.

1. Peut-on prolonger f par continuité en $(0,0)$?
2. Déterminer les extrema de f.

Ex. 27 Résoudre $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.