

Convergence d'une série entière
Continuité de la somme d'une série entière
Étude sur l'intervalle réel $] -R, R[$
Exponentielle complexe

Séries entières

24 janvier 2013

Série entière

Définition Série entière (en anglais : *power series*) = série de fonctions $u_n : z \mapsto a_n z^n$, $a_n \in \mathbb{K}$.

Si elle converge, sa somme est $S : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

Remarque

1. La variable est complexe.
2. Convergence pour $z = 0$.
3. Un polynôme s'identifie à la somme d'une série entière ($a_n = 0$ à partir d'un certain rang).

Comment étudier une série entière ?

Axes d'étude :

1. convergence de la série numérique $\sum a_n z^n$
2. étudier l'application $x \mapsto S(x)$ (analyse réelle)
3. étude de la fonction $\tilde{S}(x, y) = S(x + iy)$ (analyse à 2 variables réelles).
4. étude de la fonction $z \in \mathbb{C} \mapsto S(z)$ (en 3e année).

La droite numérique achevée

Remarque Dans ce chapitre, on utilise des bornes inférieures ou supérieures dans $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$.

Toute partie de $\overline{\mathbb{R}}$ (et en particulier, toute partie de $\mathbb{R}$) admet une borne supérieure et une borne inférieure dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Exemples $\sup \mathbb{R} = +\infty$, $\inf]-\infty, 3] = -\infty$, $\sup]0, 4[= 4$.

Cas particulier : $\sup \emptyset = -\infty$ et $\inf \emptyset = +\infty$.

Lemme d'Abel

Lemme (d'Abel). Soit $Z \in \mathbb{C}^*$ tel que $(a_n Z^n)$ est borné.

$$\text{Si } |z| \leq |Z|, \text{ ALORS } a_n z^n = O(z/Z)^n$$

(et dans ce cas, $(a_n z^n)$ est également bornée.)

Démonstration On a : $a_n z^n = a_n Z^n \left(\frac{z}{Z}\right)^n$.

Remarque En particulier, si $|z| < |Z|$, alors $a_n z^n \rightarrow 0$.

On constate :

1. Si $(a_n Z^n)$ bornée et $|z| \leq |Z|$, alors $(a_n z^n)$ bornée.
2. Si $(a_n Z^n)$ non bornée et $|z| \geq |Z|$, alors $(a_n z^n)$ non bornée.

Domaine où $(a_n z^n)$ est bornée

Définition On pose $R = \sup\{|z|, (a_n z^n) \text{ bornée}\}$. C'est un élément de $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ (car la série converge pour $z = 0$).

Proposition On a également : $R = \inf\{|z|, (a_n z^n) \text{ non bornée}\}$ (appliquer le lemme d'Abel).

Remarque On a donc $(a_n z^n)$ bornée implique $R \geq |z|$ et $(a_n z^n)$ non bornée implique $R \leq |z|$.

Rayon de convergence

Proposition

1. Si $|z| > R$, alors $(a_n z^n)$ n'est pas bornée et $\sum a_n z^n$ **diverge grossièrement**.
2. Si $|z| < R$, alors $\sum a_n z^n$ **converge absolument** (car $a_n z^n = O(z/Z)^n$ en choisissant $|z| < |Z| < R$ et $a_n Z^n$ bornée).
3. Si $|z| = R$, on ne peut conclure.

Démonstration 1. lemme d'Abel 2. On choisit $|z| < |Z| < R$, alors $a_n Z^n$ bornée et $a_n z^n = O(z/Z)^n$.

Corollaire $R = \inf\{|z|, \sum a_n z^n \text{ DV}\} = \sup\{|z|, \sum a_n z^n \text{ CV}\}$

Définition R est le **rayon de convergence** de la série entière.

Le disque ouvert $D(0, R)$ est le **disque de convergence**.

Si on se restreint aux variables réelles, on parle d'intervalle (ouvert) de convergence : $] - R, R[$.

Le cercle $C(0, R)$ est le **cercle d'incertitude** (ou de convergence, mais c'est trompeur!).

Exemples

1. $a_n = n^n$.

Exemples

1. $a_n = n^n$. $R = 0$ (car si $r > 0$, $\sum a_n r^n$ DVG).
2. $a_n = \frac{1}{n!}$.

Exemples

1. $a_n = n^n$. $R = 0$ (car si $r > 0$, $\sum a_n r^n$ DVG).
2. $a_n = \frac{1}{n!}$. $R = +\infty$ (d'Alembert)
3. $a_n = 1$.

Exemples

1. $a_n = n^n$. $R = 0$ (car si $r > 0$, $\sum a_n r^n$ DVG).
2. $a_n = \frac{1}{n!}$. $R = +\infty$ (d'Alembert)
3. $a_n = 1$. Série géométrique $R = 1$.

Exemples

1. $a_n = n^n$. $R = 0$ (car si $r > 0$, $\sum a_n r^n$ DVG).
2. $a_n = \frac{1}{n!}$. $R = +\infty$ (d'Alembert)
3. $a_n = 1$. Série géométrique $R = 1$. $R = \sqrt{2}$ (attention !)
4. $a_n = n^\alpha$.

Exemples

1. $a_n = n^n$. $R = 0$ (car si $r > 0$, $\sum a_n r^n$ DVG).
2. $a_n = \frac{1}{n!}$. $R = +\infty$ (d'Alembert)
3. $a_n = 1$. Série géométrique $R = 1$. $R = \sqrt{2}$ (attention !)
4. $a_n = n^\alpha$. $R = 1$ (d'Alembert)

Cercle d'incertitude

Cercle d'incertitude Il n'y a pas de résultat général sur la convergence sur ce cercle. **Exemple**

1. Si $a_n = 1$, $R = 1$ et la série diverge grossièrement sur le cercle d'incertitude.
2. Si $a_n = \frac{1}{n}$, $R = 1$ et la série converge en -1 , diverge en 1 . (En fait, convergence pour tout $z \neq 1$ tq $|z| = 1$.)

Utilisation directe du lemme d'Abel

Exemple

1. $a_n = n^e$ décimale de π . $R = ?$

Utilisation directe du lemme d'Abel

Exemple

1. $a_n = n^e$ décimale de π . $R = ?$ Pour une infinité de termes, $a_n \geq 1$, donc $a_n z^n$ bornée implique $|z| \leq 1$
Or $|a_n| \leq 9$ donc $|a_n z^n|$ est bornée si $|z| \leq 1$. D'où $R = 1$.
2. $a_n = \cos(n\theta)$.

Utilisation directe du lemme d'Abel

Exemple

1. $a_n = n^e$ décimale de π . $R = ?$ Pour une infinité de termes, $a_n \geq 1$, donc $a_n z^n$ bornée implique $|z| \leq 1$
Or $|a_n| \leq 9$ donc $|a_n z^n|$ est bornée si $|z| \leq 1$. D'où $R = 1$.
2. $a_n = \cos(n\theta)$. a_n bornée donc $R \geq 1$ et $\sum \cos(n\theta)$ diverge grossièrement, donc $R \leq 1$.

Avec le critère de d'Alembert

Méthode On fixe $z \neq 0$ et on applique le critère de d'Alembert à la série numérique $\sum a_n z^n$.

Exemple

1. $\sum \frac{n!}{\sqrt{(2n)!}} z^n$

Avec le critère de d'Alembert

Méthode On fixe $z \neq 0$ et on applique le critère de d'Alembert à la série numérique $\sum a_n z^n$.

Exemple

1. $\sum \frac{n!}{\sqrt{(2n)!}} z^n (R = 2).$
2. $\sum z^{n!}$

Avec le critère de d'Alembert

Méthode On fixe $z \neq 0$ et on applique le critère de d'Alembert à la série numérique $\sum a_n z^n$.

Exemple

1. $\sum \frac{n!}{\sqrt{(2n)!}} z^n (R = 2).$
2. $\sum z^{n!} (R = 1)$
3. $\sum \frac{z^{2n}}{3^n}$

Avec le critère de d'Alembert

Méthode On fixe $z \neq 0$ et on applique le critère de d'Alembert à la série numérique $\sum a_n z^n$.

Exemple

1. $\sum \frac{n!}{\sqrt{(2n)!}} z^n (R = 2)$.
2. $\sum z^{n!} (R = 1)$
3. $\sum \frac{z^{2n}}{3^n}$ série lacunaire, attention ! ($R = \sqrt{3}$)
4. $\sum \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \frac{z^n}{n!}$

Avec le critère de d'Alembert

Méthode On fixe $z \neq 0$ et on applique le critère de d'Alembert à la série numérique $\sum a_n z^n$.

Exemple

1. $\sum \frac{n!}{\sqrt{(2n)!}} z^n (R = 2)$.
2. $\sum z^{n!} (R = 1)$
3. $\sum \frac{z^{2n}}{3^n}$ série lacunaire, attention ! ($R = \sqrt{3}$)
4. $\sum \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \frac{z^n}{n!} (R = \infty)$.

Critère de comparaison

Théorème Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux SE, de rayons R_a et R_b .

1. Si apcr , $|a_n| \leq |b_n|$, alors $R_a \geq R_b$.
2. Si $a_n = O(n^\alpha b_n)$, alors $R_a \geq R_b$. ($\alpha \in \mathbb{R}$).
3. Cas particulier : Si $a_n \sim (n^\alpha b_n)$, alors $R_a = R_b$.

Exemples

1. $\sum \frac{z^n}{n^2}$

Critère de comparaison

Théorème Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux SE, de rayons R_a et R_b .

1. Si apcr , $|a_n| \leq |b_n|$, alors $R_a \geq R_b$.
2. Si $a_n = O(n^\alpha b_n)$, alors $R_a \geq R_b$. ($\alpha \in \mathbb{R}$).
3. Cas particulier : Si $a_n \sim (n^\alpha b_n)$, alors $R_a = R_b$.

Exemples

1. $\sum \frac{z^n}{n^2}$ ($R = 1$)
2. $\sum \frac{\cos(n\theta)}{n^\alpha} z^n$.

Critère de comparaison

Théorème Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux SE, de rayons R_a et R_b .

1. Si apcr , $|a_n| \leq |b_n|$, alors $R_a \geq R_b$.
2. Si $a_n = O(n^\alpha b_n)$, alors $R_a \geq R_b$. ($\alpha \in \mathbb{R}$).
3. Cas particulier : Si $a_n \sim (n^\alpha b_n)$, alors $R_a = R_b$.

Exemples

1. $\sum \frac{z^n}{n^2}$ ($R = 1$)
2. $\sum \frac{\cos(n\theta)}{n^\alpha} z^n$. $R = 1$.

Remarque En particulier, si $\lambda \neq 0$, $\sum a_n z^n$ et $\sum \lambda a_n z^n$ ont le même rayon de convergence.

Somme de séries entières

Proposition Soient deux séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux SE, de rayons R_a et R_b et R le rayon de $\sum (a_n + b_n) z^n$.

1. $R \geq \inf(R_a, R_b)$
2. Si $R_a \neq R_b$, alors $R = \inf(R_a, R_b)$.

Démonstration Si $r < \inf(R_a, R_b)$, alors $a_n z^n + b_n z^n$ est bornée (+Abel).

Si $R_a < |z| < R_b$, alors $\sum (a_n + b_n) z^n$ est la somme d'une série CV et d'une série DV, donc $R = R_a$.

Sur la somme de deux séries entières...

1. Corollaire : combinaison linéaire de deux séries entières. Le rayon est $\geq \inf(R_a, R_b)$.
2. Si $R_a = R_b$ (p.ex $b_n = -a_n$) on peut avoir $R > R_a$ si les termes des deux séries se "compensent" (mais on a $R = R_a$ pour $b_n = 2a_n$, p.ex).
3. Si $R_1 = R(\sum a_{2n}z^{2n})$ et $R_2 = R(\sum a_{2n+1}z^{2n+1})$, alors $R = \inf(R_1, R_2)$. (Abel!!).
(Ici, les termes ne se "compensent" pas...)

Produit de Cauchy de deux séries entières

Proposition Soient deux séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux SE, de rayons R_a et R_b . La série produit $\sum c_n z^n$ est définie par le produit de Cauchy :

$$c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q$$

Alors la série $\sum c_n z^n$ a pour rayon : $R \geq \inf(R_a, R_b)$. Pour $|z| < R$, les sommes vérifient : $S_c(z) = S_a(z)S_b(z)$.

Démonstration Si $|z| < \inf(R_a, R_b)$, alors on applique le théorème de convergence du produit de deux séries ACV.

Remarque La fonction $\sqrt{1+x^2}$ est la somme d'une série entière de rayon 1 (cf. ci-dessous), alors que son carré est la somme d'une série de rayon ∞ .

Exercice

Exercice 1 Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon $R_a > 0$ et de somme $A(z)$.
On pose $p_n = \sum_{k=0}^n a_k$. Montrer que le rayon de $\sum p_n z^n$ est ≥ 1 et déterminer sa somme en fonction de $A(z)$.

Exercice

Exercice 2 Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon $R_a > 0$ et de somme $A(z)$.

On pose $p_n = \sum_{k=0}^n a_k$. Montrer que le rayon de $\sum p_n z^n$ est ≥ 1 et déterminer

sa somme en fonction de $A(z)$. SOL : la série $\sum p_n z^n$ est le produit de Cauchy des séries entières $\sum a_n z^n$ de rayon R et de $\sum z^n$ de rayon 1. Elle a donc un rayon $R \geq \min(1, R)$ et sa somme est $\frac{A(z)}{1-z}$.

Produit terme à terme

Exercice 3 Minorer le rayon de CV de $\sum a_n b_n z^n$ en fonction de R_a et R_b . Que dire de $\sum (a_n)^2 z^n$?

Produit terme à terme

Exercice 4 Minorer le rayon de CV de $\sum a_n b_n z^n$ en fonction de R_a et R_b . Que dire de $\sum (a_n)^2 z^n$?

SOL : si $r < R_a$ et $r' < R_b$, alors $a_n b_n (rr')^n$ bornée, donc $R \geq rr'$, et donc $R \geq R_a R_b$.

Si $a_n = b_n$, alors $R \geq R_a^2$ et $(a_n)^2 |z|^n$ bornée implique $|z| \leq (R_a)^2$ d'où $R = (R_a)^2$.

Convergence uniforme d'une suite de fonctions de la variable complexe

Si f est bornée sur $A \subset \mathbb{C}$, on pose $\|f\|_\infty = \sup_{z \in A} |f(z)|$, ce qui norme $\mathcal{B}(A, \mathbb{C})$.

On définit ainsi la convergence uniforme d'une suite ou d'une série de fonctions ou la convergence normale d'une série de fonctions définies sur A comme dans le cas réel.

Exemple Montrer que la série $\sum z^n$ converge uniformément sur le disque $D(0, r)$ avec $r < 1$.

Proposition Une série entière converge normalement **sur tout compact** inclus dans le disque (ouvert) de convergence. **Démonstration** Un tel compact K est inclus dans un disque fermé $D_F(0, r)$ avec $r < R$.

Pour tout $|z| \leq r$, $|a_n| \cdot |z|^n \leq |a_n| r^n$. Or, $\sum |a_n| r^n$ converge donc $\sum a_n z^n$ converge normalement sur $D_F(0, r)$ et en particulier sur K .

Continuité de S

En remplaçant la variable réelle par une variable complexe dans les démonstrations du cours sur les séries de fonctions, on montre :

1. Une série de fonctions de la variable complexe qui converge normalement converge uniformément (convergence dans $(\mathcal{B}(A), \|\cdot\|_\infty)$).
2. Si $z_0 \in A$ et si une suite de fonctions continues en z_0 converge uniformément sur A , alors la limite est continue en z_0 .

On peut donc énoncer la proposition :

Proposition La somme S d'une série entière est continue sur le disque (ouvert) de convergence.

Complément : Justification directe de la continuité

Soit $r < R$ et z, z_0 de modules $\leq r$. Alors

$$a_n z^n - a_n z_0^n = (z - z_0) a_n \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k} (-z_0)^k, \text{ donc}$$

$|a_n z^n - a_n z_0^n| \leq |z - z_0| n |a_n| r^n$. Comme les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont le même rayon, on en déduit que $\sum |z - z_0| n |a_n| r^n$ converge et en notant K_r sa somme : $|S(z) - S(z_0)| \leq K_r |z - z_0|$.

Conclusion : S est lipschitzienne sur tout disque fermé inclus dans le disque (ouvert) de convergence, donc S est continue en tout point du disque de convergence (Attention, K_r dépend de r , en général S n'est pas lipschitzienne sur le disque de convergence tout entier).

Limite aux bornes de l'intervalle de convergence

Cas de convergence absolue au bord S'il existe z avec $|z| = R$ tq $\sum a_n z^n$ converge absolument, alors la convergence normale a lieu sur le disque fermé $D_F(O, R)$ (et la somme est donc continue sur le disque fermé).

Exemple $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n^2}$ est continue sur le disque unité fermé.

Exemple Utiliser le CSSA pour prouver la convergence uniforme de $\sum \frac{x^n}{n}$ sur $[-1, 0]$.

Divergence sur le cercle d'incertitude

Exemple Limite en R . Soit $a_n \geq 0$, et $\sum a_n z^n$ de rayon R et de somme f sur $] - R, R[$. On suppose $\sum a_n R^n$ diverge. Alors $\lim_{x \rightarrow R} f(x) = +\infty$.

Divergence sur le cercle d'incertitude

Exemple Limite en R . Soit $a_n \geq 0$, et $\sum a_n z^n$ de rayon R et de somme f sur $] - R, R[$. On suppose $\sum a_n R^n$ diverge. Alors $\lim_{x \rightarrow R} f(x) = +\infty$.

SOL Soit $A > 0$, pour N assez grand, $\sum_{n=0}^N a_n R^n \geq A + 1$. Pour x proche de R ,

$$f(x) \geq \sum_{n=0}^N a_n x^n \geq \sum_{n=0}^N a_n R^n - 1 \text{ et donc : } f(x) \rightarrow +\infty.$$

Exemple $z \mapsto \exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ est continue sur $\mathbb{C}$. Attention, pas de convergence normale sur $\mathbb{C}$ tout entier (sinon, $\exp$ serait un polynôme, cf. exercice).

Identification des coefficients

Lemme Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. On suppose $f(z) = 0$ sur le cercle $C(0, r)$ inclus dans le disque de convergence.

Montrons que $a_n = 0$ pour tout n .

Démonstration On considère

$$\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-ip\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{i(n-p)\theta} d\theta = 2\pi r^p$$
 (échange des signes par convergence normale). Comme f est nulle sur le cercle $C(0, r)$, alors $a_p = 0$.

Théorème d'identification des coefficients Si $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ sur un disque ouvert $D(0, r)$, alors $a_n = b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Proposition (Corollaire) Si $f(z) = f(-z)$ (resp $f(-z) = -f(z)$), alors $a_{2n+1} = 0$ (resp. $a_{2n} = 0$) pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Dérivation d'une série entière

Proposition La somme S d'une série entière est C^∞ sur $] - R, R[$.
La dérivée p^e s'écrit :

$$\sum_{n \geq p} \frac{n!}{(n-p)!} a_n x^{n-p}$$

En particulier :

$$S'(x) = \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1} = \sum_{n \geq 0} (n+1) a_{n+1} x^n$$

Démonstration La série dérivée $\sum n a_n x^{n-1}$ a le **même** rayon de convergence que $\sum a_n x^n$. Elle converge normalement sur tout compact inclus dans $D(0, R)$. On applique le théorème de dérivation terme à terme, ce qui montre que S est C^1 sur $] - R, R[$.
On termine par récurrence.

Remarque Attention, même si $\sum a_n R^n$ converge absolument, la série dérivée (qui a le même rayon de convergence) peut ne pas converger en R .

Exemple $\sum \frac{x^n}{n^2}$ converge pour $x = 1$ mais la série dérivée $\sum \frac{x^{n-1}}{n}$ diverge pour $x = 1$.

Intégration

Proposition La série entière $\sum a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ a le même rayon de convergence R et

$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ est une primitive de $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sur $] - R, R[$. En

particulier, l'équation $y' = S$, $y(0) = y_0$ admet la solution unique :

$$y = y_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

ATTENTION à la valeur en 0.

Démonstration Les deux séries ont même rayon et il suffit de dériver $F(x)$.

Intégration sur $] - R, R[$

L'intégrabilité de S sur l'intervalle de convergence n'est pas assurée. On applique en général le th. d'intégration TAT.

Exemple $f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n \ln n}$, $R = 1$, et $\int_{-1}^1 \frac{|x^n|}{n \ln n} dx = \frac{2}{n(n+1) \ln n}$, et donc f est continue et intégrable sur $] - 1, 1[$.

Développement limité de la somme

Le $DL_N(0)$ de $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est donné par troncature :

$$S(x) = \sum_{n=0}^N a_n x^n + o(x^N)$$

Démonstration Si $|x| < r < R$, alors $(a_n r^n)$ est bornée, et d'après le lemme d'Abel, il existe M tel que $|a_n x^n| \leq M \left| \frac{x^n}{r^n} \right|$. D'où :

$$\left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n \right| \leq M \frac{|x|^{N+1}}{r^{N+1}} \frac{1}{(1 - \frac{|x|}{r})} = x \xrightarrow{o} 0 (x^N)$$

cqfd.

Série de Taylor

Coefficients Si $R > 0$, S est C^∞ sur $] - R, R[$ et $a_k = \frac{S^{(k)}(0)}{k!}$.

Conséquence : Théorème d'unicité des coefficients Si les sommes de deux séries entières coïncident sur $] - r, r[$, alors les coefficients sont égaux.

Proposition Si la somme S est paire alors $a_{2n+1} = 0$ pour tout n et si S est impaire, alors $a_{2n} = 0$ pour tout n .

Fonctions développables en série entière

Proposition f admet un développement en série entière « en 0 » (ou, *au voisinage de 0*) ssi il existe $r > 0$ et une série entière $\sum a_n x^n$ tel que pour tout $x \in]-r, r[$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Proposition Toute fonction DSE en 0 est C^∞ au voisinage de 0 et son DSE est unique : c'est sa série de Taylor en 0.

Quelques contre-exemples

Remarque Attention, toute fonction C^∞ admet un dév de Taylor et un DL au vois de 0 (Taylor-Young). Cependant, ce n'est pas suffisant pour être DSE.

1. La série entière ainsi définie peut être de rayon nul.

Ex : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n} \cos(n^2 x)$. f est C^∞ sur $\mathbb{R}$ (CVN de toutes les séries dérivées).

Cependant, $f^{4k}(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^{8k} e^{-n} \geq (4k)^{8k} e^{-4k} \geq (4k)!(4k)^{4k} e^{-4k}$.

Pour tout $r > 0$, $(4k)^{4k} e^{-4k} r^{4k} \rightarrow +\infty$, donc $R = 0$.

2. Même si la série entière a un rayon non nul, sa somme peut être différente de f .

Ex : $f(x) = \exp(-1/x^2)$, C^∞ en 0 mais son développement de Taylor est nul.

Rappel : théorèmes de Taylor

On décompose $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$. NB : ici on utilise le développement de Taylor en 0 (= série de MacLaurin).

Théorème de Taylor-Laplace (reste intégral) Soit f une fonction de classe C^{p+1} sur I . Soit $a \in I$. Pour tout $x \in I$,

$$R_p(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^p}{p!} f^{(p+1)}(t) dt$$

Démonstration Par récurrence.

Inégalité de Taylor-Lagrange Si f est C^{p+1} sur $[a, x]$ (ou $[x, a]$), alors :

$$|R_p(x)| \leq \frac{(x-a)^{p+1}}{(p+1)!} \sup_{t \in [0, x]} |f^{(p+1)}(t)|$$

Application au développement en S.E.

Corollaire Si $R_p(x)$ CVS vers 0 sur $] - r, r[$ (en particulier si R_p CVU vers 0) alors f est DSE en 0.

Exemple Soit $r > 0$ et f une fonction C^∞ sur $] - r, r[$ telle que pour un certain $M \geq 0$, $\forall x \in] - r, r[, \forall n \in \mathbb{N}, |f^{(n)}(x)| \leq M$. Alors f est DSE sur $] - r, r[$.

Application au développement en S.E.

Corollaire Si $R_p(x)$ CVS vers 0 sur $] - r, r[$ (en particulier si R_p CVU vers 0) alors f est DSE en 0.

Exemple Soit $r > 0$ et f une fonction C^∞ sur $] - r, r[$ telle que pour un certain $M \geq 0$, $\forall x \in] - r, r[, \forall n \in \mathbb{N}, |f^{(n)}(x)| \leq M$. Alors f est DSE sur $] - r, r[$. SOL D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange,

$$|R_n(x)| \leq M \frac{r^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0, \text{ pour tout } x \in] - r, r[, \text{ cqfd.}$$

Développements classiques

Les fonctions suivantes sont DSE ($R = 1$). On obtient ces développements par opérations algébriques et intégration :

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k$$

$$\frac{1}{(1-t)^p} = \sum_{k=p}^{\infty} \frac{k!}{(k-p)!p!} t^{p-k}$$

$$\text{soit } \frac{1}{(1-t)^{p+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+p}{p} t^k$$

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{\infty} (-t)^k$$

Remarque Valable pour t complexe (produit de Cauchy).

Logarithmes

$$\frac{1}{(1+t)^p} = \sum_{k=p}^{\infty} \frac{k!}{(k-p)!} (-t)^{p-k}$$

$$\ln(1+t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} t^k}{k}$$

$$\ln(1-t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} t^k$$

Arc tangentes

$$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{2k}$$

$$\text{Arctan}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} t^{2k+1}$$

$$\frac{1}{1-t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} t^{2k}$$

$$\text{Argth}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} t^{2k+1}$$

Exemples

Exemple Calculer $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$.

Exemple Justifier $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2$.

Exemples

Exemple Calculer $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$.

Exemple Justifier $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2$. SOL : On a $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$

pour $x \in [0, 1[$. Avec CSSA, $|R_{n-1}(x)| \leq \frac{1}{n}$ donc CVU sur $[0, 1[$. On applique le th. de la double limite, cqfd.

Exemple Justifier que $t \mapsto \frac{\ln(1+t)}{t}$ admet un prolongement C^∞ en 0.

Exemple $f(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^2}$. f est-elle C^1 en 1 ? en -1 ?

Exemple Justifier que $t \mapsto \frac{\ln(1+t)}{t}$ admet un prolongement C^∞ en 0.

Exemple $f(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^2}$. f est-elle C^1 en 1 ? en -1 ?

1. f est continue sur $[-1, 1]$.

Exemple Justifier que $t \mapsto \frac{\ln(1+t)}{t}$ admet un prolongement C^∞ en 0.

Exemple $f(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^2}$. f est-elle C^1 en 1 ? en -1 ?

1. f est continue sur $[-1, 1]$.
2. On écrit $xf'(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n} = \frac{-\ln(1-x)}{x}$ qui tend vers $+\infty$ en 1 et comme $x \mapsto \frac{-\ln(1-x)}{x}$ est C^∞ sur $[-1, 0]$, f est C^∞ sur $[-1, 1[$.

Propriétés des fonctions DSE

Remarque

1. Une fonction DSE peut être définie à l'extérieur du disque de convergence. Exemple : $\text{Arctan}(x)$ sur $\mathbb{R}$, mais DSE sur $] - 1, 1[$ seulement.
2. De même, le comportement sur le cercle de convergence peut être très différent. Par ex, $\frac{1}{1+x}$ tend vers $\frac{1}{2}$ en 1 mais $\sum (-1)^n x^n$ diverge grossièrement en 1.
3. Une fonction C^∞ peut ne pas être DSE. Exemple : $f(x) = \exp(-\frac{1}{x^2})$ (prolongée par 0 et 0). On a $f^{(k)}(0) = 0$ donc f n'est pas DSE.
4. Si f est DSE, cette série entière peut avoir un intervalle de convergence plus grand que le domaine de définition de f . La somme de cette série est un prolongement de f (prolongement analytique).

Exemple de prolongement analytique

Exemple (Prolongement analytique) On considère $f : \frac{\operatorname{Arctan}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$ prolongée par continuité sur $[0, +\infty[$. Elle admet le DSE : $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^n$ sur $]0, 1[$. Elle admet donc un prolongement analytique unique sur $] -1, 1[$, donné par $x \mapsto \frac{\operatorname{Argth} \sqrt{-x}}{\sqrt{-x}}$ si $x \in] -1, 0[$. NB : ce n'est pas le seul prolongement C^∞ , mais c'est le seul prolongement DSE.

Développement d'une fonction rationnelle en série entière

Principe : décomposition en éléments simples.

Exemple
$$f(x) = \frac{\sin \theta}{x^2 - 2x \cos \theta + 1} = \sum_{k=0}^{\infty} x^n \sin(n+1)\theta.$$

Démonstration On décompose
$$f(x) = \frac{\sin \theta}{(x - e^{i\theta})(x - e^{-i\theta})} = \dots$$

Développement de l'exponentielle en série entière

L'inégalité de Taylor-Lagrange donne :

$$e^t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} t^n$$

$(R = \infty)$.

Fonctions trigonométriques

Corollaires Les fonctions suivantes sont DSE sur $\mathbb{R}$:

$$\cos t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} t^{2n}$$

$$\sin t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n+1}$$

$$\operatorname{ch} t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} t^{2n}$$

$$\operatorname{sh} t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!} t^{2n+1}$$

Développement obtenu par une équation différentielle

Proposition $\forall x \in] - 1, 1[, (1 + x)^a = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{k} x^k$ avec

$$\binom{a}{k} = \frac{a(a-1)\cdots(a-k+1)}{k!}$$

Démonstration $f(x) = (1 + x)^a$ est solution de l'équation différentielle $(1 + x)y' = ay$. Cherchons solutions DSE de l'équation. On obtient : $(k + 1)a_{k+1} + ka_k = a.a_k$ donc :

$$a_{k+1} = \frac{(k - a)}{k + 1} a_k$$

On considère une telle série entière. Son rayon de convergence est $R = 1$. Sa somme est donc solution de l'équation différentielle sur $] - 1, 1[$. Par unicité de la solution de l'équadiff, on obtient le développement.

Fonction Arc sinus

Conséquence

$$\operatorname{Arcsin} t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{2^k k!} \frac{t^k}{(2k+1)}$$

Redéfinition de l'exponentielle

Les résultats vus dans ce chapitre permet de justifier les propriétés de l'exponentielle vues dans les classes précédentes.

On pose $\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.

Propriétés

1. $R = \infty$ (d'Alembert)
2. D'après le théorème sur les produits de Cauchy des séries ACV, $\exp(z + z') = \exp(z) \cdot \exp(z')$.
3. $\exp(0) = 1$, la propriété préc. montre que $\exp$ ne s'annule pas et $\exp$ est un morphisme de groupes de $(\mathbb{C}, +)$ dans $(\mathbb{C}^*, \cdot)$
4. En particulier, si x, y réels, $\exp(x + iy) = \exp(x) \cdot \exp(iy)$. On définit $\cos y = \operatorname{Re}(\exp(iy))$ et $\sin y = \operatorname{Im}(\exp(iy))$. On constate

$$\cos(y)^2 + \sin(y)^2 = (\cos(y) + i \sin(y))(\cos(y) - i \sin(y)) = \exp(iy) \exp(-iy) = 1$$

On montre facilement $\sin' = \cos$ et $\cos' = -\sin$.

Application à l'exponentielle réelle

+ difficile : montrer que $x \mapsto e^{ix}$ est périodique... Développement de l'exponentielle complexe. On pose $f(t) = \exp(tz)$ où $t \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$. Alors f vérifie :

$$f(0) = 1$$

$$f' = zf$$

Démonstration On a $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(zt)^n}{n!}$. f est C^∞ et vérifie les conditions posées. On montre facilement l'unicité de la solution du pb de Cauchy (dériver $\frac{g}{f}$ avec g autre solution).