Sauf mention contraire, les fonctions sont définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$ noté I, et prennent leurs valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Convergence simple d'une suite de fonctions

Définition Une suite de fonctions (f_n) converge simplement vers f sur I ssi pour tout $x \in I$, $f_n(x) \to f(x)$.
Exemple Limite simple de la suite de fonctions (f_n) définies sur $\mathbb{R}$ par :
$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$

Convergence simple d'une suite de fonctions

Définition Une suite de fonctions (f_n) converge simplement vers f sur I ssi pour tout $x \in I$, $f_n(x) \to f(x)$.

Exemple Limite simple de la suite de fonctions (f_n) définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

$(1 + \frac{x}{n})^n \to e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Problématique Bien sûr, une suite de fonctions n'a pas toujours une limite simple.

Mais si la suite (f_n) converge simplement, les propriétés des fonctions f_n passent-elles à la limite ? (continuité, caractère borné, convexité, intégrabilité, dérivabilité, signes...)

Propriétés qui passent à la limite simple

1. Signe : Si $f_n \geq 0$, alors $f \geq 0$.
2. Parité : Si f_n paire (resp impaire), alors f est paire (resp impaire).
3. Monotonie : Si f_n est une suite de fonctions croissantes, alors sa limite simple est croissante.(Attention ! ici ce sont les fonctions qui sont monotones.)
   (RQ : la strictement monotonie ne passe pas à la limite simple).
4. Convexité : l'inégalité $f_n(tx + (1 - t)y) \leq tf_n(x) + (1 - t)f_n(y)$ passe à la limite.
5. Suite de polynômes de degré borné. Si f_n est une suite de polynômes de $\mathbb{K}_N[X]$, alors $f \in \mathbb{K}_N[X]$ (utiliser des polynômes de Lagrange).

Propriétés qui ne passent pas en général à la limite simple

Exemple

1. Continuité.
   $f_n(x) = x^n$ sur $[0,1]$: pas de continuité (alors que les f_n sont C^∞).
2. Intégration.
   f_n affine sur $[0, \frac{1}{n}]$, $[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]$, nulle sur $[\frac{2}{n}, 1]$, $f_n(0) = 0$ et $f_n(\frac{1}{n}) = n$.
   Alors f_n converge simplement vers 0 et pourtant $\int_{[0,1]} f_n = 1$.
3. Caractère borné.
   $f_n(x) = \min(n, e^x)$ est bornée mais $f_n(x) \to \exp(x)$ qui n'est pas bornée !

Convergence simple d'une série de fonctions

Définition De même, $\sum f_n$ est **simplement convergente**, de **somme** f ssi la suite de ses sommes partielles $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k$ converge simplement vers f.

Exemples

1. Pour $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}$ sur $\mathbb{R}$, la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement vers exp sur $\mathbb{R}$.
2. $f_n(x) = 1/n^x$. Déterminer le domaine de définition de $\zeta : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^x$.

Passer à la limite sous le signe intégrale

Problématique Si f_n tend vers f, l'intégrale de f_n tend-elle vers l'intégrale de f ?
En général, la convergence simple ne suffit pas :

Exemple

1. Soit f_n nulle sur $[0,1]$ sauf en 1, 1/2,..., $1/n$ où elle vaut 1. La limite simple **n'est pas cpm** sur $[0,1]$.
2. Soit $f_n(t) = \dfrac{1}{t^{1+\frac{1}{n}}}$. Les f_n sont intégrables sur $[1,+\infty[$ et (f_n) converge simplement vers $f : t \mapsto \dfrac{1}{t}$ qui **n'est pas intégrable** sur $[1,+\infty[$.
3. Soit f_n définie sur $[0,1]$ par un triangle isocèle de base $[0, \dfrac{2}{n}]$ et de hauteur n, et nulle sinon. Alors f_n converge simplement vers 0. Cependant, $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,dt = 1$ pour tout n...

Ces exemples montrent qu'en général, la limite simple d'une suite de fonctions cpm intégrables 1) n'est pas toujours cpm ; 2) même quand elle est cpm, elle n'est pas toujours intégrable ; 3) même quand elle est intégrable, son intégrale n'est pas néc. la limite des intégrales.

Théorème de Convergence Dominée

Théorème (de convergence dominée) Soit $f_n : I \to \mathbb{C}$ une suite de fonctions cpm intégrables. Si

1. f_n CVS vers une fonction cpm f
2. Il existe une fonction cpm intégrable φ telle que $|f_n| \leq \varphi$ (DOMINATION)

Alors f est intégrable et $\displaystyle\int_I f_n \to \int_I f$.

Exemples

1. Limite de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^n}\, dt$
2. Limite de $\displaystyle\int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx$.

Application du TCD aux sommes partielles des séries

1e version : on applique le TCD aux sommes partielles.
Théorème (de convergence dominée) Soit $f_n : I \to \mathbb{C}$ une suite de fonctions cpm intégrables. Si

1. $\sum f_n$ CVS, de somme f cpm.
2. Il existe une fonction cpm intégrable φ telle que pour tout n : $|\sum_{k=0}^{n} f_k| \leq \varphi$ (DOMINATION)

Alors f est intégrable, la série $\sum \int_I f_k$ converge, et

$$\int_I \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(t)\,dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_I f_k(t)\,dt$$

Application du TCD aux restes

2e version : on peut formuler d'une autre manière en considérant les restes :
Théorème (de convergence dominée) Soit $f_n : I \to \mathbb{C}$ une suite de fonctions cpm intégrables. Si

1. $\sum f_n$ CVS, de somme f cpm.
2. Il existe une fonction cpm intégrable φ telle que pour tout n : $|\sum_{k=n}^{+\infty} f_k| \leq \varphi$

   (DOMINATION)

Alors la série $\sum \int_I f_k$ converge, et

$$\int_I \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(t)\, dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_I f_k(t)\, dt$$

Démonstration On rappelle que $R_n = f - S_n$, donc le TCD s'applique avec $|S_n| \leq |f| + |\varphi|$.

(NB : f est intégrable car $|f| = |\sum_{n=0}^{+\infty} f_k| \leq \varphi$.)

Exemple

Exemple On considère $f(x) = \dfrac{1}{1+x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k x^k$. f est la somme d'une série qui converge simplement sur $]-1,1[$ (et en particulier, sur $[0,1[$.)
f est continue et intégrable sur $[0,1[$.

DOM : D'après le CSSA, $|\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}(-1)^k x^k| \leq |x^n| \leq 1$ (constante, intégrable sur $[0,1[$). D'après le TCD,

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^1 (-1)^k t^k \, dt = \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k t^k \, dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t} \, dt = \ln 2$$

et donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}/k = \ln 2$.

Continuité des intégrales à paramètre

Exemple On considère l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-xt}\, dt$. Son expression contient un paramètre (ici x) indépendant de la variable d'intégration t.
On peut donc définir une fonction $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-xt}\, dt$. L'intégrale est convergente pour $x > 0$, donc f est définie sur $]0, +\infty[$. Dans ce cas particulier, on peut même calculer explicitement : $f(x) = \frac{1}{x}$.
Quelles propriétés de f pouvait-on prévoir à partir des propriétés de $x \mapsto e^{-xt}$? (signe, monotonie, continuité ?)
Exemple Pour tout $t > 0$, on pose : $g(x, t) = 0$ si $x \leq 1$ et $g(x, t) = e^{-xt}$ si $0 < x < 1$. On pose $f(x) = \int_0^{+\infty} g(x, t)\, dt$. Expliciter la fonction f. Est-elle continue ? Pouvait-on s'y attendre ?

Continuité des intégrales à paramètre

Contre-exemple On considère la fonction $f(x) = \int_0^{+\infty} xe^{-xt}\,dt$ pour $x \geq 0$.

La fonction $(t,x) \mapsto x.e^{-xt}$ est visiblement continue sur $\mathbb{R}_+^2$, donc par rapport à chaque variable.
Cependant, $f(0) = 0$ et $\forall x > 0$, $f(x) = 1$.
Conclusion La continuité de l'intégrande par rapport au paramètre n'est pas suffisante pour assurer la continuité de l'intégrale. On va ajouter une condition de **domination**.

Théorème de continuité 1-2-3

Théorème (TCIP, ou théorème 1-2-3) Soient I, J des intervalles de $\mathbb{R}$, $f : I \times J \to \mathbb{K}$ On suppose :

1. Pour tout $x \in I$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I.
2. Pour tout $t \in J$: $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur I.
3. DOMINATION : Il existe une application CPM intégrable sur I telle que : $\forall x \in I, \forall t \in J, \quad |f(x,t)| \leq \varphi(t)$.

Alors l'application l'application F définie par :

$$F : x \mapsto = \int_J f(x,t)\, dt$$

est continue sur I.

Démonstration On utilise la caractérisation séquentielle de la limite (on considère une suite (x_n) qui tend vers $x \in I$, puis on pose $g_n(t) = f(x_n, t)$ et on applique le TCD à $\int_J g_n$, qui tend finalement vers $F(x)$).

Exemple $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\, dt$. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Version locale du théorème

Remarque

1. On peut remplacer I par un intervalle plus petit. (ex : continuité de $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} sin(t)e^{-xt}$ sur $\mathbb{R}_+^*$). On chosit en général des intervalles du type $[a, +\infty[$ ou des segments $[a, b]$.)
2. Si I est borné et f est bornée sur $U \times I$, alors la domination est automatique.
3. En particulier, si I et J sont deux segments et f continue sur le compact $I \times J$, donc bornée (et donc dominée par une constante, intégrable sur I), alor F est continue sur U.
4. On peut adapter la démonstration pour étudier la limite de F en $+\infty$, par ex. (prendre $x_n \to +\infty$).

Théorème de dérivation des intégrales à paramètres (1-2-3-4)

Théorème (TDIP ou théorème 1-2-3-4) Soient I, J des intervalles de $\mathbb{R}$, $f : I \times J \to \mathbb{K}$. On suppose :

1. Pour tout $x \in I$, $t \mapsto f(x,t)$ est **continue par morceaux et intégrable** sur I.
2. Pour tout $t \in J$: $x \mapsto f(x,t)$ est C^1 sur I.
   (**NB** : quand on applique le théorème, on calcule ici $\partial f(x,t)/\partial x$.)
3. Pour tout $x \in I$, $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est CPM sur I.
4. DOMINATION : Il existe une application CPM intégrable sur I telle que : $\forall t \in J$, $|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)| \leq \varphi(t)$.

Alors l'application F est C^1 sur I et, pour tout $x \in I$:

$$F'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$$

(formule de Leibniz)

Démonstration du théorème de dérivation

Démonstration Par hypothèse, la fonction $F(x)$ est bien définie sur I.
On fixe $x \in I$, distinct de $\sup I$. Soit $\alpha > 0$ tel que $[x, x+\alpha] \subset I$.

Pour tout $t \in J$, on pose : $G(h,t) = \dfrac{f(x+h,t) - f(x,t)}{h}$ si $h \in]0, \alpha]$ et et $G(0,t) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$.

On va appliquer le théorème de continuité à $h \mapsto \displaystyle\int_J G(h,t)\,dt$.

1. Pour tout $h \in [0, \alpha]$, $t \mapsto G(h,t)$ est CPM (hyp 1 pour $h > 0$ et 3 pour $h = 0$).
2. Pour tout $t \in J$, $h \mapsto G(h,t)$ est continue (sur $]0, \alpha]$ par hyp 2 et théorème généraux, en 0 par définition de la dérivée).
3. (DOM). On fixe $t \in J$: si $h = 0$, $|G(0,t)| \leq \varphi(t)$ (hyp 4). Si $h > 0$, l'inégalité des accroissements finis donne l'existence de $c \in]0, h[$ tel que $|G(h,t)| \leq |\dfrac{\partial f}{\partial x}(c,t)| \leq \varphi(t)$ (hyp 4).

D'après le TCIP, $\lim_{h\to 0^+} \int_J G(h,t)\,dt = \int_J G(0,t)\,dt$, c'est-à-dire que la limite en 0^+ de $(F(x+h)-F(x))/h = \int_J \frac{f(x+h,t)-f(x,t)}{h}\,dt$ est : $\int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$.
Si $x \neq \inf I$, on montre de même que F est dérivable à gauche en x, et donc F est bien dérivable en tout point de I, avec :

$$F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$$

Enfin, on remarque que le théorème de continuité s'applique à cette formule, et donc F' est continue sur I.

Extensions du théorème de dérivation

Remarque

1. On peut remplacer I par un intervalle plus petit.
2. Si I et J sont des segments et f continue et $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ continues sur $I \times J$ (en particulier, si f est C^1 sur $U \times I$), alors la domination est automatique (car la dérivée partielle est continue sur un compact de $\mathbb{R}^2$).

Un exemple classique : la fonction Γ d'Euler

On pose $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt$.

1. Γ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Une intégration par parties montrer que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour tout $t > 0$. Or $\Gamma(1) = 1$ donc $\Gamma(n+1) = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Continuité : pour $t > 0$, $x \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $]0, +\infty[$ (fonction exponentielle). Pour tout $x > 0$, $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue. Soient $0 < a < b$. Si $x \in [a, b]$, alors $t^{x-1}e^{-t} \leq \begin{cases} t^{a-1}e^{-t} \text{si } t \leq 1 \\ t^{b-1}e^{-t} \text{ si } t > 1 \end{cases}$. d'où la domination. Ceci montre que Γ est continue sur tout segment de $]0, +\infty[$, donc sur tout $]0, +\infty[$.
3. Caractère C^∞. On montre par récurrence que $\Gamma^{(k)}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{x-1} e^{-t}\, dt$

4. Calcul de $\Gamma(\frac{1}{2})$. Poser $f(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)^2$ et $g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(1+t^2)x}}{1+t^2}\,dt$. Calculer $g(0)$, $f(0)$, $f'(x)$, $g'(x)$, et en déduire $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.
5. Calcul d'un équivalent de $\Gamma(x+1)$ en $+\infty$. On pose $h(t) = x\ln t - t$. h est maximal en x, on se ramène à un maximum fixe avec le changement de variable $t = xu$, et il vient :

$$\Gamma(x+1) = x^{x+1}\int_0^{+\infty} e^{x(\ln u - u)}\,du$$

On se donne $a < b \leq +\infty$ et f une fonction : $[a, b[$ dans $\mathbb{C}$ telle que $t \mapsto e^{-xt}f(t)$ soit intégrable pour x assez grand, $f(a) \neq 0$ et f continue en a.

5.1 Montrer que $\int_a^b f(t)e^{-xt}\,dt \sim \frac{f(a)}{x}$ en $+\infty$. (justifier que f bornée sur un segment $[0, \alpha]$, puis chgt de v sur ce segment $t = xu$ et CVD.)

5.2 Montrer que si $\varphi' > 0$ sur $[a, b[$, alors $\int_a^b f(t)e^{-x\varphi(t)}\,dt \sim e^{-x\varphi(a)}\frac{f(a)}{x\varphi'(a)}$ en $+\infty$.

Convergence uniforme

Rappel Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Le $\mathbb{K}$-ev $\mathscr{B}(I,\mathbb{K})$ des fonctions bornées sur I est normé par $\|.\|_\infty$, avec :

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in I} \|f(t)\|$$

Définition Si (f_n) est une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$, on dit que (f_n) converge uniformément vers $f : I \to \mathbb{K}$ si $f_n - f$ bornée apcr et $f_n - f$ tend vers 0 dans $(\mathscr{B}(I,\mathbb{K}), \|.\|_\infty)$. (c-à-d : $||f_n - f||_\infty \to 0$).

Remarque Attention ! f_n et f ne sont pas nécessairement bornées.

Exemple $P_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ converge uniformément vers $\exp(x)$ sur tout segment $[-a, a]$ (avec l'inégalité de Taylor-Lagrange).

Méthode pratique

Proposition f_n converge uniformément vers f ssi il existe une suite réelle α_n (indépendante de t) qui tend vers 0, telle que :

$$\forall n, \forall t \in I, |f_n(t) - f(t)| \leq \alpha_n$$

Remarque La courbe de f_n doit être dans un « tube » autour de celle de f, de largeur α_n.

Le caractère "borné" passe à la limite uniforme

Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est bornée et f_n CVU vers f, alors f est bornée :
Dans ce cas, la convergence uniforme de la suite (f_n) équivaut à la convergence de (f_n) dans $(\mathscr{B}, ||.||_\infty)$.
(Rappel : La norme $||.||_\infty$ est également appelée "norme de la convergence uniforme".)

Convergence uniforme et convergence simple

Proposition Si f_n CVU vers f, alors f_n CVS vers f.
Démonstration Car pour tout $x \in I$, $|f_n(x) - f(x)| \leq ||f_n - f||_\infty$.
Attention Réciproque fausse !
Exemple La suite de fonctions $f_n(x) = x^n$ ne converge pas uniformément sur $[0, 1[$: quelle est sa limite simple f ? Calculer $||f_n - f||_\infty$ pour tout n.
Remarque En particulier, toutes les propriétés qui passent à la limite simple passent à la limite uniforme : signe, parité, monotonie (large), convexité.

Expression à l'aide des quantificateurs

Convergence simple :
$\forall x \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$
Convergence uniforme :
$\forall \varepsilon, \exists n_0, \forall n \geq n_0, \forall x \in A, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$

La convergence uniforme est une notion globale

Remarque

1. Si (f_n) converge uniformément vers f sur I et $I' \subset I$, alors f_n converge uniformément vers f sur I'.
2. Si (f_n) converge uniformément sur un nombre fini d'intervalles, alors il y a convergence uniforme sur leur réunion.
3. Cette propriété devient fausse si on considère la réunion d'une infinité d'intervalles.
   Ex : $f_n(x) = x^n$ converge uniformément vers 0 sur $[0, a]$ pour tout $a < 1$ mais pas sur $[0, 1[$.

Ces propriétés viennent du caractère global (i.e. non local) de la convergence uniforme. Elle est liée à l'intervalle considéré.

Limite de l'image d'une suite

Exercice 1 Si (f_n) CVU vers f sur I, a un point adhérent de I. On suppose que $\lim_a f = \ell$. Montrer que si (x_n) tend vers a, alors $f_n(x_n)$ tend vers ℓ.
Remarque On se sert souvent de cette propriété pour montrer que la convergence n'est pas uniforme.
Par ex, si on pose : $x_n = 1 - \dfrac{c}{n}$, alors $(x_n)^n \to e^c$ dépend du choix de x_n, donc la convergence de $f_n(x) = x^n$ sur $[0, 1[$ n'est pas uniforme.

Limite de limites

Exemple On considère $f_n(x) = x^n$ sur $[0,1[$. Pour tout n, $\lim_{x \to 1} x^n = 1$.
Pourtant, pour tout x, $\lim_{n \to +\infty} x^n = 0$, de sorte que :

$$\lim_{x \to 1} \lim_{n \to +\infty} x^n = 0 \neq 1 = \lim_{n \to +\infty} \lim_{x \to 1} x^n$$

Dans le cas général, l'ordre dans lequel on fait tendre les variables vers leur limite est donc crucial.

Théorème de la double limite

Théorème (f_n) une suite de fonctions : $I \to \mathbb{K}$. Si f_n converge uniformément vers f sur l'intervalle I et a adhérent à I (fini ou non) et que f_n tend vers $b_n \in \mathbb{K}$ en a, alors

1. (b_n) converge vers une limite finie $b \in \mathbb{K}$
2. f tend vers b en a, ce qui s'exprime :

$$\lim_{x \to a} \lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \lim_{n \to +\infty} \lim_{x \to a} f_n(x)$$

(d'où le nom du théorème).

Remarque Ce théorème signifie que la limite passe à la limite uniforme.

Preuve du théorème

Démonstration

1. Soit $\varepsilon > 0$. $(f_n - f)$ est convergente, donc de Cauchy dans $(\mathscr{B}(I, \mathbb{K}), \|.\|_\infty)$, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n, p \geq N$:
   $\|f_n - f_p\|_\infty \leq \varepsilon$.
   n et p étant fixés, pour x assez proche de a, $|f_n(x) - b_n| \leq \varepsilon$ et $|f_p(x) - b_p| \leq \varepsilon$.
   On en déduit $|b_n - b_p| \leq 3\varepsilon$ pour tout $n, p \geq N$. Conclusion : (b_n) est de Cauchy, donc converge. On note b sa limite.
2. Pour n assez grand, $\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$. et $|b_n - b| \leq \varepsilon$. On fixe n. Pour x assez proche de a, $\|f_n(x) - b_n\| \leq \varepsilon$ et :

$$|f(x) - b| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - b_n| + |b_n - b| \leq 3\varepsilon$$

Cas où les f_n admettent une limite infinie en a

Extension du théorème aux limites infinies (Ici : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$). Comme la suite $f_n - f$ est bornée (apcr), si les f_n ont une limite b_n, on est nécessairement dans un des 3 cas : apcr, b_n finie (cas traité ci-dessus), apcr, $b_n = +\infty$, apcr, $b_n = -\infty$. Dans ces deux derniers cas, f tend vers $+\infty$ (resp $-\infty$) en a.

Continuité et convergence uniforme

Proposition (Corollaire) Si f_n est une suite de fonctions continues sur I qui converge uniformément vers f, alors f est continue.

Remarques

1. La continuité passe donc à la limite uniforme.
2. Version locale. Si une suite de fonctions continues converge uniformément vers f sur tout segment de I, ou sur tout demi-droite fermée : $[a, +\infty[$ de $\mathbb{R}_+^*$, on peut conclure que f est continue sur tout l'intervalle (mais pas que la convergence est uniforme sur tout l'intervalle).
3. On utilise souvent la contraposée : si la limite simple n'est pas continue, alors la suite de fonctions continues (f_n) ne peut converger uniformément.
4. La limite uniforme d'une suite de fonctions n'a pas de raison d'être continue si les f_n ne le sont pas. De même, si $f(x) \to +\infty$ en a, ce n'est pas néc. signe que la convergence n'est pas uniforme (penser à une suite constante $f_n = f \ : x \mapsto 1/x$ et $a = 0$).

Exemples

Exemples

1. $f(x) = x^n$ ne converge pas uniformément vers 0 sur $[0, 1]$ (limite simple non continue).
2. Si $f_n(t) = t^{1/n} \ln(t)$. On a $f_n(t) \to \ln(t)$. Or, $\lim\limits_{t \to 0} f_n(t) = 0$ mais $\ln(t) \to -\infty$ en 0, la convergence n'est donc pas uniforme.
3. $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ définie sur $]1, +\infty[$. Les sommes partielles admettent une limite finie ($b_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k$) en 1. Cependant, Il n'y a pas convergence uniforme sur $]1, +\infty[$ car la suite (b_n) diverge (cf. Th2Lim)
4. On peut calculer la limite de ζ en 1 : pour A arbitrairement grand, chosir n tel que $b_n \geq A + 1$, et pour x suffisamment proche de 1,

$$\zeta(x) \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^x} \geq b_n - 1 \geq A$$

ce qui montre que $\lim\limits_{x \to 1} \zeta(x) = +\infty$.

Approximation uniforme des fonctions CPM sur un segment

Théorème Si f est une fonction continue par morceaux sur un segment $[a, b]$, il existe une suite de fonctions en escalier f_n qui converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

Remarque Les limites uniformes de fonctions en escalier s'appellent les fonctions réglées. Cette propriété admise en sup est essentielle pour définir l'intégrale des fonctions cpm (qui sont un cas particulier de fonctions réglées).

Approximation uniforme des fonctions continues sur un segment

Théorème de Weierstrass Si f est une fonction continue sur un segment $[a, b]$, il existe une suite de fonctions polynomiales P_n qui converge uniformément vers f sur $[a, b]$.
Démonstration Hors programme, basée dans le cas $[a, b] = [0, 1]$ sur les polynômes de Bernstein $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f(\frac{k}{n}) x^k (1-x)^{n-k}$.

Exemples

Exemple On considère $P_n(x) = \int_0^x (1-t^2)^n \, dt$ (rappel : $P_n(1) = W_{2n+1} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4n}}$). On pose $Q_n(x) = \frac{1}{P_n(1)} \int_0^x P_n(t) \, dt$. Montrer que Q_n converge uniformément vers la valeur absolue sur $[-1, 1]$.

Démonstration Q_n est paire, on considère $x \geq 0$.

$$\begin{aligned}
|Q_n(x) - x| &\leq \frac{1}{P_n(1)} \int_0^x \int_t^1 (1-u^2)^n \, du \\
&\leq \frac{1}{P_n(1)} \int_0^1 \int_t^1 (1-u^2)^n \, du \, dt \\
&\leq \frac{1}{P_n(1)} \int_0^1 \int_0^u (1-u^2)^n \, dt \, du \text{ (Fubini)} \\
&= \frac{1}{P_n(1)} \int_0^1 u(1-u^2)^n \, du = \frac{1}{P_n(1) 2(n+1)} = O(1/\sqrt{n})
\end{aligned}$$

Conséquences du th. de Weierstrass

Remarque En particulier, $C^\infty([a,b])$, qui contient le sev des fonctions polynomiales, est dense dans $C([a,b]), ||.||_\infty$.
Attention ! Résultat faux sur un intervalle quelconque. (ex : pour tout polynôme P, $\exp(x) - P(x) \to +\infty$ en $+\infty$, ce qui contredit l'existence de P tq $||\exp - P||_\infty \leq \varepsilon$).
Remarque Le théorème de Weierstrass montre que la dérivabilité ne passe pas à la limite uniforme.

Convergence uniforme des séries de fonctions

Proposition Soit $\sum f_n$ une série **qui converge simplement**. $\sum f_n$ converge uniformément ssi la suite des restes : $\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k$ converge uniformément vers 0.

Exemple On considère $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{x+n}$ sur $[0,1]$. Pour x fixé, la série $\sum f_n$ satisfait le CSSA donc $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,1]$ et

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{x+n} \right| \leq \frac{1}{x+n+1} \leq \frac{1}{n+1}$$

On en déduit que $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0,1]$.

Exemple On doit calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{1+k^2t^2}\, dt$. D'après le CSSA, la série converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $t > 0$, $\displaystyle\left|\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{1+k^2t^2}\right| \leq \frac{1}{1+n^2t^2}$.
En particulier, si $a > 0$, on majore sur $[a, +\infty[$ par $\displaystyle\frac{1}{1+a^2n^2}$ qui tend vers 0, donc le reste CVU vers 0 sur $]a, +\infty[$, ce qui montre que la série CVU sur $]a, +\infty[$, donc sa somme est continue sur $]0, +\infty[$.
La même majoration montre que la suite des restes est dominée par $t \mapsto \displaystyle\frac{1}{1+t^2}$, qui est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
D'après le th. de convergence dominée, l'intégrale cherchée est donc :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{(-1)^k}{1+k^2t^2}\, dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k\pi}{2k} = -\frac{\pi}{2}\ln(2)$$

Convergence normale des séries

Définition Une série $\sum f_n$ de fonctions **bornées** sur I est normalement convergente ssi $\sum ||f_n||_\infty$ converge.

Proposition Si $\sum f_n$ converge normalement, alors $\sum f_n$ converge uniformément (et donc, simplement) sur I.

Démonstration

1. Pour tout $t \in I$, $|f_k(t)| \leq ||f_k||_\infty$, donc $\sum f_k(t)$ converge. La série est donc CVS.
2. Pour tout n, et pour tout t, la même majoration donne : $\left|\sum_{k=n}^{\infty} f_k(t)\right| \leq \sum_{k=n}^{\infty} |f_k(t)| \leq \sum_{k=n}^{\infty} ||f_k||_\infty \to 0$, donc la série converge uniformément.

Remarque La série converge normalement s'il existe une majoration : $|f_n(t)| \leq \alpha_n$ (pour tout $t \in I$, et pour tout n) telle que $\sum \alpha_n$ converge.

Exemple

1. $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\dfrac{1}{(x+n)^2} \leq \dfrac{1}{n^2}$. Par comparaison avec uné série de Riemann, $\sum \dfrac{(-1)^n}{(x+n)^2}$ est normalement convergente.
2. $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^x}$. définie sur $]1, +\infty[$. pour $a > 1$, convergence normale sur $[a, +\infty[$, donc uniforme. D'où ζ est continue sur $]1, +\infty[$.
3. La série $\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{1+k^2t^2}$ est CVU (vu plus haut). Mais la norme du terme général est 1, donc pas de convergence normale sur $\mathbb{R}_+^*$.

Remarque A RETENIR : pour établir la convergence uniforme d'une série de fonction, on utilise souvent soit la convergence normale, soit le CSSA.

Intégration sur un segment

Remarque La limite uniforme d'une suite de fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ n'est pas néc. continue par morceaux.

Exemple Si p/q est la forme irréductible d'un élément rationnel de $[0, 1]$, on pose $f_n(p/q) = \begin{cases} 0 \text{ si } q > n \\ 1/q \text{ si } q \leq n \end{cases}$, et $f_n(x) = 0$ si x est irrationnel. Il est clair que f_n est cpm (elle est nulle partout sauf en un nombre fini de points : $\dfrac{p}{q}$ avec $1 \leq q \leq n$ et $0 \leq p \leq q$), donc f_n est cpm. En revanche, sa limite simple n'est continue en aucun rationnel ! (elle est nulle sur les irrationnels, non nulle sur les rationnels).

Exemple On considère les fonctions f_n affines par morceaux qui valent $1/n$ en 0, nulles sur $[n, +\infty[$.

Alors f_n sont continues, et CVU vers la fonction nulle. Pourtant,

$$\int_0^{+\infty} f_n = 1/2 \not\to 0.$$

Cet exemple montre que la CVU ne suffit pas pour passer à la limite sous l'intégrale dans le cas général.

Limite d'intégrales sur un segment

Proposition Si f_n, une suite de fonctions CPM sur $[a, b]$ converge uniformément vers une fonction f CPM sur $[a, b]$, alors :

$$\int_{[a,b]} f_n \to \int_{[a,b]} f$$

Démonstration Majoration facile.
Remarque

1. Si les f_n sont continues, La convergence U entraîne la continuité de f.
2. Si les f_n et f sont intégrables, on peut adapter la démonstration dans le cas d'un intervalle **borné** fermé ou non.

Exemple Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 f(t)t^k\,dt = 0$. Montrer que $f = 0$.

Exemple Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 f(t)t^k\,dt = 0$. Montrer que $f = 0$.

SOL On a alors $\displaystyle\int_0^1 f(t)P(t)\,dt = 0$ pour tout polynôme. On applique le th. de Weierstrass. Si P_n CVU vers f, comme f est bornée (continue sur un segment) alors fP_n CVU vers f^2 et $\displaystyle\int_0^1 f^2 = 0$ pour f continue entraîne $f = 0$.

Intégrer terme à terme avec la convergence uniforme

Théorème (d'intégration terme à terme d'une série uniformément convergente sur un segment)
Si $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$, de somme CPM, alors $\sum \int_{[a,b]} f_n$ est convergente, et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_{[a,b]} f_n = \int_{[a,b]} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$$

Remarque

1. C'est la version "séries" du théorème précédent.
2. Si les f_n sont continues, alors la convergence uniforme entraîne la continuité de f.
3. Outil très efficace en cas de convergence normale sur un segment.

Exemple

Exemple On a vu que $\sum \dfrac{(-1)^k}{x+k}$ converge uniformément sur $[0,1]$. On en déduit que :

$$\int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{x+k} = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$$

A l'aide de la formule de Stirling, on montre :

$$\int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{x+k} = \ln \frac{2}{\pi}$$

Passage à la limite dans une dérivée

La dérivabilité passe-t-elle à la limite s'il y a CVU ? Si $f_n \to f$, et f dérivable, peut-on écrire : $\lim_n f_n' = f'$?
Quelques obstacles :

1. D'après le théorème de Weierstrass, la convergence (même uniforme) des f_n n'est pas suffisante pour que f soit dérivable.
2. $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n}$. f_n converge uniformément vers 0. $f_n'(1) = 1 \neq 0 = f'(1)$. Donc même l'existence de la dérivée ne permet pas de passer à la limite...

D'autres hypothéses sont donc nécessaires.

Théorème de dérivation de la limite

Théorème (de dérivation d'une limite de fonctions) Soit (f_n) une suite de fonctions C^1 sur I. On suppose f_n converge simplement vers f et f_n' converge uniformément vers g. Alors

1. f est C^1 et $f' = g$
2. f_n converge uniformément vers f sur tout segment $[a, b] \subset I$.

Démonstration du théorème

Démonstration Soit $x_0 \in I$. Pour tout $x \neq x_0$:

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt$$

Comme $f'n$ converge uniformément vers f (en particuler sur $[x_0, x]$) on peut passer à la limite :

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt$$

g continue (lim U de fonctions cont), donc f est C^1 et $f' = g$.
De plus, pour $x \in [a, b] \subset I$, on peut choisir $x_0 \in [a, b]$ et :

$$\begin{aligned} |f(x) - f_n(x)| &\leq |f_(x_0) - f_n(x_0)| + \int_{[a,b]} |f_n'(t) - g(t)|, dt \\ &\leq |f_(x_0) - f_n(x_0)| + (b - a).\|f_n - g\|_\infty \end{aligned}$$

et donc f_n tend uniformément vers f sur $[a, b]$.

Remarque

1. La convergence des f_n en un point aurait suffit (au lieu de CVS sur I).
2. Version locale (IMPORTANT) : si f_n converge simplement et que la suite f_n' converge uniformément vers f sur une famille de sous-ensembles, alors f a pour dérivée la limite des f_n' sur la réunion de ces sous-ensembles.

Remarque Peu utilisé pour des suites de fonctions, le théorème est très pratique pour dériver des sommes de séries de fonctions.

Dérivation terme à terme des séries

Théorème (de dérivation terme à terme des séries de fonctions) Soit $\sum f_n$ une série de fonctions C^1 sur I. Si la série $\sum f_n$ converge simplement, et si $\sum f_n'$ converge uniformément sur I, alors la somme est C^1 sur I et :

$$D\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} D(f_n)$$

Remarque Version locale : si la convergence uniforme a lieu sur un famille de sous-ens de I (par ex., sur tout segment de I), alors le résultat est valide sur leur réunion.

Exemple On peut appliquer le théorème à $f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x+k}$, qui est donc C^1 sur $[0, 1]$ et :

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(x+k)^2}$$

Extension aux suites de fonctions C^p

Proposition (Généralisation) Si f_n est une suite de fonctions C^p telles que : f_n CVS vers f
f_n' CVS vers g_1
etc. $f_n^{(p-1)}$ CVS vers g_{p-1}
et $f_n^{(p)}$ CVU vers g_p, alors f est C^p et $f^{(k)} = g_k$.
Remarque On peut réitérer la preuve pour démontrer qu'une fonction-limite est, par ex. C^∞. Attention ! Il faut vérifier la convergence uniforme à chaque étape dans ce cas.

Exemple $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$, alors ζ est C^∞ sur $]1, +\infty[$ et

$\zeta^{(k)}(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k \ln(n)^k}{n^x}$. (chacune de ces série converge normalement sur $[a, +\infty[$, pour tout $a > 1$).

Convergence en moyenne

Définition Soit (f_n) une suite de fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$. La suite f_n converge en moyenne vers $f \in C(I)$ ssi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n - f$ est intégrable sur I et $N_1(f_n - f) = \int_I |f_n - f| \to 0$.

Remarque La norme N_1 est une norme sur $L_c^1(I)$, elle est appelée "norme de la convergence en moyenne". On peut, par extension, l'appliquer à des fonctions seulement cpm, mais on perd alors l'unicité de la limite (rem : sur tout segment, l'écart entre 2 "limites" est nul sauf en un nombre fini de points).

Lien avec les autres types de convergence

Proposition Sur un intervalle borné, la convergence uniforme implique la convergence en moyenne. Réciproque fausse : prendre f_n définie par un triangle de hauteur n et de base $[0, \frac{2}{n^2}]$. Alors, sur $[0, 1]$, $N_1(f_n) = \frac{1}{n} \to 0$ alors que $||f_n||_\infty = n \to +\infty$.

Remarque Ce résultat peut être prouvé directement à l'aide de $N_1 \leq (b - a)N_\infty$. Il est faux sur un intervalle quelconque.

Proposition La convergence en moyenne n'implique pas la convergence simple (ex : $f_n(x) = x^n$ converge en moyenne vers 0 sur $[0, 1]$).

Passage à la limite sous le signe intégrale

Proposition Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est cpm et intégrable sur I et si (f_n) converge en moyenne vers f sur I, alors :

1. f est intégrable.
2. $\displaystyle\int_I f_n \to \int_I f$.

Démonstration

1. Par définition $f - f_n \in L^1_m(I)$ et $f_n \in L^1_m(I)$ par hyp. donc $f \in L^1_m(I)$.
2. $f - f_n$ est intégrable, donc par inégalité "triangulaire" :

$$\left|\int_I f - \int_I f_n\right| = \left|\int_I f - f_n\right| \leq \int_I |f_n - f| \to 0$$

Exemple On veut (encore) montrer que $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2)$.

On a $\ln(2) = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\,dt$. Or $\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-t)^k$. D'après le CSSA, pour tout $t \in [0,1[$, $\left|\sum_{k=n}^{+\infty}(-t)^k\right| \leq t^n$. Le reste est continu et intégrable (car la somme et la somme partielle le sont) donc $\int_0^1 \left|\sum_{k=n}^{+\infty}(-t)^k\right| \leq \frac{1}{n+1} \to 0$. La série est donc convergente en moyenne sur $[0,1[$, et : $\int_0^1 \frac{1}{1+t}\,dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{1+k}$, cqfd.

RQ : on pouvait aussi, en majorant t^n par 1 sur $[0,1]$, conclure avec le th. de convergence dominée.

Intégration terme à terme, cas intégrable

Théorème (d'intégration terme à terme) Soit (f_n) une suite de fonctions cpm et intégrables sur I. On suppose :

1. $\sum f_n$ converge simplement et sa somme f est cpm sur I.
2. $\sum \int_I |f_n|$ est convergente.

Alors :

1. f est intégrable sur I.
2. $\int_I f = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$

Remarque C'est (dans le cas continu) un théorème de convergence normale pour la norme N_1.

Remarque Habituellement, on majore $\int_I |f_n|$ par le terme général d'une série convergente.

Exemple

Exemple On veut calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t}\,dt$.
Justifier la convergence.

Pour tout $t \in]0,1[$, $\displaystyle\frac{\ln t}{1-t} = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k \ln(t)$.

Par construction, cette série converge simplement vers une fonction cpm sur $]0,1[$.

Or $\displaystyle\int_0^1 |t^k \ln t|\,dt = \frac{1}{(k+1)^2}$ après ipp.

D'après le théorème d'intégration TAT,

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t}\,dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{-1}{k^2} = \frac{-\pi^2}{6}$$

Convergence en moyenne quadratique

Définition Soit (f_n) une suite de fonctions continues de I dans $\mathbb{C}$. La suite f_n converge en moyenne quadratique (ou « en énergie ») vers $f \in \mathbb{C}_m(I)$ ssi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n - f \in L^1_m(I)$ et et $N_2(f_n - f) = \left(\int_I |f_n - f|\right)^{1/2} \to 0$.

Remarque La norme N_2 est appelée "norme de la convergence en moyenne quadratique".

Proposition $f_n \in L^2_m(I)$ converge en moyenne vers f continue par morceaux, alors $f \in L^2_m(I)$ et $N_2(f_n) \to N_2(f)$. (en général, ni f_n ni f ne sont intégrables ! !)

Relation entre les types de convergence

Proposition Sur un intervalle borné $]a, b[$:

1. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $N_1 \leq \sqrt{b-a} N_2$ donc la convergence en moyenne quadratique implique la convergence en moyenne.
2. $N_2 \leq \sqrt{b-a} N_\infty$, donc la convergence uniforme entraîne la convergence en moyenne quadratique, et donc la convergence en moyenne.
3. En particulier, si la suite de fonctions continues f_n converge en moyenne quadratique vers f continue sur le segment $[a, b]$, alors $\int_a^b f_n \to \int_a^b f$.
4. $f_n(x) = x^n$ converge en moyenne quadratique vers 0 sur $[0, 1]$, donc la convergence en moyenne quadratique n'implique pas la convergence simple.