Programmes de colle PSI* 2023-2024

NB : ce document contient tous les programmes de cette année. Le programme en cours est à la dernière page.
Rappel : le cours et les exercices faits en classe doivent être connus.

Colle 1 (semaine du 18/09/2023)

Equations différentielles linéaires

Premier et second ordre. Forme générale des solutions (solution générale de l'équation homogène + solution particulière), principe de superposition, théorème de Cauchy "linéaire". Problèmes de recollement. Dimension de l'espace des solutions de l'équation homogène.

Résolution effective : variation de la constante au premier ordre. Résolution d'une équation à coefficients constants lorsque le second membre est une exponentielle ou un polynôme.

Séries numériques :
1) Vocabulaire : convergence, divergence, divergence grossière, restes, opérations. Séries géométriques, sommation télescopiques (équivalence suite-séries), séries de Taylor (en particulier, série exponentielle), série harmonique, séries de Riemann. Critère spécial des séries alternées.
2) Séries à termes positifs. Majoration des sommes partielles. Comparaison des termes généraux (+ domination, prépondérance). Deux SATP de termes généraux équivalents sont de même nature. Comparaison séries-intégrales.
3) Convergence absolue : Une série ACV est CV (la suite est dite "sommable"). Extension des théorèmes de comparaison. Méthode par "éclatement" (DL). Formule de Stirling. Règle de d'Alembert. Produit de Cauchy.
4) Compléments : il s'agit de résultats officiellement hors programme, mais qui ont été vus (et doivent être connus) : théorème de Cesaro, développement asymptotique de $\sum_{1\leq k\leq n} 1/k$, permutation des termes d'une série ACV.

Colle 2 (semaine du 25/9/2023)
Séries Voir programme précédent.

Colle 3 (semaine du 2/10/2023)

Séries(révision du programme précédent).
Algèbre linéaire
Révision 1ère année + :
1) Produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels, dimension.
2) Somme directe d'une famille finie de sevs. Critère de la somme nulle. Fractionnement, recollement d'une base. Base adaptée à un sev, à une décomposition en somme directe. Majoration de la dimension d'une somme, caractérisation d'une somme directe par sa dimension. Définition d'une application linéaire par sa restriction à des sevs en somme directe.
3) Révisions : supplémentaires, théorème du rang. projecteurs, symétrie.
4) Matrices définies par blocs, opérations par blocs. Sev stable par un endomorphisme, endomorphisme induit. Traduction sur la forme de la matrice (triangulaire ou diagonale par blocs). Stabilité du noyau et de l'image de u par v si les endomorphismes u et v commutent.

<u>Colle 4 (semaine du 9/10/2023)</u>
<u>Algèbre linéaire</u> : cf programme précédent.
(Tout l'algèbre linéaire non euclidienne et hors réduction :
Produit d'espaces, somme directe, théorème du rang, projeteurs, symétries, calcul matriciel par blocs, changement de base, nilpotence. Déterminants, Vandermonde (résultat par coeur et au moins une démonstration à connaître), déterminant d'une matrice triangulaire par blocs, déterminant et opérations sur les rangées de blocs. Trace.
Polynômes d'endomorphisme et de matrices. Polynôme annulateur (application au calcul de l'inverse, de puissances). Interpolateurs de Lagrange.

***NB** : Sont hors programme les notions suivantes : idéal, algèbre, groupe, polynôme minimal, matrices équivalente, formules de Cramer, groupe symétrique, cycles, orbites et signatures d'une permutation, comatrice et formule générale du déterminant.*

<u>Colle 5 (semaine du 16/10/2023)</u>

<u>Algèbre linéaire</u>

cf. programme précédent

<u>Séries entières</u>
Rayon de convergence : Lemme d'Abel. Rayon de convergence (sup $r\geq 0$, $(a_n r^n)$ bornée).
Caractérisation : $|z|<R$: convergence absolue ; $|z|>R$: divergence grossière. Cercle « d'incertitude ». Invariance du rayon par multiplication par n^α. Critère spécial de d'Alembert ($|a_{n+1}/a_n|$ tend vers $1/R$) ; comparaison [$a_n= O(b_n) \Rightarrow R(a) \geq R(b)$] , en particulier : équivalents) ; opérations (rayon d'une somme de séries entières, produit de Cauchy de deux séries entières).

<u>T.S.V.P</u>

Colle 6 (semaine du 6/11/2023)

Séries entières
Rayon de convergence : cf. programme précédent.

Propriétés analytique de la somme d'une série entière
Continuité de la somme sur]-R,R[. Complément : on admet la continuité sur [-R,R] si CV absolue en R. Intégration terme à terme. Dérivation terme à terme. La série dérivée a même rayon de convergence, la somme d'une série entière est C^∞ sur]-R,R[. Développement limité de la somme. Lien avec la série de Taylor et théorème d'unicité des coefficients.

Fonction développable en série entière. CN : f est C^∞ et la série entière est la série de Taylor, mais ces conditions ne sont pas suffisantes.

Développements à connaître par coeur (avec rayon) :
série 1 : $1/(1+z)^k$, ln(1+t), Arctan t
série 2 : exp(z), ch(t), sh(t), sin(t), cos(t).
série 3: $(1+t)^a$ [énoncé avec coefficient binomial généralisé].

Intégration sur un intervalle quelconque
1) Fonctions continues par morceaux (! pas au programme en PCSI)
Subdivision adaptée (ou subordonnée) et intégration sur un segment (intégrale «ordinaire»)
2) Intégrales convergentes. Intégrales de référence : 1/t^a sur]0,1] (+généralisation à une borne finie) et sur [1,+infini[, e^(-at) sur R+, ln(t) sur]0,1]. Notation $[u]_a^b$ si u admet une limite en a et en b.
Vocabulaire : borne impropre, intégrale faussement impropre.
3) Linéarité, positivité, croissance. Reste d'une intégrale convergente.
Si f est continue et l'intégrale de |f| est nulle, alors f=0.
4) Théorème de comparaison pour les fonctions positives. Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables. Théorème général de comparaison (équivalence, domination par une fonction intégrable). Fonctions L1 de référence (cf. 2)
Somme de fonctions intégrables, produit par une constante. Espace L1(I). Le produit de fonctions L1 n'est en général pas L1.
5) Théorèmes techniques :

Th d"intégration par parties : si uv admet une limite en a et b, les intégrales de u'v et uv' sont de même nature et si convergence int(u'v, a..b)= $[uv]_a^b$ – int(uv', a..b).
Changement de variable (C1 et strictement monotone pour les intégrales impropres).

NB : pas encore de TD mais : bien connaître les définitions, les développements usuels des séries entières et leur rayon, savoir vérifier la nature d'une intégrale impropre simple, effectuer une ipp, un changement de variable....

Colle 7 (semaine du 13/11/2023)

cf. programme précédent.

Colle 8 (semaine du 20/11/2023)

Intégrales généralisées cf. programmes précédent.

Intégrales à paramètre continu

Théorème de convergence dominée à paramètre continu.
Théorème de continuité, théorème de dérivabilité des intégrales à paramètre (C1), généralisation (théorème C^k). Utilisation avec domination "globale" ou "locale".
Application au cas C^∞ (domination locale de la dérivée k-ème apcr).
Révisions sur l'intégrale fonction de ses bornes.

Intégrales à paramètre discret :

Convergence simple d'une suite de fonctions (définition).
Théorème de convergence dominée.
Application aux sommes partielles pour intégrer terme à terme la somme d'une série de fonctions.
Théorème d'intégration terme à terme («Beppo Levi»).

NB : Le cours sur les séries entières (primitive par intégration terme à terme) peut être utilisé. La fonction Γ d'Euler a été étudiée mais ce n'est pas une fonction du programme. La convergence uniforme n'a pas encore été étudiée. Pour la convergence simple d'une suite ou d'une série de fonctions, seul le vocabulaire est à connaître, aucune propriété particulière n'a été vue.

Colle 9 (semaine du 27/11/2023)

Intégrales à paramètre discret : cf. programme précédent

Cette partie est prioritaire pour cette semaine.

Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

1) Valeurs propres, vecteurs propres d'un endomorphisme, sous-espaces propres : ils sont en somme directe. Si u et v commutent, les SEPs de u sont stables par v. Les valeurs propres sont racines des polynômes annulateurs. (Le reste du chapitre est en dimension finie).

Eléments propres d'une matrice carrée. Polynôme caractéristique d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée:
χ_A (X) = X^n –Tr(A) X^(n-1) +...+ (-1)^n det(A) (NB : seuls ces coefficients sont à connaître)
Pour cette semaine, privilégier le calcul pratique en dimension 2 ou 3 pour s'assurer de la bonne compréhension des concepts (valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres et premières propriétés).

Colle 10 (semaine du 4/12/2023)

Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

1) Valeurs propres, vecteurs propres d'un endomorphisme, sous-espaces propres : ils sont en somme directe. Si u et v commutent, les SEPs de u sont stables par v. Les valeurs propres sont racines des polynômes annulateurs. (Le reste du chapitre est en dimension finie).

Eléments propres d'une matrice carrée. Polynôme caractéristique d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée:
$\chi_A(X) = X^n - Tr(A) X^{(n-1)} + ... + (-1)^n \det(A)$ (NB : seuls ces coefficients sont à connaître)
Expression de Tr(A) et det(A) quand le polynôme caractéristique est scindé.
Si F est un sev stable par u, le polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit divise celui de u. Encadrement $1 \leq \dim E\lambda(A) \leq m(\lambda)$. Théorème de Cayley-Hamilton.

2) Endomorphismes diagonalisable. Caractérisations :
- Il existe une base dans laquelle la matrice est diagonale.
- il existe une base de vecteurs propres
- E est la somme des SEP.
- la somme des dimensions des SEP est égale (ou inférieur ou égale) à celle de E.
- χ est scindé et $m(\lambda) = \dim E\lambda$ pour tout $\lambda \in$ Spectre.

Matrice diagonalisable : semblable à une matrice diagonale
Conditions suffisantes : polynôme caractéristique scindé à racines simples ; symétrique réelle (théorème spectral).

Théorème : *u* est diagonalisable ssi il existe un polynôme annulateur scindé à racines simples (et en particulier, ssi le polynôme $P=(X-t_1)\ldots(X-t_p)$ où $\{t_1,\ldots t_p\}$= spectre, est annulateur). Si F est stable par u et u diagonalisable, alors l'endomorphisme induit sur F est diagonalisable.

3) Trigonalisation CNS : le polynôme caractéristique est scindé. [Exemples pratiques en dimension 3]

Compléments : matrices de Frobenius (ou compagnons). *Sont hors programme les notions suivantes : polynôme minimal, lemme des noyaux, drapeaux, Dunford, réduction de Jordan. NB : TD prévus mardi et mercredi !*

Colle 11 (semaine du 11/12/2023)

Même programme.

Colle 12 (semaine du 18/12/2023)

(Révision de la réduction)

Ensembles finis et dénombrables :
Révision des techniques de dénombrement (mise en bijection, partition, conditionnement) et des formules classiques (parties, applications, injections, bijections, combinaisons).

Ensembles dénombrables : définition. Sont dénombrables : IN, ses parties infinies, Z, Q, le produit cartésien (resp. la réunion) d'une famille finie (resp. au plus dénombrable) d'ensembles dénombrables. Exemples d'ensembles indénombrables : IR, ses intervalles non triviaux, l'ensemble des parties de IN, l'ensemble des suites de 0 et 1.

Probabilités :
Vocabulaire. Univers. Tribu des événements. Espace probabilisable. (Mesure de) probabilité sur la tribu : espace probabilisé (Ω,A,P). Rappels : probabilité uniforme sur un univers fini. Croissance, sous-additivité, continuité croissante et décroissante. Probabilité conditionnelle. Système complet ou quasi-complet d'événements. Formule des Probabilités totales. Formule de Bayes. Famille finie d'événements indépendants; complémentaires.
(En particulier, révision du programme de première année).

Colle 13 (semaine du 8/01/2024)

Probabilités :
Evénements : cf. programme précédent.
Variables aléatoires discrètes. Variable image f(X). Événements associés à une VAD. Loi P_X ; distribution : P(X=x), x∈ E.
Lois classiques de comptage :
loi de Bernoulli B(p). Modélisation : fonction indicatrice d'un événement (succès/échec),
loi binomiale B(n,p). Modélisation (nombre de succès en n tirages avec remise)
loi de Poisson P(λ). Modélisation (nombre de succès pendant une durée, le nombre moyen étant λ).
Loi de temps d'attente : la loi géométrique G(p). Modélisation (rang du 1er succès).
Relation $P(X>k)=(1-p)^k$.

Suites finies de VAD : loi conjointe, lois marginales. Indépendance de variables aléatoires.
Loi conditionnelle à un événement. Lemme des coalitions.
Suites infinies de VAD (processus). Indépendance.

NB : la loi hypergéométrique peut faire l'objet d'un exercice mais n'est pas au programme.
Également HP : approximation de B(n,p) par P(np), fonction de répartition, caractérisation de G(p) comme loi sans mémoire.

Colle 14 (semaine du 15/01/2024)

Probabilités : Programme précédent + :

Variance et covariance Inégalité de Cauchy-Schwarz. $E(XY)^2 \leq E(X^2)E(Y^2)$Covariance. Variance d'une somme. Si X et Y sont indépendantes, alors Cov(X,Y)=0. Variance des lois classiques (formules V(X)=E(X^2)-E(X)^2 (Koenig-Huygens)= E(X(X-1))-E(X)(E(X)-1)).

Variables aléatoires entières : Espérance = somme de la famille P(X>n), n ≥ 0. Fonction génératrice g. Loi de X donnée par g. Existence et valeur de E(X) et V(X) à partir de l'existence de g'(1) et g''(1). FG d'une somme de va indépendantes. Les fonctions génératrices des lois classiques ("doivent pouvoir être retrouvées rapidement").

Colle 15 (semaine du 22/01/2024)
Probabilités : toutes les probabilités
Convergence uniforme.

Norme $\|f\|_\infty$. ("norme infinie"), propriétés (sous-additive, sous-multiplicative) Convergence uniforme d'une suite. Lien avec la convergence simple. La limite uniforme d'une suite de fonctions bornées est bornée.
La limite uniforme d'une suite de fonctions continues est continue.
Distinction Convergence uniforme / uniforme sur tout segment / convergence simple.
La continuité et la dérivation passent du "local" au "global", mais pas la convergence uniforme.
Séries de fonctions : convergence uniforme (déf) si la suite des sommes partiels CVU ou
(thm) si elle converge simplement et la suite des restes converge uniformément (vers 0). Application du TSSA. Convergence normale. Une série entière converge normalement sur tout segment de son intervalle ouvert de convergence.
Th. de la double limite pour les séries de fonctions.
Passage à la limite sous l'intégrale et intégration terme à terme dans le cas de la convergence uniforme.
Th. de dérivation (cas C^p et C^{∞}) pour les suites et séries (dérivation terme à terme).
NB : Les notions générales de norme et d'espace normé ne sont pas au programme de cette colle. Les théorèmes de Weierstrass sont hors programme. Le théorème de la double limite n'est au programme que dans le cas des séries de fonctions.

Colle 16 (semaine du 29/01/2024)
Convergence uniforme. *cf. programme précédent.*

Colle 17 (semaine du 5/02/2024)

Espaces préhilbertiens réels et espaces euclidiens.
Produit scalaire (réel). Produits scalaires usuels sur R^n, $M_n(R)$, C([a,b]). Norme associée. Inégalités de Cauchy-Schwarz et triangulaire et cas d'égalité. Polarisation. Vecteurs orthogonaux, familles orthogonales, relation de Pythagore, expression en base orthonormale des coordonnées, du produit scalaire, de la norme, expression matricielle du produit scalaire.
Th. de la base orthonormale incomplète.
Matrices orthogonales. Caractérisations, déterminant. Groupe orthogonal O(n).
Sous-espaces orthogonaux. Orthogonal d’une partie (en pratique : un sev ou une famille finie de vecteurs) : sev, propriétés. S'il existe, le supplémentaire orthogonal de F est l'orthogonal de F et F est l'orthogonal de $F^\perp$.
Projection orthogonale sur un sev F de dimension finie (expression à partir d'une BON de F).
Existence du supplémentaire orthogonal. Représentation des formes linéaires à l'aide du produit scalaire (vecteur normal à un hyperplan).
Algorithme de Gram-Schmidt (interprétation matricielle : décomposition QR). Distance d’un point à un sev.

Colle 18 (semaine du 26/02/2024)

Espaces préhilbertiens réels et espaces euclidiens. cf. programme précédent
Endomorphismes auto-adjoints (ou symétriques). Exemples : projections orthogonales, symétries orthogonales. S(E) est un sev de L(E). Si B est une BON, f est symétrique ssi sa matrice dans B est symétrique.
Si f est auto-adjoint et F est stable par f, son orthogonal est stable ; les SEPs de f sont orthogonaux. Th. spectral : les endomorphismes symétriques sont diagonalisables en base orthonormale. Version matricielle : si A est symétrique, il existe D diagonale et P orthogonale tq $A = P D P^T$. Endomorphismes et matrices symétriques positifs ou définis positifs. Caractérisation par le produit scalaire (x | u(x)) ou par le spectre.

Colle 19 (semaine du 4/03/2024)

Reprise du programme précédent (espaces préhilbertiens, endomorphismes auto-adjoints)
+ Isométries vectorielles

1. Isométries vectorielles d'un espace euclidien : l'orthogonal d'un sev stable est stable, valeurs propres : $\lambda = \pm 1$ et dim $E\lambda$ =m(λ). Les seps sont orthogonaux. Caractérisation des symétries orthogonales. Orientation d'un eve. Orientation d'un plan, d'une droite d'un eve. Produit mixte.
2. Dimension 2. Interprétation géométrique du produit mixte. Description de SO(2) et O(2) \ SO(2). Angle d'une rotation dans un eve orienté. Composition. Toute isométrie du plan est une rotation ou une réflexion. Angle orienté : $(x|y)=\|x\|\ \|y\| \cos(\theta)$ et $[x,y] =\|x\|\ \|y\| \sin(\theta)$.
3. Dimension 3 : Interprétation géométrique du produit mixte.. Produit vectoriel. Coordonnées dans une BON. Angle non orienté : $\|x\wedge y\| = \|x\|\ \|y\| \sin(\theta)$ Utilisation pour vérifier si une matrice $M \in O(3)$ ou $SO(3)$. Matrice de l'application $x \mapsto a \wedge x$. Réduction d'une rotation de l'espace : si $\neq$ Id, angle et axe ; cas du demi-tour.

a) Méthode pratique d'étude d'une rotation autour de a et d'angle θ.
- on cherche l'axe $E_1(f)$.Si f est symétrique : demi-tour.
- sinon, on utilise $Tr(f) = 1 + 2 \cos \theta$ et signe de $[a , x ,f(x)]$ =celui de $\sin \theta$ pour $x \notin E_1(f)$.

b) Méthode de la partie antisymétrique : $(A - {}^tA)/2$ est la matrice de $x \mapsto (\sin \theta)\ a \wedge x$ avec a unitaire.

NB : La notion d'adjoint n'est pas au programme. L'étude des isométries négatives hors réflexions n'est plus au programme.

Colle 20 (semaine du 18/03/2024)

Isométries vectorielles Révision du programme précédent.
Espaces normés
Normes, boules (ouvertes, fermées).
Partie bornée (fonctions, suites). Parties convexes.
Suites convergentes. CV ⇒ bornée. Opérations, sous-suites.
Normes équivalentes. Th admis : en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.
Convergence par coordonnées.
Topologie : points intérieurs, ouverts, fermés, points adhérents. Partie dense.
Limite, continuité des fonctions. Opérations, composition.
Image réciproque d'un fermé ou d'un ouvert par une application continue.
Fonctions lipschitziennes.
Dimension finie : Théorème des bornes atteintes.
NB : Sont hors programme : toute notion de topologie relative (y compris densité relative), la notion générale de partie compacte, et bien sûr Cauchy-Lipschitz !

Colle 21 (semaine du 25/03/2024)

Espaces normées cf. programme précédent

Dérivation des fonctions vectorielles Dérivation en un point, sur un intervalle. Classes C^n, C^{infini}. Dérivation (le cas échéant, successive) de L(f), B(f,g) [Leibniz], M(f1,…, fn) lorsque L, B et M sont respectivement linéaire, bilinéaire, n-linéaire.

Fin du programme de l'année (ce qui suit n'est pas au programme de colle de la semaine) :

Fonctions de plusieurs variables

Dérivée selon un vecteur, dérivées partielles. Fonctions C1, DL à l'ordre 1. Différentielle en un point (d'une fonction C1 sur un ouvert). Règle de la chaîne. Dérivées partielles d'une composée. Fonctions constantes sur un ouvert convexe. Gradient.

Courbes du plan f(x,y)=0. Tangente en un point régulier. Surface de l'espace f(x,y,z)=0. Plan tangent en un point régulier. Les courbes tracées sur la surface ont leur tangente incluse dans le plan tangent.

Fonctions C2, th. de Schwarz, matrice hessienne, DL à l'ordre 2. Si une fonction C1 sur un ouvert admet un extremum en a, alors a est un point critique. Dans le cas C2, discussion sur les valeurs propres de la hessienne pour caractériser le point critique (max, min, point-selle, ou indéterminé).

FIN