Programmes de colle PSI* 2024-2025

NB : ce document contient <u>tous</u> les programmes de cette année. Le programme en cours est à la dernière page.
Rappel : le cours et les exercices faits en classe doivent être connus.

Colle 1 (semaine du 16/09/2024)

Equations différentielles linéaires

Premier et second ordre. Forme générale des solutions (solution générale de l'équation homogène + solution particulière), principe de superposition, théorème de Cauchy "linéaire". Problèmes de recollement. Dimension de l'espace des solutions de l'équation homogène.

Résolution effective : variation de la constante au premier ordre (la méthode recommandée consiste à déterminer toutes les solutions et pas seulement une solution particulière). Résolution d'une équation à coefficients constants lorsque le second membre est une exponentielle ou un polynôme, ou un produit exponentielle-polynôme.

Séries numériques :
1) Vocabulaire : convergence, divergence, divergence grossière, restes, opérations. Séries géométriques, sommes télescopiques (équivalence suite-séries), séries de Taylor (en particulier, série exponentielle), série harmonique, séries de Riemann. Critère spécial des séries alternées.
2) Séries positives (SATP). Majoration des sommes partielles. Comparaison des termes généraux (+ domination, prépondérance). Deux SATP de termes généraux équivalents sont de même nature. Comparaison séries-intégrales.
3) Convergence absolue : Une série ACV est CV (la suite est dite "sommable"). Domination par une série ACV. Méthode par "éclatement" (=DL). Formule de Stirling. Règle de d'Alembert. Produit de Cauchy.
4) Compléments : il s'agit de résultats officiellement hors programme, mais qui ont été vus (et doivent être connus) : théorème de Cesaro, développement asymptotique de $\sum_{1\leq k\leq n} 1/k$, permutation des termes d'une série ACV.

Colle 2 (semaine du 23/9/2024)

Séries numériques Voir programme précédent.

Séries entières Pas encore de TD ! Lemme d'Abel. Rayon de convergence (sup $r\geq 0$, $(a_n r^n)$ bornée). Caractérisation : $|z|<R$: convergence absolue ; $|z|>R$: divergence grossière. Cercle « d'incertitude ». Invariance du rayon par multiplication par n^α. Critère "spécial" de d'Alembert ($|a_{n+1}/a_n|$ tend vers $1/R$). Comparaison $[a_n = O(b_n) \Rightarrow R(a) \geq R(b)]$, en particulier : équivalents). Opérations (rayon d'une somme de séries entières, produit de Cauchy de deux séries entières).

La somme d'une série entière est C^∞ sur $]-R,R[$. Intégration et dérivation terme à terme. Lien avec la série de Taylor et théorème d'unicité des coefficients. Développement limité. Continuité sur $[-R,R]$ si CV absolue en R.

Savoir énoncer (ou retrouver rapidement) somme et rayon de :
série 1 : $1/(1+z)^p$, $\ln(1+t)$, Arctan t (à partir de $1/(1-t)$)
série 2 : $\exp(z)$, $ch(t)$, $sh(t)$, $\sin(t)$, $\cos(t)$ (à partir de e^z)
série 3: $(1+t)^\alpha$ [développement binomial généralisé].

Colle 3 (semaine du 30/9/2024)

(Révision : Séries numériques.)

Séries entières Lemme d'Abel. Rayon de convergence (sup $r \geq 0$, $(a_n r^n)$ bornée). Caractérisation : $|z|<R$: convergence absolue ; $|z|>R$: divergence grossière. Cercle « d'incertitude ». Invariance du rayon par multiplication par n^α. Critère "spécial" de d'Alembert ($|a_{n+1}/a_n|$ tend vers $1/R$). Comparaison [$a_n = O(b_n) \Rightarrow R(a) \geq R(b)$] , en particulier :cas a_n et b_n équivalents). Somme et produit de Cauchy de deux séries entières.

La somme d'une série entière est C^∞ sur $]-R,R[$. Intégration et dérivation terme à terme. Lien avec la série de Taylor et théorème d'unicité des coefficients. Développement limité. Continuité sur $[-R,R]$ si CV absolue en R.

Fonction développable en série entière. Série de Taylor (théorème d'unicité des coefficients). Solutions DSE d'une équation différentielle.

Savoir énoncer (ou retrouver rapidement) somme et rayon de :
série 1 : $1/(1+z)^p$, $\ln(1+t)$, Arctan t (à partir de $1/(1-t)$)
série 2 : $\exp(z)$, $ch(t)$, $sh(t)$, $\sin(t)$, $\cos(t)$ (à partir de e^z)
série 3: $(1+t)^\alpha$ [développement binomial généralisé].

Colle 4 (semaine du 7/10/2024)

Algèbre linéaire
1) Produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels, dimension.
2) Somme directe d'une famille finie de sevs. Critère de la somme nulle. Fractionnement, recollement d'une base. Base adaptée à un sev, à une décomposition en somme directe. Majoration de la dimension d'une somme, caractérisation d'une somme directe par sa dimension. Définition d'une application linéaire par sa restriction à des sevs en somme directe.
3) Révisions : supplémentaires, théorème du rang. projecteurs, symétrie.
Formules de changement de base X=PX' pour un vecteur ou une famille de vecteurs, AP = PA' pour des endomorphismes. Matrices semblables.
4) Matrices définies par blocs, opérations par blocs, déterminants triangulaires par blocs. Sev stable par un endomorphisme, endomorphisme induit. Traduction sur la forme de la matrice (triangulaire ou diagonale par blocs). Stabilité du noyau et de l'image de u par v si les endomorphismes u et v commutent.
5) Complément : Endomorphismes et matrices nilpotents (démonstrations à connaître).

Colle 5 (semaine du 14/10/2024)
Algèbre linéaire : cf programme précédent.

+ Trace, Polynômes d'endomorphisme et de matrices. Polynômes annulateurs (application au calcul de l'inverse, de puissances). Interpolateurs de Lagrange. Déterminant de Vandermonde (résultat par coeur + démonstration),

***NB** : Sont hors programme les notions suivantes : idéal, algèbre, groupe, polynôme minimal, matrices équivalentes, formules de Cramer, groupe symétrique, cycles, orbites et signature d'une permutation, comatrice et formule générale du déterminant.*

Colle 6 (semaine du 4/11/2024)

Intégration sur un intervalle quelconque

1) Fonctions continues par morceaux sur un intervalle (lim finie à g. et d. en tt point et nombre fini de discontinuités sur tout segment).

Subdivision adaptée (ou subordonnée) et intégration sur un segment (intégrale «ordinaire»)

2) Intégrales convergentes. Intégrales de référence : $1/t^a$ sur]0,1] (+généralisation à une borne finie) et sur $[1,+\infty[$, e^{-at} sur $\mathbb{R}_+$, $\ln(t)$ sur]0,1]. Notation $[u]_a^b$ si u admet une limite en a et en b. Vocabulaire : borne impropre, intégrale faussement impropre.

3) Linéarité, positivité, croissance. Reste d'une intégrale convergente.

Si f est continue et l'intégrale de |f| est nulle, alors f=0.

4) Théorème de comparaison pour les fonctions positives. Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables. Théorème général de comparaison (équivalence, domination par une fonction intégrable). Fonctions L1 de référence (cf. 2) (on dira "L1 au voisinage de…" ou par abus : "L1 en…")

Opérations : l'espace vectoriel L1(I). Le produit de fonctions L1 n'est en général pas L1.

5) Théorèmes techniques :

Th d"intégration par parties : si uv admet une limite en a et b, les intégrales de u'v et uv' sont de même nature et si convergence : $\int_a^b u'v = [uv]a^b - \int_a^b uv'$

Changement de variable (pour des fonctions continues seulement : le changement de variable doit être C1 et strictement monotone pour les intégrales impropres).

NB : de nombreux exemples ont été traités en cours, mais pas encore de TD : bien connaître les définitions, savoir vérifier la nature d'une intégrale impropre simple, effectuer une ipp, un changement de variable, faire le lien avec les séries (notamment, comparaison séries-intégrales, "découpage" d'une intégrale convergente en série, etc.)

Colle 7 (semaine du 11/11/2024)

Intégration : cf. programme précédent.

Réduction : Savoir calculer le polynôme caractéristique et les éléments propres d'une matrice en "petite" dimension (aucune question de trigonalisation / diagonalisation pour cette semaine).

T.S.V.P.

Colle 8 (semaine du 18/11/2024)
Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

1) Valeurs propres, vecteurs propres d'un endomorphisme, sous-espaces propres : ils sont en somme directe. Si u et v commutent, les SEPs de u sont stables par v. Les valeurs propres sont racines des polynômes annulateurs. (Le reste du chapitre est en dimension finie).

Eléments propres d'une matrice carrée. Polynôme caractéristique d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée:
$\chi_A(X) = X^n - Tr(A) X^{(n-1)} + ... + (-1)^n \det(A)$ (NB : seuls ces coefficients sont à connaître)
Expression de Tr(A) et det(A) quand le polynôme caractéristique est scindé.
Si F est un sev stable par u, le polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit divise celui de u. Encadrement $1 \leq \dim E\lambda(A) \leq m(\lambda)$.

2) Trigonalisation

CNS : le polynôme caractéristique est scindé. Théorème de Cayley-Hamilton.

2) Endomorphismes diagonalisable. Caractérisations :
- Il existe une base dans laquelle la matrice est diagonale.
- il existe une base de vecteurs propres
- E est la somme des SEP.
- la somme des dimensions des SEP est égale (ou inférieur ou égale) à celle de E.
- χ est scindé et $m(\lambda) = \dim E\lambda$ pour tout $\lambda \in$ Spectre.

Matrice diagonalisable : semblable à une matrice diagonale
Conditions suffisantes : polynôme caractéristique scindé à racines simples ; symétrique réelle (théorème spectral).

Théorème : *u* est diagonalisable ssi il existe un polynôme annulateur scindé à racines simples (et en particulier, ssi le polynôme $P=(X-t1)\ldots(X-t_p)$ où $\{t1,\ldots tp\}$= spectre, est annulateur).
Si F est stable par u et u diagonalisable, alors l'endomorphisme induit sur F est diagonalisable.

Compléments : matrices de Frobenius (ou compagnons). *Sont hors programme les notions suivantes : polynôme minimal, lemme des noyaux, drapeaux, Dunford, réduction de Jordan.*

Colle 9 (semaine du 25/11/2024)
Révision : intégrales généralisées et réduction.

Intégrales à paramètre continu

Théorème de convergence dominée à paramètre continu.
Théorème de continuité, théorème de dérivabilité des intégrales à paramètre (C1), généralisation (théorème C^k). Utilisation avec domination "globale" ou "locale".
Application au cas C^∞ (domination locale de la dérivée k-ème apcr).
Révisions sur l'intégrale fonction de ses bornes.

NB : La fonction Γ d'Euler a été étudiée mais ce n'est pas une fonction du programme. La convergence uniforme n'est pas au programme de cette colle.

Colle 10 (semaine du 2/12/2024)

Intégrales à paramètre continu

Théorème de convergence dominée à paramètre continu.
Théorème de continuité, théorème de dérivabilité des intégrales à paramètre (C1), généralisation (théorème C^k). Utilisation avec domination "globale" ou "locale".
Application au cas C^∞ (domination locale de la dérivée k-ème apcr).
Révisions sur l'intégrale fonction de ses bornes.

Intégrales à paramètre discret :

Convergence simple d'une suite de fonctions (définition).
Théorème de convergence dominée.
Application aux sommes partielles pour intégrer terme à terme la somme d'une série de fonctions.
Théorème d'intégration terme à terme («Beppo Levi»).

NB : La fonction Γ d'Euler a été étudiée mais ce n'est pas une fonction du programme. La convergence uniforme n'est pas au programme de cette colle. Pour la convergence simple d'une suite ou d'une série de fonctions, seul le vocabulaire est à connaître, aucune propriété particulière n'a été vue.

Colle 11 (semaine du 9/12/2024)

(Révision du chapitre : intégrales à paramètre)

Dénombrement (ensembles finis) :
Révision des techniques de dénombrement (mise en bijection, partition, conditionnement) et des formules classiques (parties, applications, injections, bijections, combinaisons).

Ensembles dénombrables : définition. Sont dénombrables : IN, ses parties infinies, Z, Q, le produit cartésien (resp. la réunion) d'une famille finie (resp. au plus dénombrable) d'ensembles dénombrables. Exemples d'ensembles indénombrables : IR, ses intervalles non triviaux, l'ensemble des parties de IN, l'ensemble des suites de 0 et 1.

Procédés sommatoires Sommation d'une famille de $[0,+\infty]$, propriétés (permutation, cas d'une sous-famille, cas d'une série positive). Sommation d'une famille complexe sommable : domination, linéarité, sommation par paquets, Fubini.

Probabilités :
Vocabulaire. Univers. Tribu des événements. Espace probabilisable. (Mesure de) probabilité sur la tribu : espace probabilisé (Ω,A,P). Rappels : probabilité uniforme sur un univers fini. Croissance, sous-additivité, continuité croissante et décroissante.

Objectifs : savoir élaborer un raisonnement solide pour dénombrer efficacement un ensemble ; savoir justifier rapidement qu'un ensemble donné est dénombrable ou non. L'étude des familles sommables n'est pas une fin en soi en PSI, on proposera le cas échéant des exemples simples. Sur les probabilités : vérifier la maîtrise du programme de première année et du vocabulaire introduit en cours (tribu, probabilité, etc.)

Colle 12 (semaine du 16/12/2024)

(Révision : Dénombrement, ensembles dénombrables, familles sommables.)
Probabilités :
Événements Univers. Tribu des événements. Espace probabilisable. (Mesure de) probabilité sur la tribu : espace probabilisé (Ω,A,P). Rappels : probabilité uniforme sur un univers fini. Croissance, sous-additivité, continuité croissante et décroissante.

Probabilité conditionnelle. Système complet ou quasi-complet d'événements. Formule des Probabilités totales. Formule de Bayes. Famille finie d'événements indépendants; complémentaires.
(En particulier, révision du programme de première année).
Variables aléatoires discrètes Variable image f(X). Événements associés à une VAD. Loi P_X ; distribution : $P(X=x)$, $x \in E$.
Lois classiques de comptage :
loi de Bernoulli B(p). Modélisation : fonction indicatrice d'un événement (succès/échec),
loi binomiale B(n,p). Modélisation (nombre de succès en n tirages avec remise)
loi de Poisson $P(\lambda)$. Modélisation (nombre de succès pendant une durée, le nombre moyen étant λ).
Loi de temps d'attente : la loi géométrique G(p). Modélisation (rang du 1er succès).
Relation $P(X>k)=(1-p)^k$.

Suites finies de VAD : loi conjointe, lois marginales. Indépendance de variables aléatoires.
Loi conditionnelle à un événement. Lemme des coalitions.
Suites infinies de VAD (processus). Indépendance.

Attention : les distributions classiques doivent être connues mais espérance, variance, séries génératrices ne sont pas au programme de cette colle.

NB : la loi hypergéométrique peut faire l'objet d'un exercice mais n'est pas au programme. Également HP : approximation de B(n,p) par P(np), fonction de répartition, caractérisation de G(p) comme loi sans mémoire.

Colle 13 (semaine du 6/01/2025)

Probabilités : Programme précédent + variables aléatoires réelles :

Espérance Variables positives. Si X positive et E(X)=0, alors X=0 p.s., variables complexes, théorème de transfert, linéarité, cas $|X|\leq Y$ si $E(Y)< +\infty$, espérance d'un produit fini de variables indépendantes.

Variance et covariance Inégalité de Cauchy-Schwarz. $E(XY)^2\leq E(X^2)E(Y^2)$Covariance. Variance d'une somme. Si X et Y sont indépendantes, alors Cov(X,Y)=0. Variance des lois classiques (formules V(X)=E(X^2)-E(X)^2 (Koenig-Huygens)= E(X(X-1))-E(X)(E(X)-1)).

Variables aléatoires entières : Espérance = somme de la famille $P(X>n)$, $n \geq 0$. Fonction génératrice g. Loi de X donnée par g. Existence et valeur de E(X) et V(X) à partir de l'existence de g'(1) et g''(1). FG d'une somme de va indépendantes. Les fonctions génératrices des lois classiques ("doivent pouvoir être retrouvées rapidement").

Colle 14 (semaine du 13/01/2025)
Probabilités : toutes les probabilités!!!!
Convergence uniforme.

Norme $||f||_{\infty}$ ("norme infinie"), propriétés (sous-additive, sous-multiplicative) Convergence uniforme d'une suite. Lien avec la convergence simple. La limite uniforme d'une suite de fonctions bornées est bornée.
La limite uniforme d'une suite de fonctions continues est continue.
Distinction Convergence uniforme / uniforme sur tout segment / convergence simple.
La continuité et la dérivation passent du "local" au "global", mais pas la convergence uniforme.

Séries de fonctions : convergence uniforme (déf) si la suite des sommes partiels CVU ou
(thm) si elle converge simplement et la suite des restes converge uniformément (vers 0). Application du TSSA.
Convergence normale. Une série entière converge normalement sur tout segment de son intervalle ouvert de convergence.
Th. de la double limite pour les séries de fonctions.
Passage à la limite sous l'intégrale et intégration terme à terme dans le cas de la convergence uniforme.
Th. de dérivation (cas C^p et $C^{\infty)}$ pour les suites et séries (dérivation terme à terme).
NB : Le cours est terminé (avec exemples) mais pas encore de TD. Les notions générales de norme et d'espace normé ne sont pas au programme de cette colle. Les théorèmes de Weierstrass sont hors programme. Le théorème de la double limite n'est au programme que dans le cas des séries de fonctions.

Colle 15 (semaine du 20/01/2025)
Convergence uniforme. *cf. programme précédent.*

Colle 16 (semaine du 27/01/2025)
Convergence uniforme. *cf. programme précédent.*

Espaces préhilbertiens réels et espaces euclidiens.
Produit scalaire (réel). Produits scalaires usuels sur R^n, $M_n(R)$, C([a,b]). Norme associée. Inégalités de Cauchy-Schwarz et triangulaire et cas d'égalité. Polarisation. Vecteurs orthogonaux, familles orthogonales, relation de Pythagore, expression en base orthonormale des coordonnées, du produit scalaire, de la norme, expression matricielle du produit scalaire.
Th. de la base orthonormale incomplète.
Matrices orthogonales. Caractérisations, déterminant. Groupe orthogonal O(n).
Sous-espaces orthogonaux. Orthogonal d'une partie (en pratique : un sev ou une famille finie de vecteurs) : sev, propriétés. S'il existe, le supplémentaire orthogonal de F est l'orthogonal de F et F est l'orthogonal de $F^{\perp}$.
Projection orthogonale sur un sev F de dimension finie (expression à partir d'une BON de F).
Existence du supplémentaire orthogonal. Représentation des formes linéaires à l'aide du produit scalaire (vecteur normal à un hyperplan).
Algorithme de Gram-Schmidt (interprétation matricielle : décomposition QR). Distance d'un point à un sev.

Colle 17 (semaine du 3/02/2025)

Espaces préhilbertiens réels et espaces euclidiens. cf. programme précédent
Endomorphismes auto-adjoints (ou symétriques). Exemples : projections orthogonales, symétries orthogonales. S(E) est un sev de L(E). Si B est une BON est auto-adjoint ssi sa matrice dans B est symétrique.
Si f est auto-adjoint et F est stable par f, son orthogonal est stable ; les SEPs de f sont orthogonaux. Th. spectral : les endomorphismes symétriques sont diagonalisables en base orthonormale. Version matricielle : si A est symétrique, il existe D diagonale et P orthogonale tq $A = P D P^T$.
Endomorphismes et matrices symétriques positifs ou définis positifs. Caractérisation par le produit scalaire $(x \mid u(x))$ ou par le spectre.

Colle 18 (semaine du 10/02/2025)

Endomorphismes auto-adjoints (ou symétriques) cf. programme précédent
Isométries vectorielles
1. Isométries vectorielles d'un espace euclidien : l'orthogonal d'un sev stable est stable, valeurs propres : $\lambda = \pm 1$ et dim $E\lambda = m(\lambda)$. Les seps sont orthogonaux. Caractérisation des symétries orthogonales. Orientation d'un eve. Orientation d'un plan, d'une droite d'un eve. Produit mixte. (interprétation géométrique).
2. Dimension 2.
Description de SO(2) et O(2) \ SO(2). Angle d'une rotation dans un eve orienté. Composition. Toute isométrie du plan est une rotation ou une réflexion. Angle orienté : $(x|y)=\|x\| \|y\| \cos(\theta)$ et $[x,y] =\|x\| \|y\| \sin(\theta)$.
3. Dimension 3 : Produit vectoriel. Coordonnées dans une BON.
Norme : $\|x\wedge y\| = \|x\| \|y\| \sin(\theta)$ (angle non orienté, défini dans le chapitre “eve”)
Utilisation du produit vectoriel pour vérifier si une matrice $M \in O(3)$ ou SO(3).
Réduction d'une rotation de l'espace : si $\neq$ Id, angle et axe ; cas du demi-tour.
a) Méthode pratique 1 :
- on cherche l'axe $E_1(f)$.Si f est symétrique : demi-tour.
- sinon, on utilise $Tr(f) = 1 + 2 \cos \theta$ et signe de $[a , x ,f(x)]$ =celui de $\sin \theta$ pour $x \notin E_1(f)$.

b) Méthode 2 (partie antisymétrique) : $(A - {}^tA)/2$ est la matrice de $x \mapsto (\sin \theta)\ a \wedge x$ avec a unitaire.
NB : La notion d'adjoint n'est pas au programme. L'étude des isométries négatives hors réflexions n'est plus au programme.

Colle 19 (semaine du 3/03/2025)

Isométries vectorielles Révision du programme précédent.
Espaces normés
Normes, boules (ouvertes, fermées). Partie bornée (fonctions, suites). Parties convexes.
Suites convergentes. CV ⇒ bornée. Opérations, sous-suites.
Normes équivalentes. Th admis : en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.
Convergence par coordonnées en dimension finie.
Topologie : points intérieurs, ouverts, fermés, points adhérents. Adhérence. Partie dense.
Limite, continuité des fonctions. Opérations, composition. Fonctions lipschitziennes.
Image réciproque d'un fermé ou d'un ouvert par une application continue.
Dimension finie : Théorème des bornes atteintes.
NB : Sont hors programme : toute notion de topologie relative (y compris densité relative), la notion générale de partie compacte.

Colle 20 (semaine du 17/03/2025)

Espaces normés cf. programme précédent

Dérivation des fonctions vectorielles Dérivation en un point, sur un intervalle. Classes C^n, C^{infini}. Dérivation (le cas échéant, successive) de L(f), B(f,g) [Leibniz], M(f1,…, fn) lorsque L, B et M sont respectivement linéaire, bilinéaire, n-linéaire.

Fonctions de plusieurs variables

Dérivée selon un vecteur, dérivées partielles. Fonctions C1, DL à l'ordre 1. Différentielle en un point (d'une fonction C1 sur un ouvert). Règle de la chaîne. Dérivées partielles d'une composée. Fonctions constantes sur un ouvert convexe. Gradient.

Colle 21 (semaine du 24/03/2025)

Espaces normés, fonctions vectorielles cf. programme précédent

Fonctions de plusieurs variables

Dérivée selon un vecteur, dérivées partielles. Fonctions C1, DL à l'ordre 1. Différentielle en un point (d'une fonction C1 sur un ouvert). Règle de la chaîne. Dérivées partielles d'une composée. Fonctions constantes sur un ouvert convexe. Gradient.

Courbes du plan f(x,y)=0. Tangente en un point régulier. Surface de l'espace f(x,y,z)=0. Plan tangent en un point régulier. Les courbes tracées sur la surface ont leur tangente incluse dans le plan tangent.

Fonctions C2, th. de Schwarz, matrice hessienne, DL à l'ordre 2. Si une fonction C1 sur un ouvert admet un extremum en a, alors a est un point critique. Dans le cas C2, discussion sur les valeurs propres de la hessienne pour caractériser le point critique (max, min, point-selle, ou indéterminé).

FIN