Position du problème

Étant donnée une partie U d'un evn E, on distingue trois catégories de points :

- Les points de U qui sont "loin" du complémentaire U^c (qu'on appellera les points intérieurs à U).
- Les points de U^c qui sont "loin" de U (qui sont donc intérieurs à U^c).
- Les points qui sont sur la frontière de U et de U^c.

Points intérieurs, points adhérents

Définition Un point x_0 est

1. **intérieur** à U si et seulement s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x_0, \varepsilon) \subset U$.
2. **adhérent** à U si et seulement si toute boule ouverte de centre x_0 a une intersection non vide avec U (i.e., $\forall \varepsilon > 0,\ B(x_0, \varepsilon) \cap U \neq \emptyset$.

- Tout point intérieur à U appartient à U. Tout point de U est adhérent à U. (Les réciproques sont fausses en général.)
- Si $U \neq \emptyset$, on définit $d(x, U) = \inf_{y \in U} ||x - y||$. x est adhérent à U ssi $d(x, U) = 0$: un point adhérent "colle" à la partie U et ne peut en être séparé. x est intérieur à U ssi $d(x, U^c) > 0$.
- Un point x_0 est (ces deux situations s'excluant l'une l'autre), soit adhérent à U, soit intérieur à U^c (ou encore, soit intérieur à U, soit adhérent à U^c).

Caractérisation séquentielle des points adhérents

Proposition x_0 est adhérent à U si et seulement s'il existe une suite de U qui tend vers x_0.
Remarque Un point x_0 est (ces deux situations s'excluant l'une l'autre), soit adhérent à U, soit intérieur à U^c (ou encore, soit intérieur à U, soit adhérent à U^c).
Remarque En particulier, un point a est intérieur à U si, pour *toute* suite (x_n) qui tend vers a, on a $x_n \in U$ APCR.
Exercice 1 Montrer que si $a \notin A$ est adhérent à A, alors toute boule de centre a contient une infinité d'éléments de A. Est-ce encore vrai si $a \in A$?

Ouverts de E

Définition Une partie U de E est un ouvert ssi tous les points de U sont intérieurs à U.
Exemple $\emptyset$, E, les boules ouvertes.
$[0, 1[$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}$.
Proposition Toute réunion d'ouverts est un ouvert.
Proposition U est ouvert ssi U est la réunion de boules ouvertes. **Démonstration** Si U est ouvert, alors pour tout $x \in U$, on se donne $\varepsilon_x > 0$ tel que $B(x, \varepsilon_x) \subset U$, alors U est la réunion de ces boules ouvertes.
Réciproque claire.
Proposition Toute intersection d'un nombre fini d'ouverts est un ouvert.
Contre-exemple $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[= \{0\}$

Fermés de E

Définition La partie F de E est un fermé ssi F vérifie une des propriétés équivalentes :

1. son complémentaire F^c est ouvert.
2. F est l'ensemble de ses points adhérents.
3. Toute suite convergente de F a sa limite dans F.

Exemple $\emptyset$, E, les boules fermées.
Démonstration F est l'ensemble de ses points adhérents ssi F^c est l'ensemble des points non adhérents à F, donc intérieurs à F^c, ce qui est équivalent à dire que F^c est un ouvert. La caractérisation séquentielle des points adhérents donne la dernière caractérisation.
Proposition Toute réunion finie de fermées et toute intersection de fermés est un fermé.

Limite d'une fonction en un point

Définition E, F des evn ; $f : A \subset E \to F$ et a adhérent à A. Soit $\ell \in F$.

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \boxed{\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in A, \|x - a\| \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - \ell\| \leq \varepsilon}$$
$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, x \in A \cap B(a, \eta) \Rightarrow f(x) \in B(\ell, \varepsilon)$$
$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, f(A \cap B(a, \eta)) \subset B(\ell, \varepsilon)$$

Remarque Les normes $\|.\|$ utilisées sont relatives aux evn E et F.
Si on utilise des normes équivalentes, l'existence éventuelle et la valeur de la limite sont conservées.
En dimension finie, l'existence et la valeur de la limite en a sont indépendantes de la norme choisie.
Remarque Le cas $E = \mathbb{R}$ a déjà été traité... (en particulier, cas $a = \pm\infty$).

Unicité de la limite

Proposition Si f admet en a les limites ℓ et ℓ', alors $\ell = \ell'$.
Démonstration Soit $\varepsilon > 0$. On fixe η_1 et η_2 tels que, pour tout $x \in A$:
$\|x - a\| \leq \eta_1 \Rightarrow \|f(x) - \ell\| \leq \varepsilon$ et
$\|x - a\| \leq \eta_2 \Rightarrow \|f(x) - \ell'\| \leq \varepsilon$.
On pose $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$. a est adhérent à A donc pour tout ε, il existe $x \in A \cap B(a, \eta)$ tel que $\|\ell - \ell'| \leq \|\ell - x\| + \|x - \ell'\| \leq \varepsilon$.
Finalement, $\forall \varepsilon > 0$, $\|\ell - \ell'\| \leq \varepsilon$, donc $\ell = \ell'$.
Notation $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$

Limites infinies ou en l'infini

Définition

1. Cas $E = \mathbb{R}$ et $a = +\infty$ ou $-\infty$.
   $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ ssi $\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R}, x \geq M \Rightarrow \|f(x) - \ell\| \leq \varepsilon$
2. cas $F = \mathbb{R}$ et $\ell = +\infty$ ou $-\infty$. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ ssi
   $\forall M \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in A, \|x - a\| \leq \eta \Rightarrow f(x) \geq M$.

Utilisation des suites

Proposition Si $f : A \subset E \to F$ tend vers ℓ en a et (x_n) est une suite de A qui tend vers a, alors $f(x_n)$ tend vers ℓ.
Démonstration Soit $\varepsilon > 0$ et η comme dans la définition. APCR, $\|x_n - a\| \leq \eta$, donc $\|f(x_n) - \ell\| \leq \varepsilon$, cqfd.
Proposition (Réciproque : caractérisation séquentielle de la limite.)
Proposition Si pour toute suite (x_n) de A qui tend vers a, $f(x_n)$ tend vers ℓ, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.
Démonstration Par contraposée, supposons que f ne tende pas vers ℓ en a. Il existe donc $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\eta > 0$, il existe $x \in A$ tel que $\|x - a\| \leq \eta$ et $\|f(x) - \ell\| > \varepsilon_0$. En fixant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\eta = \frac{1}{n+1}$, on construit donc une suite (x_n) d'éléments de A tels que $\|x_n - a\| \leq \frac{1}{n+1}$ et $\|f(x_n) - \ell\| > \varepsilon_0$. Alors (x_n) tend vers a mais $f(x_n)$ ne peut tendre vers ℓ, cqfd.
Remarque Résultat encore valide (1) si $E = \mathbb{R}$ et $a = +\infty$ ou $-\infty$ ou (2) si $F = \mathbb{R}$ et $\ell = +\infty$ ou $-\infty$.

Limite et comparaison

Proposition $f(x)$ tend vers ℓ ssi $\|f(x) - \ell\|$ tend vers 0.
Proposition Si $\|f(x) - \ell\| \leq \varphi(x)$ et $\varphi(x) \to 0$, alors $f(x) \to \ell$.
Proposition Si (1) f bornée et $\varphi(x)$ tend vers 0 dans $\mathbb{K}$ ou (2) f tend vers 0_F et φ bornée, alors $\varphi(x).f(x) \to 0$.
Définition (Comparaison asymptotique) Soient $f : A \subset E \to F$ et $\varphi : A \to \mathbb{K}$ continue ou non définie en a.

1. (domination) $f = O(\varphi)$ ssi...
2. (négligeabilité) $f = o(\varphi)$ ssi

Continuité en un point

Définition Si $a \in A$ et si f admet la limite b en a, alors $f(a) = b$
(car pour tout (ε, η) de la définition, $\|a - a\| \leq \eta$ et donc $\|f(a) - b\| \leq \varepsilon$).
f est alors **continue** en a.
Remarque $a \in A$ ne suffit pas !
Définition Si f admet la limite $b \in F$ en a et $a \notin A$, alors le prolongement $\hat{f}$ de f défini par $\hat{f}(a) = b$ est le **prolongement par continuité** de f en a.
Proposition Si f tend vers ℓ en a, alors ℓ est adhérent à $f(A)$.
Démonstration a est adhérent à A donc pour tout (ε, η) de la définition,
$A \cap B(a, \eta)) \neq \emptyset$ et donc $f(A) \cap B(\ell, \varepsilon) \neq \emptyset$.

Continuité sur une partie

Définition Soit $f : A \to F$. f est continue sur A ssi f est continue en tout point de A.
Proposition Toute restriction d'une application continue est continue.

Combinaisons linéaires

Proposition

1. Si $f(x)$ tend vers $\ell \in F$ et $g(x)$ tend vers $\ell' \in F$, alors pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha f(x) + g(x)$ tend vers $\alpha\ell + \ell'$.
2. Si f et g sont continues en a, alors $\alpha f + g$ est continue en a.
3. Si f et g sont continues sur A, alors $\alpha f + g$ est continue sur A.

Notation $\mathcal{C}(\mathcal{A}, \mathcal{F})$ est le $\mathbb{K}$-ev des applications continues de A dans F.

Produits

Proposition (Produit de fonctions à valeur dans $\mathbb{K}$) Soient $f, g : A \to \mathbb{K}$, et a adhérent à A.

1. Si $f(x)$ tend vers ℓ et $g(x)$ tend vers ℓ', alors $f(x) \cdot g(x)$ tend vers $\ell \cdot el'$ (NB : extension possible si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et ℓ ou ℓ' sont infinies).
2. Si f et g sont continues en a, alors $f \cdot g$ est continue en a.
3. Si f et g sont continues sur A, alors $f \cdot g$ est continue sur A.

Notation $\mathcal{C}(A)$ est la $\mathbb{K}$-algèbre des applications continues de A dans $\mathbb{K}$.

Composition des limites

Proposition (Théorème de composition des limites) E, F, G trois evn. Soient $f : A \subset E \to F$, $g : B \subset F \to G$.

Si : 1) $f(A) \subset B$ 2) $\lim_a f = b$ 3) $\lim_b g = \ell \in G$, alors : $\lim_a g \circ f = \ell$.

Remarque En particulier, si $f(A) \subset B$, f continue en a et g continue en $b = f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a.

Remarque Extension possible dans les cas :

1. $E = \mathbb{R}$, $a = +\infty$ ou $-\infty$.
2. $F = \mathbb{R}$ et $\ell = +\infty$ ou $-\infty$.
3. $G = \mathbb{R}$ et $\ell = +\infty$ ou $-\infty$.

Attention ! On pose $f(0) = 1$ et $f(x) = 0$ si $x \in]0, 1]$. Alors $\lim_{0^+} f = 0$ mais $\lim_{0^+} f \circ f = 1$.

Composition de fonctions continues

Remarque En particulier, la composée de deux applications continues est continue :

1. Si $f(A) \subset B$, f continue en a et g continue en $b = f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a.
2. Si $f(A) \subset B$, f continue sur A et g continue sur B, alors $g \circ f$ est continue sur A.

Limite par coordonnées

Proposition Soit $f : A \subset E \to F$, où F est de dimension finie et $(e_1, \cdots, e_n)$ une base de F.
On pose $f(x) = f_1(x)e_1 + \cdots + f_n(x)e_n$ et $\ell = \ell_1 e_1 + \cdots + \ell_n e_n$. Alors :

$$\lim_a f = \ell \Leftrightarrow \forall i \in 1, \cdots, n, \lim_a f_i = \ell_i$$

1. f tend vers ℓ en a ssi, pour tout i, f_i tend vers ℓ_i en a.
2. f est continue en a ssi pour tout i, f_i est continue en a.
3. f est continue sur A ssi, pour tout i f_i est continue sur A.

Ces équivalences sont indépendantes du choix de la base de F.
Exemple Soit G un sev de dimension finie de E. Montrer que G est fermé.

Exemples

Continuité des applications coordonnées Les applications $(x_1, \cdots, x_n) \to x_i$ sont continues sur $E = \mathbb{K}^n$ (car Id_E est continue).
Exemple Continuité de $(x, y) \to (x \sin(y + x), x^2 + y)$ sur $\mathbb{R}^2$.
Exemple Le déterminant est continu de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$.
Exemple Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $A_k = A - \frac{1}{k+1} I_n$ est inversible à part pour un nombre fini de termes. En déduire que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est *dense* dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Application : montrer que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ quelles que soient les matrices A et B (commencer par A inversible).
Exercice 2 Montrer que $M \mapsto M^{-1}$ est continue sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Images réciproques d'ouverts ou de fermés

Proposition f continue de E dans F. Soit $X = f^{-1}(Y) = \{x \in E | f(x) \in Y\}$ (image réciproque de Y par f).

1. Si Y est un ouvert de F, alors X est un ouvert de E.
2. Si Y est un fermé de F, alors X est un fermé de E.

En particulier, si f est continue de E dans $\mathbb{R}$.

1. $X = \{x \in E | f(x) > a\}$ est un ouvert
2. $X = \{x \in E | f(x) \geq a\}$ est un fermé
3. $X = \{x \in E | f(x) = a\}$ est un fermé

Preuves

Démonstration

1. On suppose Y ouvert. Montreons que $X = f^{-1}(Y)$ est ouvert. Soit $x \in X$ et $y = f(x) \in Y$.
   Comme Y est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(y, \varepsilon) \subset Y$.
   Comme f est continue en x, il existe $\eta > 0$ tel que $f(B(x, \eta)) \subset B(y, \varepsilon)$.
   En particulier, $f(B(x, \eta)) \subset Y$ donc $B(x, \eta) \subset X$, cqfd.
2. Si Y est fermé, alors $E \backslash X = f^{-1}(F \backslash Y)$ est ouvert d'après (1), donc X est fermé.

Exemples

Exemple

1. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
2. $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ est un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
3. En dimension finie, un hyperplan est fermé, et donc tout sev est fermé.
4. Une conique est fermée dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3 (difficile) $\{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) | \operatorname{rg}(M) \geq k\}$ est un ouvert ; $\{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) | \operatorname{rg}(M) \leq k\}$ est un fermé. (Indication : $\operatorname{rg}(M) \geq k$ ssi il existe un mineur non nul d'ordre k.) (Rem : le rang ne peut que diminuer par passage à la limite).

Contre-exemples

L'image réciproque d'un ouvert peut ne pas être ouverte ! Exemple Si $f : x \mapsto \sqrt{x}$, que dire de $f^{-1}(]-1,+\infty[)$? Quelle hypothèse du théorème n'est pas vérifiée ici ?
Image directe d'un ouvert ou d'un fermé L'image directe d'un fermé ou d'un ouvert par une application continue n'est pas néc. fermée ou ouverte.
Ex : $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^*$, $\cos(]0, \mathbb{R}_+^*[) = [-1,1]$.
Si $f(t) = \dfrac{t}{1+t}\sin(t)$, $f(\mathbb{R}_+) =]-1,1[$. Ex : l'image par $(x,y) \mapsto x$ de l'hyperbole $xy = 1$ est un ouvert de $\mathbb{R}^*$.

Parties compactes d'un evn

Définition En dimension finie, une partie compacte est une partie fermée et bornée.
Exemple

1. Un segment de $\mathbb{R}$ est compact.
2. Une partie finie de E est compacte (un singleton est compact).
3. $O_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ ($O(n) = \{M | {}^tMM = I_n\}$ donc fermée, et clairement bornée pour $\|.\|_\infty$.)
4. $SL_n(\mathbb{K})$ est fermé mais pas compact (matrices $\begin{pmatrix} n & 0 \\ 1 & 1/n \end{pmatrix}$). Points intérieurs ?
5. L'ensemble X des termes d'une suite (x_n) convergente et sa limite forment une partie compacte de E. En effet, s'il existe un point a adhérent à X qui n'appartient pas à X, alors la boule de centre a et de rayon $r = \dfrac{\|a - \ell\|}{2}$ contient une infinités d'éléments de X (sinon a ne serait pas adhérent), ce qui contredit que $x_n \in B(\ell, r)$ apcr. Conclusion : tous les points adhérents de X appartiennent à X, donc X est fermé et clairement borné (car une suite convergente est bornée), donc compact.

Propriétés

Proposition

1. L'intersection d'un compact et d'un fermé est compacte.
2. La réunion de deux compacts est compacte (mais pas d'une infinité de compacts, contre-ex avec $[-n, n]$)
3. L'intersection d'une infinité de compacts est un compact.
4. Le produit de deux compacts est compact.

Image continue d'un compact

Proposition (admis) Soit $f : A \subset E \to F$ une application *continue*. Soit K une partie *compacte* de E incluse dans A. Alors $f(K)$ est un compact de F.
En particulier, si $F = \mathbb{R}$, f est **bornée** sur K (car $f(K)$ borné) et **atteint ses bornes** (car $f(K)$ est fermé).
Exemple K, L deux compacts. Montrer que $K + L$ est compact. (utiliser $(x, y) \mapsto x + y$ continue, sur le produit $K \times L$ qui est compact).
Exemple Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ vérifiant $\lim\limits_{||x|| \to +\infty} f(x) = +\infty$ (interpréter...) Montrer que f admet un minimum global sur $\mathbb{R}^n$.

Distance d'un point à un sous-espace vectoriel

Exemple Soit $x_0 \in E$ et F un sev de E qui ne contient pas x_0.

1. Montrer qu'il existe un $y_0 \in F$ tel que $||x_0 - y_0|| = \min_{y \in F} ||x_0 - y||$.
2. En considérant la norme infinie sur $\mathbb{R}^2$, et la distance de $(0, 1)$ à la droite des abscisses, montrer que y_0 n'est pas unique en général.
3. Démontrer qu'il y a unicité si la norme est strictement convexe ($\forall t \in]0, 1[$, $||tx + (1 - t)y|| < t||x|| + (1 - t)||y||$).

Fonctions lipschitziennes

Définition f est **lipschitzienne** ssi il existe $k > 0$ tel que $\|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|$.
On précise alors : f est k-lipschitzienne.

Remarque Ce caractère est invariant si on utilise des normes équivalentes. En dimension finie, il est donc indépendant de la norme choisie. En revanche, la constante k dépend de la norme !

Remarque La borne supérieure des $\dfrac{||f(x) - f(y)||}{||x - y||}$ pour tout $x \neq y$ est la constante de Lipschitz de f (c'est la plus petite constante k possible).

Proposition Si f est lipschitzienne sur A, alors f est **continue** sur A.
Réciproque fausse ! ! ! (ex : $f(x) = \sqrt{x}$ sur $[0, 1]$).
Exemple

1. Les applications $C^1 : [a, b] \to E$ (inégalité des acc. finis).
2. $x \mapsto \|x\|$ est 1-lipschitzienne. En particulier, elle est continue.

Exemple : Distance d'un point à une partie

Distance d'un point à une partie Soit A une partie non vide de E. Pour tout $x \in E$, pose

$$\varphi_A(x) = d(x, A) = \inf_{y \in A} \|x - y\|$$

NB : $d(x, A) = 0$ signifie que x est adhérent à A.

1. Justifier l'existence de inf et montrer que si A est fermé, cet inf est atteint (rappel : cas d'un sev dans un evn).
2. Montrer que φ_A est 1-lipschitzienne.

Propriétés algébriques

Proposition (Propriétés algébriques)

1. La composée d'applications lipschtziennes est lipschitziennes.
2. Les fonctions lipschitziennes forment un sev de $\mathcal{C}(A, F)$.

Théorème du point fixe

Application : th. du point fixe E est un evn de dimension finie et f une application k-lipschitzienne de E dans lui-même avec $k < 1$ (f est dite *contractante*).
Soit (u_n) une suite telle que $u_{n+1} = f(u_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Alors $\|u_{n+1} - u_n\| \leq k^n \|u_1 - u_0\|$ et donc la série $(u_{n+1} - u_n)$ est normalement convergente. On en déduit que u_n converge. Soit ℓ sa limite. Pourquoi est-ce un point fixe de f ? f admet-elle d'autres points fixes ?
Th. du point fixe sur un compact Si K compact et f continue $K \to K$ tel que $||f(x) - f(y)|| < ||x - y||$ dès que $x \neq y$, alors f admet un unique point fixe. (Considérer $g : x \mapsto ||x - f(x)||$.)

Continuité des applications linéaires

Proposition Soit f une application **linéaire** de E dans F, et $x_0 \in E$.
Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. f est continue en x_0
2. f est continue en 0
3. f est bornée sur la boule unité
4. f est lipschitzienne sur E
5. f est continue sur E

Cas de la dimension finie

Théorème Soit u une application linéaire de E dans F. Si E est de dimension finie, alors u est continue.

Démonstration Pour tout $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$, $\|u(x)\| \leq \sup_{1 \leq i \leq n} \|u(e_i)\| \sum_{i=1}^{n} |x_i|$. En posant $k = \sup_{1 \leq i \leq n} \|u(e_i)\|$, il vient $\|u(x)\| \leq k N_1(x)$.
Pour $x, y \in E$, on a ainsi $\|u(x-y)\| \leq k N_1(x-y)$ donc u est lipschitzienne.

Quelques remarques

Remarque

1. En dimension finie, la réciproque d'une application linéaire bijective est continue (propriété générale des applications linéaires et non des bijections).
2. En dimension infinie, il existe des applications linéaires non continues. Prendre $E = C^\infty([0,1], \mathbb{R})$ normé par $\|.\|_\infty$ et $D : f \mapsto f'$. Pour $f_n(t) = t^n$, on a $\|f_n\|_\infty = 1$ mais $\|f_n'\|_\infty = n$ donc $\frac{\|D(f)\|}{\|f\|}$ n'est pas borné
3. Autre exemple : la forme linéaire $P \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}\,dt$. Si on utilise la norme $\max|a_k|$, alors X^k/k tend vers 0 alors que $\Phi(X^k) = (k-1)!$. Ceci montre que c'est la dimension de l'espace de départ qui importe...

Norme d'une application linéaire

Proposition E et F sont normés par N et N' respectivement. Soit u une application linéaire **continue** de E dans F. Alors :

$$\sup_{N(x)\leq 1} N'(u(x)) = \sup_{N(x)=1} N'(u(x)) = \sup_{x\neq 0} \frac{N'(u(x))}{N(x)}$$

Ces trois valeurs sont finies.

Démonstration Notons K_1, K_2, K_3 ces trois valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}_+$. Comme u est continue, u est bornée sur la boule unité, K_1 est fini.

1. Si $N(x) = 1$, alors $N(x) \leq 1$, donc $N'(u(x)) \leq K_1$, ce qui justifie l'existence de K_2 et $K_2 \leq K_1$.
2. Si $N(x) \neq 0$, alors $\dfrac{N'(u(x))}{N(x)} = N'(u\left(\frac{1}{N(x)}x\right)) \leq K_2$, ce qui montre que K_3 existe et $K_3 \leq K_2$.
3. Si $N(x) \leq 1$, pour $x \neq 0$, $N'(u(x)) \leq N'(u(x))/N(x) \leq K_3$ donc $K_1 \leq K_3$.

Norme d'une application linéaire

Définition Pour tout $u \in \mathscr{L}(E, F)$, on pose :

$$|||u||| = \sup_{N(x) \leq 1} N'(u(x))$$

On a ainsi une norme sur $\mathscr{L}(E, F)$ (norme **subordonnée** à N et N').
Remarque Si $E = F$, on emploie habituellement $N = N'$. Exemple : $|||\,\mathrm{Id}_E\,||| = 1$.
Exemple Soit $f : (x_1, \cdots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$. Déterminer $|||f|||$ lorsque $\mathbb{K}^n$ est normé par N_∞ puis N_1. On posera $a = (a_1, \cdots, a_n)$.

Norme d'une application linéaire

Définition Pour tout $u \in \mathscr{L}(E,F)$, on pose :

$$|||u||| = \sup_{N(x)\leq 1} N'(u(x))$$

On a ainsi une norme sur $\mathscr{L}(E,F)$ (norme **subordonnée** à N et N').
Remarque Si $E = F$, on emploie habituellement $N = N'$. Exemple : $|||\,\mathrm{Id}_E\,||| = 1$.
Exemple Soit $f : (x_1, \cdots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$. Déterminer $|||f|||$ lorsque $\mathbb{K}^n$ est normé par N_∞ puis N_1. On posera $a = (a_1, \cdots, a_n)$.
$N_1(a)$ (resp. $N_\infty(a)$).

Norme d'algèbre

Proposition Si $u : E \to F$ et $v : F \to G$ sont des applications linéaires, on a :

$$|||v \circ u||| \leq |||v|||.|||u|||$$

Remarque (cas d'endomorphismes). Si (E, N) est un evn, la norme « triple » est une *norme d'algèbre* sur $\mathscr{L}(E)$.

Remarque On peut définir de même une norme sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par :

$$|||A||| = \sup_{\|X\|=1} \|AX\|$$

C'est également une norme d'algèbre si $p = n$.

Exemple On a $|||A^k||| \leq |||A|||^k$, d'où la convergence normale de $\sum \frac{1}{k!} A^k$.

Majoration lipschitzienne

Proposition Soit B une application bilinéaire de $E \times F$ dans G. (E, F, G des evn de dimension finie). Il existe $k > 0$ tel que

$$||B(x,y)||_G \leq k.||x||_E.||y||_F$$

Démonstration Soient $(e_1, \cdots, e_n)$ une base de E et $(e'_1, \cdots, e'_p)$ une base de F. Alors :

$$||B(x,y)|| \leq \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} |x_i|.|y_j|.||B(e_i, e'_j)|| \leq ||x||_\infty.||y||_\infty \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} ||B(e_i, e'_j)$$

D'où le résultat en utilisant l'équivalence des normes dans E et dans F.

Continuité des applications bilinéaires en dimension finie

Corollaire B est continue sur $E \times F$.
Démonstration On utilise la norme définie sur $E \times F$ par : $\|(x,y)\| = N(x) + N'(y)$.
Soit $(a,b) \in E \times F$. On a :

$$B(x,y) - B(a,b) = B(x-a,y) + B(a,y-b)$$

et donc :

$$|B(x,y) - B(a,b)| \leq k\|x-a\|.\|y\| + k\|a\|.\|y-b\| \to 0$$

si $(x,y) \to (a,b)$, d'où B est continue en (a,b).

Exemples

Remarque Ce résultat s'étend sans peine aux applications multilinéaires en dimension finie.

Exemple

1. $(u, v) \mapsto uv$ est continue sur $\mathscr{L}(E)^2$. $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ est continue sur $\mathbb{K} \times E$.
2. $(x, y) \mapsto (x|y)$ est continue sur E^2 (E eve). (Rem : vrai sur un eph avec Cauchy-S).
3. $(A, B) \mapsto A.B$ est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
4. En dimension finie : les formes quadratiques, les applications n-linéaires, sont continues.