Formes linéaires et Trace

PSI*

Lycée Claude Bernard

5 octobre 2012

Hyperplans en dimension quelconque

Définition H est un hyperplan ssi H admet un supplémentaire de dimension 1.

Exemple

1. $X\mathbb{K}[X] \oplus \mathbb{K}_0[X] = \mathbb{K}[X]$
2. En dimension finie n, H est un hyperplan de E ssi $\dim H = n - 1$.

Supplémentaires à un hyperplan

Lemme Soit F un sev de E, et $a \in E \setminus F$. F et $\mathbb{K}a$ sont en somme directe.
Proposition Si H est un hyperplan et $a \in E \setminus H$, alors $H \oplus \mathbb{K}a = E$.
Démonstration D'après le lemme, $\mathbb{K}a \cap H = \{0\}$. En dimension finie, le résultat en découle.
Soit D de dimension 1 telle que $H \oplus D = E$. On décompose $a = a_H + a_D$.
$a \notin H$ donc $a_D \neq 0$ et $a_D = a_H - a \in H + \mathbb{K}a$ donc $D \subset \mathbb{K}a + H$. On en déduit que $H + \mathbb{K}a = E$.

Formes linéaires

Définition Une forme linéaire sur E est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.
L'espace dual de E, noté E^*, est l'espace $L(E, \mathbb{K})$ des formes linéaires.
Remarque $\mathbb{K}^*$ ne désigne pas le dual de $\mathbb{K}$, qui n'est autre que $L(\mathbb{K})$, mais $\mathbb{K}$ privé de 0.
mais E^* ne désigne pas $E \setminus \{0\}$!
Exemples

1. En dimension finie, $f(x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n) = x_1 f(e_1) + \ldots + x_n f(e_n)$.
2. Sur $C([a, b])$: $f \mapsto \displaystyle\int_a^b f$.
3. Sur $C^n([a, b])$: $f \mapsto f^{(n)}(a)$.
4. Sur $\mathbb{K}[X]$: $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \mapsto a_0$.
5. Sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$: $M \mapsto m_{11}$.
6. det n'est pas une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Matrice d'une forme linéaire

Définition Soit $B = (e_1, ..., e_n)$ une base de E. Toute forme linéaire f admet une matrice (ligne !) dans la base B :

$$M_B(f) = (f(e_1)...f(e_n))$$

(la base de l'espace d'arrivée $\mathbb{K}$ étant toujours (1)).

Hyperplans et formes linéaires

Théorème H est un hyperplan de E ssi il existe $f \in E^*$, non nulle, telle que $H = \operatorname{Ker} f$.

Démonstration $\boxed{\Rightarrow}$ On fixe a tel que $H \oplus \mathbb{K}a = E$ et on pose $f|_H = 0$ et $f(a) = 1$. $f(x_H + \lambda a) = \lambda$ donc $f(x) = 0 \Rightarrow x \in H$. On définit ainsi une forme linéaire de noyau H.

$\boxed{\Leftarrow}$ Soit $a \in E$, tel que $f(a) \neq 0$. Soit $x \in E$.

Analyse : si $x = x_0 + \lambda a$, alors $f(x) = \lambda f(a)$ Synthèse : $f(x - \dfrac{f(x)}{f(a)}a) = 0$ donc $x \in \operatorname{Ker} f + \mathbb{K}a$.

La somme étant directe (lemme), $\operatorname{Ker} f$ est bien un hyperplan.

Exemple En dimension infinie : les équations $\displaystyle\int_0^1 f$, $f(1) = 0$, $a_0 = 0$ définissent des hyperplans de ...

Formes linéaires proportionnelles

Théorème Soient $f, g \in E^*$ formes linéaires non nulles. $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g$ ssi il existe $\alpha \neq 0$, $f = \alpha g$.

Démonstration $\Leftarrow$ Clair.

$\Rightarrow$ On pose $H = \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g$ et $a \in E \setminus H$.

Analyse : si $f = \alpha g$, alors $\alpha = \dfrac{f(a)}{g(a)}$.

Synthèse : on pose $\alpha = \dfrac{f(a)}{g(a)}$. Pour $x \in H$, $f(x) = \alpha g(x)$ et $f(a) = \alpha g(a)$ donc $f = \alpha g$.

Équations d'un hyperplan

Proposition Soit B une base de E. Un sev H de E est un hyperplan ssi il admet une équation du type $a_1x_1 + ... + a_nx_n = 0$ relativement à cette base, le n-uplet $(a_1, ..., a_n)$ est non nul et unique à un facteur multiplicatif non nul près.
Démonstration Cette proposition exprime que tout hyperplan est noyau d'une forme linéaire non nulle, et que deux formes linéaires non nulles ont le même noyau ssi elles sont proportionnelles.

Dimension de l'espace dual

Rappel $E^* = L(E, \mathbb{K})$ ($\mathbb{K}$-espace vectoriel des formes linéaires sur E). Dans la suite, on suppose *E de dimension finie.*

Proposition $\dim E^* = \dim E$.

Démonstration $\dim E = n$ et $\dim \mathbb{K} = 1$, donc $\dim L(E, \mathbb{K}) = n \times 1 = n$.

Base duale

Définition Soit $B = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E.
On note $e_i^* : x_1 e_1 + ... + x_n e_n \mapsto x_i$ la i^{e} **forme coordonnée** sur E (dans la base B).
Alors $B^* = (e_1^*, ..., e_n^*)$ est une base de E^*, appelée **base duale** de $B = (e_1, ..., e_n)$. Pour tout $f \in E^*$,

$$f = \sum_{k=1}^{n} f(e_k) e_k^*$$

Démonstration On a bien, pour tout $x = x_1 e_1 + ... + x_n e_n \in E$:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} f(e_k) x_k = \sum_{k=1}^{n} f(e_k) e_k^*(x)$$

On en déduit que B^* est une famille génératrice de n éléments de E^* (qui est de dimension n), donc c'est une base de E^*.

La fausse application $x \mapsto x^*$

Remarque Attention ! La notation e_i^* est pratique mais ne doit pas faire croire qu'il y ait une application $x \mapsto x^*$. La i-ème coordonnée dépend des autres vecteurs de la base !
Par exemple, si (e_1, e_2) est la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $B' = (e_1, e_1 + e_2)$, alors $e_1^*(e_1 + e_2) = 1$ dans le premier cas, mais $e_1^*(e_1 + e_2) = 0$ dans le second.
En fait, il y a bien une application $B \mapsto B^*$ de l'ensemble des bases de E sur celui des bases de E^*, mais se méfier de la notation e_i^* étant une notation pratique mais trompeuse.

Utilisation des formes coordonnées

Exercice 1 En dimension finie, si pour tout $f \in E^*$, $f(x) = 0$, alors $x = 0$.

Utilisation des formes coordonnées

Exercice 1 En dimension finie, si pour tout $f \in E^*$, $f(x) = 0$, alors $x = 0$.
Démonstration On chosit une base de E et on remplace f par les formes coordonnées, il vient $x_i = 0$ pour tout i donc $x = 0$.

Théorème de la base duale

Théorème Soit E de dimension n. Si $B = (e_1, ..., e_n)$ est une *famille* de E, $S = (f_1, ..., f_n)$ est une *famille* de E^* et $f_i(e_j) = \delta_{ij}$ (relations d'orthogonalité de Kronecker), alors :

1. B est une base de E.
2. S est sa base duale.

Démonstration On suppose $\lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n = 0$. Par hypothèse :

$$0 = f_i(\lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n) = \lambda_i$$

pour tout $i \in \{1, ..., n\}$ donc B est une base de E, et les relations de Kronecker montrent que f_i est la i-ème forme coordonnée, d'où : $S = B^*$.

Matrice d'une famille de formes linéaires

Définition La matrice A d'une famille $(f_1, ..., f_p)$ de formes linéaires sur E relativement à une base B de E est la matrice dont la i^{e} ligne est $M_B(f_i) = (f_i(e_1), ..., f_i(e_n))$.

Exemple Matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de (f_1, f_2) avec :
$f_1 \ : (x, y, z) \mapsto 2x + y$ et $f_2 \ : (x, y, z) \mapsto x + 3y - z$.

Remarque Si $A = M_B(f_1, \cdots, f_p)$ et $A' = M_B(v_1, \cdots, v_q)$, alors $AA' = [f_i(v_j)]$.

Lien avec la matrice dans la base duale

Proposition $M_{B^*}(f_1, ..., f_p) = {}^t M_B(f_1, ..., f_p)$.
Démonstration Les coordonnées de f_i dans la base duale étant $(f_i(e_1), ..., f_i(e_n))$, on constate que la matrice de $(f_1, ..., f_p)$ dans la base B^* est la matrice dont la i^{e} colonne est $\begin{pmatrix} f_i(e_1) \\ \vdots \\ f_i(e_n) \end{pmatrix}$, cqfd.

Application : Calcul d'une base duale

Proposition Si B base de E, $A = M_B(f_1, ..., f_n)$ et $A' = M_B(e_1, ..., e_n)$.
$(f_1, ..., f_n) = (e_1, ..., e_n)^*$ ssi $A' = A^{-1}$.
Démonstration Il suffit de constater que $AA' = [f_i(e_j)]$; on utilise la définition pour le sens direct, le théorème précédent pour la réciproque.

Base antéduale (ou préduale)

Théorème Soit $(f_1, ..., f_n)$ base de E^*. Il existe une unique base $(e_1, ..., e_n)$ de E telle que $(f_1, ..., f_n) = (e_1, ..., e_n)^*$. C'est la **base antéduale** de $(f_1, ..., f_n)$.
Démonstration On fixe une base B de E, le théorème précédent montre que $(f_1, ..., f_n)$ est la base duale d'une unique base de E, définie par la matrice de passage :

$$M_B(e_1, ..., e_n) = M_B(f_1, ..., f_n)^{-1}$$

Interpolateurs de Lagrange

Exemple Si a_0, ..., a_n sont deux à deux distincts, les polynômes interpolateurs associés forment la base antéduale de la famille de formes linéaires f_i : $P \mapsto P(a_i)$.

Un exo très classique

Exemple Soient f_1, ..., $f_p \in E^*$. Soit $f \in E^*$. Montrer que

$$f \in \mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_p) \Leftrightarrow \bigcap_{i=1}^{p} \mathrm{Ker}\, f_i \subset \mathrm{Ker}\, f$$

Un exo très classique

Exemple Soient f_1, ..., $f_p \in E^*$. Soit $f \in E^*$. Montrer que

$$f \in \mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_p) \Leftrightarrow \bigcap_{i=1}^{p} \mathrm{Ker}\, f_i \subset \mathrm{Ker}\, f$$

SOL L'implication est claire, montrons la réciproque. Si f_j est engendrée par les autres f_i, alors $\bigcap_{i \neq j} \mathrm{Ker}\, f_i \subset \mathrm{Ker}\, f_j$ donc $\bigcap_{i=1}^{p} = \bigcap_{i \neq j} \mathrm{Ker}\, f_i$. On peut donc supposer $f_1, \ldots, f_p$ indépendants.
On complète cette famille libre en une base $(f_1, \ldots, f_n)$ de E^* et on note $(e_1, \ldots, e_n)$ sa base antéduale. On a $f = f(e_1)f_1 + \ldots + f(e_n)f_n$, or si $i \leq p < j$, alors $f_i(e_j) = 0$ (par définition d'une base duale) donc $e_j \in \bigcap_{i=1}^{p} \mathrm{Ker}\, f_i$ et $f(e_j) = 0$. Il reste $f = f(e_1)f_1 + \ldots + f(e_p)f_p$, cqfd.

Son corollaire...

Exemple (suite) f_1, ..., f_p indépendantes. Monter que $\dim \bigcap_{i=1}^{p} \operatorname{Ker} f_i = n - p$.

Son corollaire...

Exemple (suite) f_1, ..., f_p indépendantes. Monter que $\dim \bigcap_{i=1}^{p} \operatorname{Ker} f_i = n - p$.
SOL Par récurrence sur p, $p = 1$ est évident. HR pour $p \leq n - 1$.
$\bigcap_{i=1}^{p} \operatorname{Ker} f_i + \operatorname{Ker} f_{p+1} = E$ car sinon, $\bigcap_{i=1}^{p} \operatorname{Ker} f_i$ est inclus dans $\operatorname{Ker} f_{p+1}$.
La formule de Grassmann fournit $n = (n - p) + (n - 1) - \dim \bigcap_{i=1}^{p+1} \operatorname{Ker} f_i$, cqfd.

Trace d'une matrice

Définition Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On pose $A = (a_{ij})$. La trace de A est le scalaire $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Propriétés

1. Tr est une forme linéaire.
2. trace de la transposée.
3. Si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$
4. La trace est invariante par similitude.

Le piège de la commutation...

Attention ! $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $ABC = 0$, $BAC = C$, donc $\mathrm{Tr}(ABC) \neq \mathrm{Tr}(BAC)$.
Attention ! $\mathrm{Tr}(AB) \neq \mathrm{Tr}(A).\mathrm{Tr}(B)$ en général (p.ex : $A = B = I_n$).

Trace et produit scalaire

Remarque $\mathrm{Tr}({}^tAB) = \sum_{i,j} a_{ij}b_{ij}$: c'est le produit scalaire canonique sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Corollaire Toute forme linéaire sur $M_n(\mathbb{K})$ s'écrit $M \mapsto \mathrm{Tr}(AM)$.

Exemple Montrer que tout hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ contient une matrice inversible.

Trace et crochet de Lie

Exercice 1 A et M deux matrices carrées.

1. Justifier qu'il est impossible que : $AM - MA = I$

Trace et crochet de Lie

Exercice 2 A et M deux matrices carrées.

1. Justifier qu'il est impossible que : $AM - MA = I$ $(\mathrm{Tr}(AM - MA) = 0 \neq \mathrm{Tr}(I))$.
2. Si $A = AM - MA$, montrer que A non inversible

Trace et crochet de Lie

Exercice 3 A et M deux matrices carrées.

1. Justifier qu'il est impossible que : $AM - MA = I$ ($\mathrm{Tr}(AM - MA) = 0 \neq \mathrm{Tr}(I)$).
2. Si $A = AM - MA$, montrer que A non inversible (SOL Si A inversible, $I = AMA^{-1} - M$, on applque la trace...)

Trace d'un endomorphisme

Définition Soit $f \in L(E)$, B une base de E. La trace de $M_B(f)$ ne dépend pas de la base B choisie. On dit que c'est la **trace** de f.
Démonstration La trace est invariante par similitude.

Propriétés

On les déduit facilement de celles de la trace des matrices :

1. Tr est une forme linéaire sur $L(E)$.
2. Si f et g sont deux endomorphismes de E, alors $\text{Tr}(fg) = \text{Tr}(gf)$. (Le résultat s'étend sans peine à des applications linéaires $f : E \to F$ et $g : F \to E$.)

Quelques exemples

Exemple Trace d'un projecteur=rang.
Exemple La trace d'un endomorphisme nilpotent est nulle. Que dire de la réciproque ?
Exemple Soient A et B inversible telles que $AB + BA = 0$. Montrer que $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B) = 0$.
Exercice 4 Trace de l'application $M \mapsto aM + b\,{}^tM$? Trace de l'application $M \mapsto AM$?