Espaces préhilbertiens

10 janvier 2013

Espaces préhilbertiens

Définition Espace préhilbertien = espace vectoriel avec un produit scalaire. Il est normé par la norme associée au produit scalaire. Notation du produit scalaire, et de sa norme associée. Si la dimension est finie, alors l'espace est euclidien ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) ou hermitien ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Vecteurs orthogonaux

Définition x et y sont **orthogonaux** ssi $(x|y) = 0$. Vecteurs **unitaires** = de norme 1.

Proposition En dimension finie : tout vecteur orthogonal à une base est nul.

Proposition Familles orthogonales : une famille orthogonale de vecteurs *non nuls* est libre.

En particulier, toute famille orthonormale est libre.

Remarque La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est orthonormale pour le produit scalaire canonique : $(x|y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

La famille (X^k) de $\mathbb{R}[X]$ est orthonormale pour le produit scalaire :

$$(\sum_i a_i X^i | \sum_i b_i X^i) = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i b_i.$$

La famille (X^k) de $\mathbb{R}[X]$ n'est pas orthonormale pour le produit scalaire :

$$(P|Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt.$$

Relation de Pythagore

Proposition Relation de **Pythagore**. Si (x_i) est une famille de vecteurs 2 à 2 orthogonaux, alors

$$\sum_{i=1}^{p} \|x_i\|^2 = \|\sum_{i=1}^{p} x_i\|^2$$

Remarque Réciproque vraie pour $p \leq 2$ seulement : si $a = c = 1$, $b = -\dfrac{1}{2}$, alors $a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2$... ceci donne des contre-exemples dans toute dimension...

eve avec une base orthonormale

Proposition Utilisation d'une BON

1. Coordonnées dans une BON : $x_i = (e_i|x)$.
2. Produit scalaire dans une BON.
3. Norme euclidienne.
4. Expression matricielle en BON : $(x|y) = {}^tXY$.
5. $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale ssi c'est la matrice de passage entre 2 base orthonormales, ssi les colonnes forment une BON de $\mathbb{R}^n$ pour le pdt scalaire canonique. $(P = (C_1|...|C_n)$, $({}^tPP)_{i,j} = {}^tC_iC_j)$.

Construction de bases orthonormales

Proposition Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt
Soit E un $\mathbb{K}$ $-espacevectoriel$. Si $(u_1, \cdots, u_n)$ une famille libre, il existe une unique famille $(e_1, \cdots, e_n)$ telle que :

1. $(e_1, \cdots, e_n)$ est orthonormale.
2. Pour tout $p \leq n$, $\text{Vect}(e_1, \cdots, e_p) = \text{Vect}(u_1, \cdots, u_p)$
3. Pour tout $p \leq n$, $(u_p|e_p) > 0$ (condition de normalisation, la même si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Démonstration

Démonstration (par récurrence sur n).

Pour $n = 1$: CN $u_1 = \alpha e_1$, $(u_1|e_1) = \alpha$, $|\alpha| = ||u_1||$, donc $e_1 = \dfrac{u_1}{||u_1||}$. CS : clair.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose le résultat de toute FL de n vecteurs.

Soit $(u_1, ..., u_{n+1})$ une FL. CN : Si $(e_1, ..., e_{n+1})$ est solution, alors $(e_1, ..., e_n)$ est la FON obtenue à partir de $(u_1, ..., u_n)$ et elle est donc uniquement déterminée par HR. On pose $u_{n+1} = \sum \alpha_i e_i$, alors pour $k \leq n$,

$$(u_{n+1}|e_k) = \alpha_k,\ \alpha_{n+1} = (u_{n+1}|e_{k+1}) > 0 \text{ donc } \alpha_{n+1} = ||u_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i||.$$

CS : on vérifie facilement que la famille $(e_1, ...e_{n+1})$ ainsi obtenue convient.

Variantes du procédé de Gram-Schmidt

Remarque

1. On peut remplacer la condition $(u_p|e_p) > 0$ par une autre condition de normalisation (p.ex, polynômes unitaires.)
2. Si la famille est déjà orthogonale, le procédé se réduit à normer les vecteurs.
3. Exemple : orthonormalisation de la base canonique pour $(P, Q) = \displaystyle\int_0^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$. (MAPLE)

Applications

Conséquences

1. Tout eve (et tout sev d'un eve) admet une BON (Schmidt).
2. Théorème de la base orthonormale incomplète. (Appliquer Schmidt à une base quelconque qui complète la famille orthonormale, l'unicité du procédé montre que la famille initiale, déjà orthonormale, n'est pas modifiée).

Traduction matricielle

Remarque Traduction matricielle du procédé de Schmidt : la décomposition QR.
Pour toute matrice inversible M il existe un unique Ω orthogonal et T triangulaire, à coefficients diagonaux positifs, telles que : $M = \Omega.T$.
Remarque Ne pas comfondre avec la décomposition polaire QS où S est une matrice symétrique !

Applcation : Inégalité d'Hadamard

Application (Inégalité d'Hadamard) $|\mathrm{Det}(u_1, ..., u_n)| \leq ||u_1|| \cdots ||u_n||$. (produit mixte = déterminant en base orthonormale.) Le pavé droit est donc celui de plus grand volume.

Application : Matrices de Gram

Application Matrices de Gram. $v_1, ..., v_n$ indép ssi $(v_i|v_j)$ est inversible. (On écrit M, matrice de (v) en BON, la matrice de Gram est alors ${}^tMM$).

Exemple La matrice $[\frac{1}{i+j+1}]$ est inversible. $(\int_0^1 t^i t^j \, dt = \frac{1}{i+j+1})$

Sous-espaces orthogonaux

Définition sevs orthogonaux. $F \perp G$ ssi $\forall (x, y) \in F \times G$, $x \perp y$.
Proposition Une famille de sevs 2 à 2 orthogonaux est en somme directe.
Démonstration On applique la relation de Pythagore à $x_1 + \cdots + x_p = 0$, il vient $x_1 = \cdots = x_p = 0$.
Notation Somme directe orthogonale $F \oplus^{\perp} G$ ou $\bigoplus^{\perp}_{1 \leq i \leq p} F_i$.

Orthogonal d'un sev

Définition **L'orthogonal** de F est le sous-espace :

$$F^{\perp} = \{x \in E, \forall y \in F, x \perp y\}$$

Notation F^0 ou $F^{\perp}$.
Propriétés

1. $G \perp F \Leftrightarrow G \subset F^{\perp}$.
2. $F^{\perp} \perp F$. En particulier, $F \subset (F^{\perp})^{\perp}$.
3. $E^{\perp} = \{0\}$; $\{0\}^{\perp} = E$.
4. $F \subset G \Rightarrow G^{\perp} \subset F^{\perp}$.

Supplémentaire orthogonal

Remarque En général (en dimension infinie) $F \neq (F^{\perp})^{\perp}$. Par ex. pour $E = C([a,b])$, on montre $\mathbb{R}[X]^{\perp} = \{0\}$, or $\{0\}^{\perp} = E$.

Proposition Si F admet un supplémentaire orthogonal H, alors $H = F^{\perp}$. C'est **le** supplémentaire orthogonal,

Démonstration On a $H \subset F^{\perp}$.

Soit $x \in F^{\perp}$. On décompose $x = x_F + x_H$. x_F est orthogonal à x et x_H, donc à lui-même, d'où $x_F = 0$ et $x \in H$, cqfd.

Conséquences

1. Si $F \oplus F^{\perp} \neq E$, alors F n'a pas de supplémentaire orthogonal.
2. Si $F \oplus F^{\perp} = E$, alors $F = (F^{\perp})^{\perp}$.

Remarque F peut être l'orthogonal de $F^{\perp}$ sans que $F^{\perp}$ soit supplémenaire de F : prendre $E = C([-1,1])$, $F = \{f \in E | \forall x \leq 0, f(x) = 0$ et $G = \{g \in E | \forall x \geq 0, g(x) = 0\}$ et le produit scalaire défini par $(f|g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt$. On constate $F = G^{\perp}$ et $G = F^{\perp}$, donc $F = (F^{\perp})^{\perp}$, mais $\forall f \in F$, $g \in G$, on a $(f+g)(0) = 0$, ce qui montre $F \oplus G \neq E$.

Proposition Si F est de dimension finie, alors F admet un supplémentaire orthogonal.

Démonstration Pour tout $x \in E$, $x - \sum_{i=1}^{p} (e_i|x)e_i \in F^{\perp}$.

Remarque Le résultat est donc immédiat si E est de dimension finie.

Projection orthogonale

Définition Un projecteur p est orthogonal ssi $\operatorname{Im} p \perp \ker p$.

Remarque

1. On peut définir la projection orthogonale sur F ssi $F \oplus F^{\perp} = E$.
2. Le projecteur conjugué $\operatorname{Id} - p$ est le projeté orthogonal de x sur $F^{\perp}$.

Inégalité de Bessel

Proposition Pour tout $x \in E$, $||p(x)||^2 = (x, p(x))$.
Proposition Inégalité de **Bessel** $\|p(x)\| \leq \|x\|$
Exercice 1 p projecteur est orthogonal ssi on a cette inégalité pour tout x.

Utilisation d'une base orthonormale

Proposition Si $(e_1, ..., e_p)$ BON de F, alors $p_F(x) = \sum_{i=1}^{p}(e_i|x)e_i$.

Remarque Tout sev de dimension finie d'un ephr admet un supplémentaire orthogonal.

Distance à un sev d'un eve

Définition Si $x \in E$ et A une partie non vide de E, on définit $d(x,A) = \inf_{y \in A} ||x-y||$.
Proposition Si F est un sev de dim finie de E et $p(x)$ le projeté orthogonal de x sur F, alors :

1. $d(x,F) = ||x-p(x)||$
2. $\forall y \in F,\ y \neq p(x) \Rightarrow ||x-y|| > d(x,F)$.

:
Démonstration Pythagore : $||x-y||^2 = ||x-p(x)||^2 + ||p(x)-y||^2$.
Si $y \neq p(x)$, alors $||x-y|| > ||x-p(x)||$;
si $y = p(x)$, alors $||x-y|| = ||x-p(x)||$. Le minimum de $||y-x||$ est donc atteint en $p(x)$.

Exemple

Exemple Calculer $\min_{a,b} \int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 \, dx$.

SOL Le projeté orth. de x^2 sur $\mathbb{R}_1[x]$ est $Q(x) = ax + b$. On résout $(X^2 - Q|1) = (X^2 - Q|X) = 0$ d'où $Q = X - 1/6$. Enfin $||X^2 - Q(X)||^2 = 1/180$.

Matrices de Gram

Exemple Lien avec les matrices de Gram. $(u_1, ..., u_p)$ base d'un sev F. Soit $x \notin F$. Notons $d = d(x, F)$ et $x' = p_F(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$.

1. $x - x' \perp F$ donc $(x|u_i) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j (u_j|u_i)$.
2. $d^2 = ||x - x'||^2 = (x|x - x') = (x|x) - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j (u_j|x)$.
3. On pose le système :

$$\begin{cases} (u_1|u_1)\alpha_1 + \cdots + (u_1|u_p)\alpha_p - (u_1|x).1 = 0 \\ \vdots \\ (u_p|u_1)\alpha_1 + \cdots + (u_p|u_p)\alpha_p - (u_p|x).1 = 0 \\ (x|u_1)\alpha_1 + \cdots + (x|u_p)\alpha_p - (x|x).1 = -d^2 \end{cases}$$

On applique les formules de Cramer sur la dernière inconnue, et il vient :

$$d = \sqrt{\frac{G(u_1, ..., u_p, x)}{G(u_1, ..., u_p)}}$$

Représentation des formes linéaires

Dans toute la suite, E est un eve.

Théorème (de représentation, Riesz) $\Phi : a \mapsto (x \to (x|a))$ est un isomorphisme de E sur E^*

Démonstration $\Phi(a) = 0 \Rightarrow (a|a) = 0 \Rightarrow a = 0$. donc injection. La linéarité est claire et les dimensions sont égales.

Adjoint d'un endomorphisme

Définition Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Il existe un unique $f^* \in \mathscr{L}(E)$ tq

$$\forall x, y \in E, \quad (f^*(x)|y) = (x|f(y))$$

Démonstration On fixe $x \in E$. $y \mapsto (x|f(y))$ est une forme linéaire sur E, donc il existe un unique vecteur $f^*(x)$ tel que cette forme s'écrive $y \mapsto (f^*(x)|y)$.
On vérifie facilement que f^* est linéaire.
Remarque Par symétrie : $(x|f^*(y)) = (f(x)|y)$.

Matrice de l'adjoint en base orthonormale

Proposition **Si B est une base orthonormale**, alors $M_B(f^*) = {}^t M_B(f)$.

Démonstration Notons A la matrice de f et A' celle de f^*. Pour tout X, pour tout Y :

$$ {}^t X A' Y = {}^t(AX) Y = {}^t X A Y $$

on en déduit $A' = {}^t A$.

Propriétés de l'adjoint

Proposition

1. $\det(u) = \det(u^*)$.
2. $\chi_u = \chi_{u^*}$
3. $(u^*)^* = u$
4. $(uv)^* = v^* u^*$
5. $u \mapsto u^*$ est linéaire.

Démonstration On fixe une BON et on considère les matrices A et ${}^tA$ de f et f^*.

Noyau, image de l'adjoint

Proposition Soit $u \in L(E)$.

1. Le noyau de u^* est l'orthogonal de l'image de u ;
2. L'image de u^* est l'orthogonal du noyau de u.

Démonstration Soit $y \in E$. $y \in \ker u^*$ ssi $u^*(y) = 0$ si et seulement si, pour tout x, $(x|u^*(y)) = (u(x)|y) = 0$. ssi $y \in (\operatorname{Im} u)^\perp$.
On a l'autre résultat par $(u^*)^* = u$.
Exemple L'adjoint d'un projecteur p d'image F et de direction G est le projecteur p^* d'image $G^\perp$ et de direction $F^\perp$. [ne pas confondre avec le projecteur associé q , d'image G et de direction F].

Orthogonal d'un sev stable

Proposition Si F est stable par u, alors $F^{\perp}$ est stable par u^*.
Démonstration Si $x \in F^{\perp}$, alors pour tout $y \in F$, $(u^*(x)|y) = (x|u(y)) = 0$, cqfd.)

Groupe orthogonal

(cf. polycopié sur les automorphismes orthogonaux.) **Proposition** Soit $u \in L(E)$. $u \in O(E)$ ssi $u^* u = uu^* = \mathrm{Id}_E$.

Endomorphismes symétriques

Définition u est dit auto-adjoint (ou symétrique) ssi $u^* = u$, càd : $(u(x)|y) = (x|u(y))$ pour tout (x, y).

Proposition Matrice : u est symétrique ssi sa matrice dans (toute) base orthonormale est symétrique.

Exemples d'endomorphismes symétriques

Exemples

1. Tout endomorphisme qui admet une matrice diagonale dans une BON est auto-adjoint (la réciproque est le théorème spectral).
2. Un projecteur est orthogonal ssi il est symétrique. **Démonstration** Si p orthogonal, $(p(x)|y) = (p(x)|p(y)) = (x|p(y))$.
   Réciproquement, $p = p^* \Leftrightarrow (x - p(x)|p^(y)) = (p(x) - pp(x)|y) = 0$. On peut également utiliser les éléments caractéristiques de p^*.

Remarque En général, les symétries ne sont pas des endomorphismes symétriques et les endomorphismes symétriques ne sont pas des symétries.
Cas spécial : une symétrie est orthogonale ssi elle est auto-adjointe.

Orthogonal d'un sev stable

Proposition Si F est stable par u et u symétrique, alors $F^{\perp}$ est stable par u et u induit sur F et sur $F^{\perp}$ des endos symétriques. En particulier, si x est vep de u, alors u induit un endo symétrique sur l'hyperplan $x^{\perp}$.

Sous-espaces propres d'un endomorphisme symétrique

Proposition Les SEP d'un endomorphisme symétrique sont 2 à 2 orthogonaux.
Démonstration Si $u(x) = \lambda x$ et $u(y) = \mu y$, alors

$$\lambda(x|y) = (u(x)|y) = (x|u(y)) = \mu(x|y)$$

et si $\mu \neq \lambda$, il vient $x \perp y$, cqfd.

Théorème spectral

Théorème (Théorème spectral) Un endomorphisme symétrique est diagonalisable dans une base orthonormale

Démonstration D'après le résultat précédent, il suffit de montrer qu'il est diagonalisable.

Par récurrence sur la dimension n de E. Si $n = 1$, OK. Si $n = 2$, la matrice de f dans une BON s'écrit :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

et son polynôme caractéristique : $X^2 - (a+c)X + ac - b^2$ a pour discriminant $\Delta = (a-c)^2 + 4b^2$.

Si $a = c$ et $b = 0$, alors $f = a\,\mathrm{Id}$; sinon, $\Delta > 0$ et f est diagonalisable (pol. carac. scindé, à racines simples).

Suite de la récurrence

Soit $n \geq 2$, on suppose le résultat vrai de toute dimension $\leq n$.
Supposons $\dim E = n + 1$ et f endomorphisme symétrique de E.
Si f admet un vecteur propre, alors on fixe e_1 vecteur unitaire propre et $(e_2, ..., e_{n+1})$ BON de l'hyperplan ${e_1}^{\perp}$, qui diagonalise la restriction de f sur H (H.R.). Ainsi, dans $(e_1, \cdots, e_{n+1})$, la matrice de f est diagonale.
Si f n'admet aucun vecteur propre, alors son poly carac se décompose en facteurs irréductibles de degré 2 du type $X^2 + bX + c$.
Or il annule f, donc pour au moins l'un d'entre eux, on a :
$\mathrm{Ker}(f^2 + bf + c\,\mathrm{Id}) \neq \{0\}$ car le produit est nul.
Soit e dans ce noyau. $\mathrm{Vect}(e, f(e))$ est un plan stable sur lequel f est symétrique, donc diagonalisable, ce qui contredit $\mathrm{Sp}(f) = \emptyset$.

Théorème spectal, version matricielle

Proposition (version matricielle) Tout matrice symétrique réelle est diagonalisable, la matrice de passage étant orthogonale (il existe P orthogonale tq $M = PD^tP$.)

Démonstration On démontre la version matricielle par récurrence sur la dimension. Pour $n = 1$, clair. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose le résultat vrai dans $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Soit $A \in \mathscr{S}_{n+1}(\mathbb{R})$.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A. Montrons que $\lambda \in \mathbb{R}$. On a $AX = \lambda.X$ avec $X \neq 0$ et en conjuguant : $\bar{A}\bar{X} = A\bar{X} = \bar{\lambda}\bar{X}$.

Il vient :

$$^t\bar{X}AX = \begin{cases} \lambda^t\bar{X}X \\ \bar{\lambda}^t\bar{X}X \end{cases}$$

D'où $\lambda = \bar{\lambda}$. Le polynôme caractéristique de A étant scindé sur $\mathbb{C}$, A admet au moins une valeur propre, réelle d'après ce qui précède. Soit H un supplémentaire orthogonal. À l'aide d'une base orthonormale adaptée à $E_\lambda(A)$ et H, A s'écrit :

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda I_m & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} {}^tP$$

On en déduit que A_1 est symétrique, donc d'après l'hypothèse de récurrence, $A_1 = QD^tQ$ avec Q orthogonale. Posons :

Matrices symétriques

Définition Une matrice symétrique est dite :

1. *positive* ssi $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$.
2. *définie positive* ssi $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$.

Notation $S_n^+(\mathbb{R})$ (resp. $S_n^{++}(\mathbb{R})$) est l'ensemble des matrices symétrique positives (resp. définies positives).

Matrices symétriques positives

Proposition Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, alors ${}^t AA \in S_n^+(\mathbb{R})$.
Si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, alors ${}^t AA \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.
Démonstration ${}^t({}^t AA) = {}^t AA$ et si $\lambda \in \mathrm{Sp}({}^t AA)$, et $X \neq 0$ tq ${}^t AAX = \lambda X$, alors $\lambda = \dfrac{||AX||^2}{||X||^2} \geq 0$, cqfd.
Si $A \in GL_n(\mathbb{R})$, alors $\det {}^t AA \neq 0$ donc $0 \notin \mathrm{Sp}({}^t AA$, cqfd.
Proposition Si $A \in S_n^+(\mathbb{R})$, il existe $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $A = {}^t MM$.
Si $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, on a $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
Démonstration Théorème spectral : $A = P.D^2.{}^t P$ (car les coefficients diagonaux de la matrice diagonale sont tous positifs), et donc $A = {}^t MM$ avec $M = DP$.
La deuxième est claire ($\det(A) \neq 0$).

Décomposition de Cholesky

Proposition Décomposition de Cholesky : si $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, il existe une matrice triangulaire supérieure T à coefficients diagonaux > 0 telle que $A = {}^tTT$.
Démonstration Écrire $A = {}^tMM$, puis d'après Gram-Schmidt, $M = UT$ (avec $U \in O_n(\mathbb{R})$, T comme demandé). Ainsi $A = {}^tTT$.

Racine carrée d'une matrice symétrique définie positive

Proposition L'application $M \mapsto M^2$ est une bijection de $S_n^+(\mathbb{R})$ sur lui-même.
Démonstration L'application est bien définie (facile). Si $A \in S_n^+(\mathbb{R})$, alors on pose $A = PD\,{}^tP$. CN : si $M^2 = A$, alors A et M commutent donc M est diagonalisable dans la même base que A, et $M = P\Delta\,{}^tP$. D'où $\Delta^2 = D$, qui admet une unique solution diagonale positive, cqfd.

Décomposition polaire

Proposition Décomposition polaire : Si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, alors il existe une unique couple (U, S) avec U orthogonale et S symétrique définie positive tel que $A = US$.

Démonstration CN : ${}^t AA = S^2$, donc S est l'unique racine définie positive de ${}^t AA$.
Posons $U = AS^{-1}$, on vérifie ${}^t UU = S^{-1}S^2S^{-1} = I_n$, cqfd.