Ex. 1 Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $N(x,y) = \int_0^1 |x+ty|\,dt$. Montrer que N définit une norme sur $\mathbb{R}^2$ et représenter sa boule unité. [Comment faire avec Maple ?]

Ex. 2 Soit $E = \{f \in C^2([0,1]) | f(0) = f'(0) = 0\}$. On définit $N(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) + f''(x)|$ et $N_s(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| + |f''(x)|$.

1. Montrer que N et N_s sont des normes sur E.
2. Montrer que ces normes ne sont pas équivalentes à N_∞ (utiliser $x \mapsto x^n$).
3. Montrer que $N \leq N_s$.
4. Soit $f \in E$. Justifier que $f(x) = \int_0^x sin(x-t).(f(t) + f''(t))\,dt$. En déduire que N et N_s sont équivalentes.

Ex. 3 Pour tout $f \in E = C([0,1])$, on pose :

$$N(f) = \left(f(0)^2 + \int_0^1 f'(t)^2\,dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

Montrer que N est une norme sur E.

Ex. 4 Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour $P \in E$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $\theta_n(P) = \int_0^1 P(t)t^n\,dt$. Justifier l'existence de $N(P) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\theta_n(P)|$ et montrer que c'est une norme sur E.

Ex. 5 Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles bornées muni de la norme $\|u\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$. Déterminer si les sous-ensembles suivants sont fermés ou non :

1. A ensemble des suites croissantes.
2. B ensemble des suites qui convergent vers 0.
3. C ensemble des suites convergentes.
4. D l'ensemble des suites telles que $\sum_{k=0}^n |u_n|$ converge.
5. E l'ensemble des suites 2π-périodiques.

Ex. 6 Pour $p \in]1, +\infty[$, on définit la fonction N_p $\mathbb{K}^n$ par :

$$N_p(x) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

a) Montrer que si $N_p(x) \leq 1$ et $N_p(y) \leq 1$, alors $\forall t \in [0,1]$, $N_p(tx + (1-t)y)1$.
b) En déduire que N_p est une norme sur $\mathbb{K}^n$. Quelle propriété de la boule unité est exprimée par (a) ?

Ex. 7

1. La somme de deux fonctions lipschitziennes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est-elle une fonction lipschitzienne ? Les fonctions lipschitziennes forment-elles un espace vectoriel ?
2. Montrer que le produit de deux fonctions lipschitziennes bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est une fonction lipschitzienne et donner un contre-exemple dans le cas de fonctions non bornées.

Ex. 8 Soit E l'ensemble des fonctions lipschitziennes de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On pose $K(f) = \sup_{0\leq x<y\leq 1} \dfrac{|f(x) - f(y)|}{y - x}$ et $N(f) = |f(0)| + |K(f)|$.

1. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé par N.
2. Montrer que les normes N et N_∞ ne sont pas équivalentes.

Ex. 9 Soit E un evn et u une suite d'éléments de E. On suppose que $\forall p \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to+\infty} u_{n+p} - u_n = 0$. La suite est-elle nécessairement de Cauchy ?

Ex. 10 a) Si u_{3n+2}, u_{4n+1} et u_{5n+3} convergent, peut-on affirmer que la suite (u_n) converge ?
b) Si u_{3n+2}, u_{4n+1} et u_{5n+3} convergent, peut-on affirmer que la suite (u_n) converge ?

Ex. 11 a) Soit u une suite de réels telle que $u_{n+1} - u_n \to 0$. Soient $\alpha < \beta$. On suppose que u admet deux sous-suites qui convergent respectivement vers α β. Soit $\gamma \in]\alpha, \beta[$. Montrer qu'il exite une sous-suite de u qui converge vers γ. (Indication : Supposer qu'il existe $\epsilon_0 >$ tel que, à partir d'un certain rang, $|u_n - \gamma| > \epsilon_0$. Aboutir à une contradiction.)

b) Montrer que si toutes les sous-suites convergentes d'une suite réelle bornée u ont la même limite, alors u converge. Est-ce vrai si on ne suppose pas u bornée ?

c) Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$. Soit u la suite définie par $u_0 \in [0, 1]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. On pose $v_n = u_{n+1} - u_n$. Montrer que u converge si et seulement si v converge. (Indication : on montrera que si v_n converge, alors $v_n \to 0$, on montrera que toute sous-suite de u_n tend vers un point fixe de f, puis que toute sous-suite convergente de u_n tend vers la même limite).

Ex. 12

1. Montrer que toute matrice carrée est la limite d'une suite de matrices inversibles.
2. Montrer que toute matrice carrée est la limite d'une suite de matrices diagonalisables.
3. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est un ouvert de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
4. Montrer que $O(n)$ est un compact dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Ex. 13 Déterminer l'adhérence et l'intérieur de $SL_n(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Ex. 14 Pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, on pose : $N(P) = \sup_{z \in \mathbb{U}} |P(z)|$, (on rappelle $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$). On considère les polynômes $P_n(X) = \sum_{k=0} \frac{1}{2^k} X^k$. Montrer que (P_n) est une suite de Cauchy divergente de $(\mathbb{C}[X], N)$.

Suites récurrentes

Ex. 15 On considère la suite récurrente donnée par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{{u_n}^2}$. Étudier la convergence de (u_n). c) Trouver un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$ (on pourra considérer la somme $\dfrac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (u_{n+1})^\alpha - (u_n)^\alpha$ pour α bien choisi).

Ex. 16 a) Justifiez $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} \sim \ln n$.

b) On définit la suite u par $u_1 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{n u_n}$.
Étudier la suite (u_n), puis donner un équivalent de u_n en $+\infty$. c) Généralisation : Déterminer la limite de u_n dans le cas $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{n^\alpha u_n}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) et donner un équivalent lorsque $\alpha > 1$

c) On définit la suite v par $v_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n + e^{-v_n}$. Déterminer les deux premiers termes du développement asymptotique de v_n.