Définition d'une norme

Définition E est un $\mathbb{K}$-ev.
L'application $N : E \to \mathbb{R}_+$ est une **norme** sur E ssi

1. $\forall x \in E,\ N(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.
2. $\forall k \in \mathbb{K},\ \forall x \in E,\ N(k.x) = |k| \cdot N(x)$.
3. $\forall x, y \in E,\ N(x + y) \leq N(x) + N(y)$

Notation N, $\|.\|$
Propriété $\forall x, y \in E,\ |N(x) - N(y)| \leq N(x - y)$.
Exemples Valeur absolue sur $\mathbb{R}$, module sur $\mathbb{C}$, normes vues en géométrie.

Espace vectoriel normé

Définition Un **espace vectoriel normé** est un ev muni d'une norme.

Proposition Si F est un sev de E, la restriction de N à F en fait un espace normé.

Distance associée à une norme

Définition La **distance** associée à la norme N est l'application :

$$d_N : (x, y) \to N(x - y)$$

de E^2 dans $\mathbb{R}_+$.
Propriétés Elles découlent de la définition de la norme :

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Remarque Effet d'une homothétie : $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$ et d'une translation : $d(x + a, y + a) = d(x, y)$ (invariance par translation).

Normes sur $\mathbb{K}^n$

Exemples Sur $\mathbb{K}^n$:

1. $\|x\|_\infty = \sup_{1\leq k\leq n} |x_k|$.
2. $\|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2}$.
3. $\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$.

Normes sur un espace vectoriel de dimension finie

Proposition Si F est un evn et f application linéaire injective de E sur F, alors $N(x) = \|f(x)\|_F$ définit une norme sur E.
Exemple $N(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2/4}$ définit une norme sur $\mathbb{R}^2$.
Corollaire Si E est de dimension finie, on peut fixer une base B et utiliser une norme N sur $\mathbb{K}^n$ et l'injectivité de $x \mapsto (x_1, ..., x_n)$ de E dans $\mathbb{K}^n$ pour définir $N_B(x) = N(x_1, ..., x_n)$.
Bien sûr, ces normes dépendent de la base choisie.

Normes sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

- $||A||_\infty = \sup_{1\leq i,j\leq n} |a_{ij}|$
- $||A||_1 = \displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} |a_{ij}|$
- $||A||_2 = \sqrt{\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} |a_{ij}|^2}.$

Norme sur les espaces de fonctions

- Sur $C([a,b])$ (fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$).
  1. $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$
  2. $\|f\|_1 = \displaystyle\int_a^b |f|$
  3. $\|f\|_2 = \sqrt{\displaystyle\int_a^b |f|^2}$ (norme euclidienne ou hermitienne)
- Sur $L_c^1(I)$ (fonctions continues intégrables sur I) L'espace des fonctions **continues** intégrables sur I est normé par $N_1(f) = \displaystyle\int_I |f|$ (norme de la convergence en moyenne).
- Sur $L_c^2(I)$ (fonctions continues de carré intégrable sur I) L'ensemble des fonctions **continues** de carré intégrable est normé par $N_2(f) = \sqrt{\displaystyle\int_I |f|^2}$ (norme de la convergence en moyenne quadratique ou "en énergie")

Normes sur $\mathbb{K}[X]$

On utilise les propriétés algébriques et analytiques des polynômes. Pour $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$:

- $\max_{k\in\mathbb{N}} |a_k|$,
- $\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|$,
- $\sqrt{\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|^2}$
- $\sup_{x\in I} |P(x)|$ (I un ensemble infini, habituellement un intervalle de $\mathbb{R}$)
- $\int_a^b |P(x)|\,dx$, etc.

Suites, fonctions, parties bornées

Définition

1. Une suite d'éléments de E est bornée ssi il existe $M > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $N(x_n) \leq M$.
2. Une fonction $f : D \to E$ est bornée ssi il existe $M > 0$ tel que $\forall x \in D$, $N(f(x)) \leq M$.
3. Une partie A de E est bornée ssi il existe $M > 0$ tel que $\forall (x, y) \in A^2$, $d(x, y) \leq M$. $d(x, y)$ est bornée sur A^2
   ou, de manière équivalente, si $x \mapsto N(x)$ est bornée sur A.
   Diamètre de A : $\delta(A) = \sup_{(x,y)\in A^2} d(x, y)$.

EVN des suites bornées

Proposition

1. L'ensemble des suites bornées pour $||.||$ est un sev de $E^{\mathbb{N}}$.
   La formule : $N_\infty(u) = \sup_{n\in\mathbb{N}} ||u_n||$ définit une norme sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des suites bornées.
2. De même, $\mathscr{B}(D, F)$ (fonctions bornées d'un ens qcq D dans un evn F) est normé par : $\|f\|_\infty = \sup_{x\in D} \|f(x)\|$.

Diamètre et choix de la norme

Attention ! Le diamètre dépend évidemment de la norme. En dimension infinie, le caractère borné peut dépendre de la norme choisie.

Exemple On considère les fonctions f_n définies par $f_n(x) = n - n^2 x$ sur $[0, \frac{1}{n}]$ et $f_n(x) = 0$ sur $[\frac{1}{n}, 1]$ (segment joignant $(0, n)$ et $(1/n, 0)$).

On constate $N_\infty(f_n) = n$ et $N_1(f_n) = 1$, donc la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée pour N_1 mais pas pour N_∞.

Remarque Toutes les fonctions f_n sont bornées, c'est la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui n'est pas bornée ! – Exemple semblable avec la suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Boules dans un evn

Définition Soient $x_0 \in E$ et $r > 0$. On définit les boules :

1. ouvertes $B(x_0, r) = \{x \in E | d(x, x_0) < r\}$
2. fermées $B'(x_0, r) = \{x \in E | d(x, x_0) \leq r\}$ (ou encore $B_F(x_0, r)$).

Remarque Ce sont des parties bornées de E.

Définition La **boule unité** de E est la boule de centre 0 et de rayon 1. Toutes les boules sont *semblables* à la boule unité (image par translation et homothétie).

Exemples de boules-unité

Exemples

Représenter la boule unité de $\mathbb{R}^2$ pour différentes normes :

1. $\|x\|_\infty = \sup(|x_1|, |x_2|)$.
2. $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.
3. $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|$.
4. $N(x) = \sqrt{x^2 + y^2/4}$.

Convexité

Proposition Les boules sont convexes.
Rappel Une partie est convexe si, pour tout couple d'éléments (x, y), alors tout le segment $[x, y]$ est inclus dans la partie.
On définit le segment $[x, y] = \{tx + (1-t)y | t \in [0, 1]\}$.
Démonstration Si $x, y \in B(a, r)$, alors pour tout $t \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} N(tx + (1-t)y - a) &= N(t(x-a) + (1-t)(y-a)) \\ &\leq tN(x-a) + (1-t)N(y-a) \leq r \end{aligned}$$

Produit scalaire

Définition Un produit scalaire sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est une application Φ de $E \times E$ dans $\mathbb{K}$, qui est :

1. **hermitienne** : $\Phi(y, x) = \overline{\Phi(x, y)}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, (**symétrique** si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).
2. **linéaire à droite** : $\forall a \in E$, $x \mapsto \Phi(a, x)$ est linéaire.
3. **définie positive** : $x \neq 0 \Rightarrow \Phi(x, x) > 0$ (se montre en deux temps : 1) $\forall x$, $\Phi(x, x) \geq 0$ puis 2) $\Phi(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$).

Remarque Dans le cas réel, Φ est **bilinéaire** (par symétrie).
Cependant , si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, le produit scalaire complexe est hermitien (et non symétrique), il n'est donc que **semi-linéaire à gauche** : $\Phi(kx, y) = \bar{k}\Phi(x, y)$ et $\Phi(x + x', y) = \Phi(x, y) + \Phi(x', y)$.
On dit qu'il est **sequilinéaire** (sesqui $=$ 1 fois et demi).
Notation $(x|y)$ pour $\Phi(x, y)$ (éventuellement $< x, y >$, etc.)

Exemples de produits scalaires

Exemples

1. $E = \mathbb{K}^n : (x|y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i y_i$
2. $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) : (A|B) = \mathrm{Tr}({}^t\bar{A}B)$;
3. $E = C([a,b]) : \displaystyle\int_a^b \bar{f} g$
4. $E = \mathbb{K}[X]$, $(A|B) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \bar{a}_k b_k$
5. ou $(P|Q) = \displaystyle\int_a^b P\bar{(}x)Q(x)\,dx$

Exercice Développer (pdt scalaire complexe) : $(ax + y|ax + y) =$

Exemples de produits scalaires

Exemples

1. $E = \mathbb{K}^n : (x|y) = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i y_i$
2. $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) : (A|B) = \mathrm{Tr}({}^t\bar{A}B)$;
3. $E = C([a,b]) : \int_a^b \bar{f} g$
4. $E = \mathbb{K}[X]$, $(A|B) = \sum_{k=0}^{+\infty} \bar{a}_k b_k$
5. ou $(P|Q) = \int_a^b P(\bar{x})Q(x)\,dx$

Exercice Développer (pdt scalaire complexe) : $(ax+y|ax+y) = |a|^2(x|x) + \bar{a}(x|y) + a(y|x) + (y|y) = |a|^2(x|x) + 2\,\mathrm{Re}(\bar{a}(x|y)) + (y|y)$.

Espaces préhilbertiens

Définition Un espace muni d'un produit scalaire est un espace **préhilbertien**.
Si la dimension est finie, on parle d'espace **euclidien** (cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) ou **hermitien** (cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Proposition Soit E un eph et $x, y \in E$. Alors :

$$|(x|y)|^2 \leq (x|x).(y|y) \qquad (CS)$$

Démonstration On constate, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$:
$(\lambda x - y|\lambda x - y) = |\lambda|^2(x|x) - 2\,\mathrm{Re}(\bar{\lambda}(x|y)) + (y|y) \geq 0$.
On se donne $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $(x|y) = |(x|y)|e^{i\alpha}$ et on se restreint à $\lambda = te^{i\alpha}$, avec $t \in \mathbb{R}$. Il vient : $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$(x|x)t^2 - 2|(x|y)|t + (y|y) \geq 0$$

Si $x = 0$, l'inégalité (CS) est acquise.
Sinon, on a un trinôme du 2d degré, à coefficients réels, de signe constant, donc son discriminant est négatif, ce qui entraîne :

$$|(x|y)|^2 \leq (x|x).(y|y)$$

Cas d'égalité de Cauchy-Schwarz

Proposition (Cas d'égalité) : $|(x|y)|^2 = (x|x).(y|y)$ ssi x et y sont colinéaires.
Démonstration Si $x = 0$, les deux affirmations sont vraies. Sinon, l'égalité implique $\Delta = 0$ dans le trinôme $(x|x)t^2 - 2|(x|y)|t + (y|y)$, donc il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $te^{i\alpha}x + y = 0$, cqfd. (Rappel : $e^{i\alpha} = 1$ ou -1 si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.)
Réciproquement, on écrit $y = kx$ et on évalue les deux membres.

Norme associée à un produit scalaire

Définition L'application $N_2 : x \mapsto \sqrt{(x|x)}$ est la **norme** associée au produit scalaire.
On note simplement $||x||_2$ ou encore $||x||$ pour $N_2(x)$.
Démonstration

1. $||x|| = 0 \Rightarrow (x|x) = 0 \Rightarrow x = 0$
2. $||k.x||^2 = (kx|kx) = |k|^2(x|x)$ donc $||k.x|| = |k|.||x||$.
3. Pour tout x, $y \in E$:

$$\begin{aligned}(x+y|x+y) &= ||x||^2 + ||y||^2 + (x|y) + (y|x) \\ &= ||x||^2 + ||y||^2 + 2\,\mathrm{Re}(x|y) \\ &\leq ||x||^2 + ||y||^2 + 2||x||.||y|| \text{ (CS)}\end{aligned}$$

   et donc $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$, cqfd.

Remarque L'inégalité de Cauchy-Schwarz peut donc s'écrire :

$$|(x|y)| \leq ||x||.||y||$$

Normes euclidiennes ou hermitiennes classiques

1. $N_2(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{1/2}$ dérive du produit scalaire (canonique) sur $\mathbb{K}^n$.
2. Sur $C([a, b])$, la norme définie par $||f||_2 = \sqrt{\int_a^b |f|^2}$ dérive d'un produit scalaire.
3. $L_c^2(I)$ est préhilbertien, produit scalaire $\int_I \bar{f} g$.
4. $\mathscr{E} = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \sum {u_n}^2 \text{ converge}\}$. Montrer que $\mathscr{E}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et que $(u|v) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k v_k$ définit un produit scalaire sur $\mathscr{E}$.

Dédoublement

A retenir ! Pour vérifier qu'une application est une norme, il *suffit* de vérifier qu'elle dérive d'un produit scalaire. [Mais toutes les normes ne sont pas euclidiennes ou hermitiennes !]

En pratique... On procède par dédoublement.

Exemple $N(f) = \left(\int_0^1 f(t)^2 + f'(t)^2 \, dt\right)^{1/2}$ dérive d'un produit scalaire sur $C^1([0,1],\mathbb{R})$.

Polarisation

(x, y sont des vecteurs d'un eph E) :

Proposition Cas réel :

1. $(x|y) = \frac{1}{4}(||x+y||^2 - ||x-y||^2)$ (polarisation)
2. $||x-y||^2 + ||x+y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2)$ (parallélogramme)

Cas complexe :

1. $(x|y) = \frac{1}{4}(||x+y||^2 - ||x-y||^2 + i||x-iy||^2 - i||x+iy||^2)$ (polarisation)
2. $||x-y||^2 + ||x+y||^2 + ||x+iy||^2 + ||x-iy||^2 = 4(||x||^2 + ||y||^2)$ (parallélogramme)

Limite d'une suite

Définition E un evn. Soit (u_n) une suite de E et $\ell \in E$. (u_n) converge vers ℓ ssi $||u_n - \ell|| \to 0$.
Vocabulaire La suite (u_n) converge ssi (u_n) admet une limite finie ; sinon, la suite **diverge**.
Proposition Unicité de la limite
Si u_n tend vers ℓ et ℓ', alors

$$||\ell - \ell'|| \leq ||\ell - u_n|| + ||\ell' - u_n|| \to 0$$

donc $\ell = \ell'$.
Proposition Toute suite convergente est bornée.
Remarque En particulier toute suite non bornée est divergente.

Propriétés des limites

Proposition Linéarité. Si (u_n) et (v_n) convergent vers ℓ et ℓ', et $k \in \mathbb{K}$, alors $u_n + kv_n \to \ell + k\ell'$.
Proposition (Continuité de la norme) Si (u_n) converge vers ℓ, alors $||u_n||$ converge vers $||\ell||$.
Démonstration $|\ ||\ell|| - ||u_n||\ | \leq ||\ell - u_n||$.
Proposition (Comparaison) Si (a_n) est une suite réelle qui tend vers 0 et $||u_n - \ell|| \leq a_n$, alors $u_n \to \ell$.
Proposition (Corollaire) Si α_n suite de $\mathbb{K}$ et u_n suite de E.

1. Si $\alpha_n \to 0$ et (u_n) bornée, alors $\alpha_n u_n \to 0$.
2. Si α_n bornée et $u_n \to 0$, alors $\alpha_n u_n \to 0$.
3. Si $\alpha_n \to \alpha$ et $u_n \to \ell$, alors $\alpha_n u_n \to \alpha\ell$.

Exercice 1 Si E est un ephr, $x_n \to x$ et $y_n \to y$ alors $(x_n|y_n) \to (x|y)$ (solution : utiliser la polarisation).

Comparaison asymptotique

Définition a_n suite réelle, u_n à valeurs dans un evn.

1. (Domination) $u_n = O(a_n)$ ssi $N(u_n) = O(a_n)$ (ssi $N(u_n)/a_n$ bornée).
2. (Prépondérance) $u_n = o(a_n)$ ssi $N(u_n) = o(a_n)$ (ssi $N(u_n)/a_n \to 0$).

Remarque (Equivalence) $u_n \sim v_n$ ssi il existe a_n suite réelle telle que $u_n = a_n v_n$ et $a_n \to 1$.

Fonctions vectorielles

De même, pour $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow E$,

- $f(x)$ tend vers $\ell \in E$ en a si $||f(x) - \ell|| \to 0$.
- f est continue en a si $\ell = f(a)$.

Les propriétés vues pour les suites s'étendent sans difficulté aux applications à valeurs dans E.

Conséquences du choix de la norme

Caractère borné, convergence, limite. Ces notions dépendent-elles de la norme choisie ?

Attention ! La réponse est oui en général...

Exemple Sur $C([0,1])$, on pose $f_n(x) = x^n\sqrt{n}$. On calcule :

$||f_n||_1 = \dfrac{\sqrt{n}}{1+n}$, $||f_n||_2 = \sqrt{\dfrac{n}{2n+1}}$ et $||f_n||_\infty = \sqrt{n}$.

Ainsi f_n tend vers 0 pour $||.||_1$, est bornée pour $||.||_2$ mais ne tend pas vers 0, et $||f_n||_\infty$ n'est même pas bornée.

Suite de limite arbitraire selon la norme

Exemple On fixe un polynôme Q de degré n. On pose $Y_k = X^k$ si $k \leq n$ et $Y_k = X^k - Q$ si $k > n$. $(Y_0, ..., Y_p)$ est une famille échelonnée en degrés de $\mathbb{K}_p[X]$ pour tout p, donc tout polynôme P s'écrit de manière unique :

$$P = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k Y_k.$$

On définit alors $N_1(P) = \sup_{k\in\mathbb{N}} |a_k|$ et $N_2(P) = \sup_{k\in\mathbb{N}} |b_k|$.

On considère maintenant les polynômes $T_p = \dfrac{1}{p}(X^{n+1} + \cdots + X^{n+p})$. On constate facilement $N_1(T_p) = \dfrac{1}{p} \to 0$.

Mais en distribuant Q : $T_p - Q = \dfrac{1}{p}(X^{n+1} - Q) + \cdots + \dfrac{1}{p}(X^{n+p} - Q)$, ce qui montre : $N_2(T_p - Q) = \dfrac{1}{p} \to 0$.

On a ainsi une suite (T_p) qui converge vers 0 pour N_1 et vers Q pour N_2.

Norme dominée par une autre norme

Proposition Si N et N' deux normes sur E. S'il existe une constante $\alpha > 0$ telles que $N' \leq \alpha N$, alors

1. Toute suite bornée pour N est bornée pour N'.
2. Toute suite qui converge pour N converge pour N', vers la même limite.

Démonstration Car $N'(x_n) \leq \alpha N(x_n)$ et
$N'(x_n - \ell) \leq \alpha \cdot N(x_n - \ell) \to 0$.

Exemple 1 : Normes sur $\mathbb{K}^n$

Proposition Sur $\mathbb{K}^n$:

$$||x||_\infty \leq ||x||_1 \leq \sqrt{n}||x||_2 \leq n||x||_\infty$$

En particulier, toute suite qui converge pour l'une de ces normes converge pour les autres.

Démonstration

1. $\sup_{1\leq k\leq n} |x_k| \leq |x_1| + \cdots + |x_n|$ clair.
2. On interprète la somme $|x_1| + \cdots + |x_n|$ comme le produit scalaire de $(|x_1|, \cdots, |x_n|)$ par $(1, \cdots, 1)$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :
$$(|x_1| + \cdots + |x_n|)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \times \sum_{k=1}^{n} 1$$
et donc, en passant à la racine carrée : $||x||_1 \leq ||x||_2\sqrt{n}$.
3. On a simplement $|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2 \leq n||x||_\infty^2$ et en passant à la racine carrée : $||x||_2 \leq ||x||_\infty\sqrt{n}$.

Exemple 2 : Normes sur $E = C([a, b])$

Proposition Pour tout $f \in E$:

$$N_1(f) \leq \sqrt{b-a} N_2(f) \text{ et } N_2(f) \leq \sqrt{b-a} N_\infty(f)$$

Remarque

1. En particulier, une suite de fonctions qui converge pour N_∞ (norme de la convergence uniforme) converge également pour N_2 (convergence quadratique) et pour N_1 (convergence en moyenne).
2. **Attention !** La convergence pour N_1 n'entraîne pas celle pour N_∞. Pour $f_n(x) = x^n$ sur $[0, 1]$, on a $N_1(f_n) = \displaystyle\int_0^1 x^n \, dx = \frac{1}{n+1} \to 0$ alors que $N_\infty(f_n) = 1 \not\to 0$.
3. Tout ceci est faux lorsque l'intervalle de définition est quelconque : prendre la fonction affine par morceaux définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(0) = 1/n$ et $f(n) = 0$. Alors $N_1(f_n) = n$, $N_2(f_n) = 1/3$, $N_\infty(f_n) = 1/n$.

Normes équivalentes

Définition Soient N et N' des normes sur E. N est **équivalente** à N' (ou : « N et N' sont équivalentes ») s'il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que $N \leq \alpha N'$ et $N' \leq \beta N$. On note alors $N \sim N'$.

Remarques

1. Si $N_1 \sim N_2$ et $N_2 \sim N_3$, alors $N_1 \sim N_3$.
2. Si N et N' sont équivalentes :
   2.1 Les parties bornées pour N sont bornées pour N' (mais le diamètre peut être différent).
   2.2 Toute suite qui converge pour N converge pour N', vers la même limite.
3. Attention ! cette équivalence n'a pas le même sens que la notion de fonctions équivalentes !

En pratique... Deux normes N et N' sont équivalentes si les quotients $\dfrac{N}{N'}$ et $\dfrac{N'}{N}$ sont majorés.
On peut montrer que deux normes ne sont pas équivalentes en trouvant une suite (x_n) qui n'a pas la même limite pour les deux normes ou qui est bornée pour l'une mais pas pour l'autre, etc.

Exemple

1. Sur $C([a,b])$, les normes N_1, N_∞ et N_2 ne sont pas équivalentes. Exemple $f_n(x) = x^n$. $N_1(f_n) = \dfrac{1}{n+1}$, $N_2(f_n) = \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$ et $N_\infty(f_n) = 1$. On constate que les quotients N_2/N_1 et N_∞/N_1 et N_∞/N_2 ne sont pas bornés.
2. Sur $\mathbb{K}[X]$: $N(P) = \max|a_k|$, $N'(P) = \sup_{x\in[0,1]}|P(x)|$. On pose $P_k(X) = 1 + X + \cdots + X^k$. On constate $N(P_k) = 1$ et $N'(P_k) = k+1 \to +\infty$, donc N et N' ne sont pas équivalentes.

EVN de dimension finie

Théorème Si E est de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes sur E.

Dans la suite, E est un evn de dimension n.

Conséquence L'ensemble des parties bornées de E ne dépend pas de la norme choisie.

L'ensemble des suites convergentes de E ne dépend pas de la norme (ni leurs limites).

Limite et coordonnées

Théorème (Limite par coordonnées) Soit (u_k) une suite de E et $\ell \in E$. Soit B une base de E (u_k) converge vers ℓ ssi pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, $u_k^i \to \ell^i$.

Démonstration

1. $\Rightarrow$. Utiliser $|u_k^i - \ell^i| \leq ||u_k - \ell||_\infty$ pour tout i.
2. $\Leftarrow$. Utiliser $||u_k - \ell||_1 \leq \sum_{i=1}^n |u_k^i - \ell^i|$.

Suites de Cauchy

Définition (u_n) est de Cauchy ssi pour tout ε, il existe n_0 tel que $p, q \geq n_0 \Rightarrow ||u_p - u_q|| \leq \varepsilon$.
Autre version : il existe n_0 tel que $p \geq n_0 \Rightarrow ||u_p - u_{n_0}|| \leq \varepsilon$.
Remarque En dimension finie, cette propriété est indépendante de la norme choisie.
Proposition Toute suite convergente est de Cauchy.
Remarque Ce résultat est vrai en dim quelconque.
Proposition En dimension finie, toute suite de Cauchy est convergente. (On dit que l'espace est *complet*.)
Démonstration Fixons une base de E. Soit u une suite de Cauchy. Ses composantes sont également de Cauchy (car $|u_p^i - u_q^i| \leq ||u_p - u_q||_{\cdot\infty}$). Or, dans $\mathbb{K}$, toute suite de Cauchy converge. Donc les composantes convergent, et donc la suite converge.

Convergence normale d'une série

Conséquence Convergence normale d'une série. Soit $(E, ||.||)$ un espace normé. La série $\sum u_k$ converge **normalement** si $\sum ||u_k||$ converge.

Proposition En dimension finie, toute série qui converge normalement est convergente.

Démonstration La série $\sum ||u_k||$ est convergente, donc elle vérifie le critère de Cauchy. Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, à partir d'un certain rang N :

$$||\sum_{k=N}^{n} u_k|| \leq \sum_{k=N}^{n} ||u_k|| \leq \varepsilon$$

La suite $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ est de Cauchy, donc converge.

Remarque Cette propriété équivaut à la convergence des suites de Cauchy.

Exponentielle de matrice

Exemple Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. La série $\sum \frac{A^k}{k!}$ est **normalement** convergente. On pose : $\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$

Démonstration On peut utiliser $||.||_\infty$ sur $M_n(\mathbb{C})$. On a, pour deux matrices M et N, $MN(i,j) = \sum_{k=1}^{n} m_{ik} n_{kj} \leq n.||M||.||N||$.

En particulier, $||A^k|| \leq n^{k-1}.||A||^k$.

On en déduit $||\frac{A^k}{k!}|| \leq n^{k-1}\frac{||A||^k}{k!}$, dont la série est convergente.

ex : pour A nilpotent, $\exp(A) = \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}$. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors $A^k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; alors : $\exp(A) = eA$.

Normes d'algèbre

Remarque Normes d'algèbres.

1. $n \geq 2$. Est-il possible d'avoir une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $N(AB) = N(A)N(B)$? Réponse : NON ! Pour A et A' semblable, on aurait $N(A) = N(A')$. Or on considère $D = \mathrm{diag}(1, 2, ..., n)$ et $M_k = D + kE_{ij}$ avec $i \neq j$. Alors D et M_k sont semblables, pourtant $N_\infty(M_k) \to \infty$.
2. Une norme d'algèbre vérifie $N(AB) \leq N(A)N(B)$. N_∞ n'est pas une norme d'algèbre sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, mais N_2 oui !
3. Autre ex : $N(A) = sup_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$
4. Si N est une norme d'algèbre, alors $N(A^k) \leq N(A)^k$, $N(exp(A)) \leq exp(N(A))$.