Formes bilinéaires symétriques

Rappel

1. E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, une forme bilinéaire est une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$, linéaire par rapport à chaque variable.
2. La forme bilinéaire f est symétrique ssi $\forall x, y \in E$, $f(x, y) = f(y, x)$.

Remarque Une forme bilinéaire n'est pas linéaire.
Exemple $f(x, y) = axy$ sur $\mathbb{R}$, les produits scalaires, le déterminant.
Remarque Le déterminant n'est bilinéaire qu'en dimension 2, le produit vectoriel de $\mathbb{R}^3$ est bilinéaire mais ce n'est pas une *forme* bilinéaire.

L'espace des formes bilinéaires symétriques

Proposition

1. L'ensemble des formes bilinéaires sur E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ($\mathscr{L}_2(E)$).
2. L'ensemble des formes bilinéaires **symétriques** sur E est un sev de $L_2(E)$ noté $\mathscr{S}_2(E)$.

Démonstration ok

Expression matricielle

Expression matricielle en dimension finie Soit $B = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E.

$$f(x, y) = \sum_{i,j} x_i y_j f(e_i, e_j) = \sum_{i,j} x_i f(e_i, e_j) y_j$$

notons A la matrice $(f(e_i, e_j))$. Il vient $f(x, y) = {}^tXAY$.
Définition A est la matrice de $f \in S(E)$ relativement à la base B.
Remarque Ne pas confondre avec la matrice d'un endomorphisme !
Proposition A est symétrique ssi f est symétrique.

Formes quadratiques

Définition Soit $q : E \mapsto \mathbb{R}$. q est une **forme quadratique** sur E ssi il existe une forme bilinéaire *symétrique* f telle que $q(x) = f(x, x)$ pour tout x. f est alors unique et s'appelle la **forme polaire** de q.
q est la **forme quadratique associée** à f.
Démonstration On utilise l'identité de polarisation :

$$f(x, y) = \frac{1}{4}q(x + y) - q(x - y)$$

ce qui montre que f est unique.
Remarque On peut utiliser l'une des autres formules de polarisation :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(q(x + y) - q(x) - q(y)) \\ \frac{1}{2}(q(x) + q(y) - q(x - y)) \end{cases}$$

Reconnaître les formes quadratiques

Proposition En dimension finie, les formes quadratiques sont les fonctions polynomiales homogènes de degré 2 en les coordonnées. La forme polaire s'obtient par dédoublement des termes.

Démonstration Notons $a_{ij} = f(e_i, e_j)$ (avec $f \in \mathscr{S}_2(E)$). On compare :

$$f(x,y) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i y_j = \sum_i a_{ii} x_i y_i + \sum_{i<j} a_{ij}(x_i y_j + x_j y_i)$$

et la forme q associée :

$$q(x) = \sum_i a_{ii} x_i^2 + \sum_{i<j} 2 a_{ij} x_i x_j$$

Exemples

Exemples

1. $f(x,y) = xy$ Alors $q(x) = x^2$ sur $\mathbb{R}$.
2. $E = \mathbb{R}^2$. $q(x) = x_1^2 + 2x_1x_2$. Alors $f(x,y) = x_1x_2 + x_1y_2 + x_2y_1$.
3. $q(x,y) = x^2 + 2xy$ est associée à la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On remarque que $q \mapsto M_B(q)$ est un isomorphisme.

Changement de base

Changement de base En dimension finie, si P est la matrice de passage de B à B', on a la formule $X = PX'$. On compare ${}^tX'A'X' = {}^tXAX = {}^tX{}^tPAPX$. Il vient :

$$A' = {}^tPAP$$

Les matrices A et A' sont dites **congruentes**.
Attention ! En général, elles ne sont pas semblables, sauf si P est orthogonale (i.e. ${}^tP = P^{-1}$).
Exemple Il suffit de choisir $A = I_2$ et P non orthogonale. ${}^tPP$ et I_2 sont donc congruentes, mais ne sont pas semblables (sinon ${}^tPP = I_2$ et P est orthogonale.)

FBS associée à un endomorphismes symétriques

Définition FBS associé à un endomorphisme symétrique :
$(x, y) \mapsto (u(x)|y) = (x|u(y))$

Remarque Dans une base orthonormale, la matrice S de u est symétrique et la FBS associée est donnée par ${}^t XSY$.

La donnée d'une base orthonormale induit des isomorphismes :
$S(E) \leftrightarrow S_n(\mathbb{R}) \leftrightarrow S_2(E; \mathbb{R})$.

Endomorphisme symétrique associé à une FBS

Proposition Si f est une FBS sur E, il existe un unique u endomorphisme symétrique de E tel que $f(x,y) = (x|u(y))$. Dans une base orthonormale, la matrice de u est la matrice de f.

Démonstration Unicité : si pour tout x, $(x|u(y)) = (x|v(y))$, alors $u(y) = v(y)$....

Existence : on fixe une bon $B = (e_1, ..., e_n)$, on a : $(u(y)|e_k) = f(e_k, y)$. D'où CN : $u(y) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(e_k, y).e_k$. CS : on vérifie que la formule précédente définit un endomorphisme de E.

Par symétrie de f, u est symétrique.

Remarque D'après le th. spectral, il existe une base orthonormale dans laquelle la matrice de u (donc de f) est diagonale.

Application aux coniques

Application Equation d'une conique.
Elle est sous la forme ${}^tXAX + LX + C = 0$. On diagonalise A ($X = PX'$) et on est ramené à :

$${}^tX'\Delta X' + (LP)X' + C = 0$$

Dans la nouvelle base (orthonormale), l'équation ne comporte plus que des termes $ax^2 + bx$, $a'y^2 + b'y$ et des constantes.
Or, si par ex. $a \neq 0$, alors $ax^2 + bx = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{2a}$.
Ainsi, Une équation du second degré $P(x, y) = 0$ sans terme croisé xy se ramène donc par translation de l'origine du repère, à une des expressions : $ax^2 + a'y^2 = k$ (coniques à centre), $ax^2 + b'y = k$ (genre parabole). (On tient compte que $(a, a') \neq (0, 0)$ et on échange éventuellement x et y.)
Finalement, on est ramené à l'une des équations réduites :

1. $x^2/a^2 + y^2/b^2 = \lambda$ (genre ellipse : ellipse vraie si $\lambda > 0$, réduite au centre si $\lambda = 0$, vide si $\lambda < 0$),
2. $x^2/a^2 - y^2/b^2 = \lambda$ (genre hyperbole : hyperbole vraie si $\lambda \neq 0$, faisceau de deux droites sécantes si $\lambda = 0$)
3. $y^2 = 2px + h$ (genre parabole : parabole si $p \neq 0$, faisceau de droites parallèles si $p = 0$ et $h \geq 0$,vide si $p = 0$ et $h < 0$.)

Quotient de formes quadratiques

Exemple Déterminer le sup de l'expression $\dfrac{x^2 + xy + y^2}{x^2 + y^2}$ sur $\mathbb{R}^2\{(0,0)\}$.
(Réduire la forme quadratique au numérateur).

FBS et FQ positives

Définition f est positive ssi q est positive, ie $\forall x \in E,\ q(x) \geq 0$.

Exemple $(f, g) \mapsto \displaystyle\int_I fg$ est une forme bilinéaire symétrique positive sur $\mathscr{L}^2_m(I)$, de même pour $(f, g) \mapsto \displaystyle\int_a^b fg$ sur $C_m([a, b])$.

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Proposition (inégalité de Cauchy-Schwarz) Soit q est une fq sur E, de forme polaire f. Pour tout $x, y \in E$:

$$f(x,y)^2 \leq q(x)q(y)$$

Démonstration (idem que pour un produit scalaire). Soient $x, y \in E$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $q(x+ty) = t^2 q(y) + 2tf(x,y) + q(x) \geq 0$.
Si $q(y) = 0$, il s'agit d'une fonction affine de signe constant, donc $f(x,y) = 0$ et l'inégalité est claire.
Si $q(y) \neq 0$, il s'agit d'un polynôme du second degré, donc $\Delta \leq 0$ ce qui donne l'inégalité.

Cas d'égalité pour des FBS définies positives

Cas particulier Définition f est définie positive ssi $\forall x \neq 0,\ q(x) > 0$. ($f$ est un produit scalaire sur E.)
Cas d'égalité dans Cauchy-Schwarz : $|f(x,y)| = f(x,x).f(y,y)$ ssi x et y colinéaires.