On intègre des fonctions continues par morceaux.
I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non trivial, d'extrémités : $a < b$ dans $\bar{\mathbb{R}}$.
Les fonctions sont à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Fonctions CPM sur un segment

Rappel Une fonction est CPM sur le segment $[a, b]$ ssi il existe une subdivision $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ telle que :

- f soit continue sur $]a_k, a_{k+1}[$, $k = 0..n-1$;
- f admette une limite finie à droite en tout a_k, $k = 0..n-1$;
- f admette une limite finie à gauche en tout a_k, $k = 1..n$.

Remarque Une fonction CPM sur un segment est bornée (mais n'atteint pas toujours ses bornes) et elle n'est discontinue qu'en un nombre *fini* de points.

Fonctions CPM sur un intervalle quelconque

Définition Une fonction f définie sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est CPM sur I ssi elle est CPM sur tout segment inclus dans I.
Remarque En particulier, les fonctions continues sur I sont CPM sur I.
Exemples Les fonctions suivantes sont-elles CPM sur leur intervalle de définition ?

1. $f(x) = 1/x$ si $x \in]0, 1]$
2. $f(x) = 1/x$ si $x \in]0, 1]$, $f(0) = 0$.
3. Partie entière sur $\mathbb{R}$.
4. $f(x) = 1$ si $x \in \{1/k, k \in \mathbb{N}^*\}$, $f(x) = 0$ sinon.

Intégrales impropres

Définition

1[er] cas : f CPM sur $[a, b[$

$\int_a^b f(t)\,dt$ est convergente ssi il existe $\lim_{x\to b} \int_a^x f(t)\,dt$.

On pose alors $\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{x\to b} \int_a^x f(t)\,dt$ (intégrale impropre).

2[ème] cas : f CPM sur $]a, b]$

$\int_a^b f(t)\,dt$ est convergente ssi il existe $\lim_{x\to a} \int_x^b f(t)\,dt$.

On pose alors $\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{x\to a} \int_x^b f(t)\,dt$ (intégrale impropre).

Intégrales doublement impropres

3ème cas : f CPM sur $]a,b[$. On choisit arbitrairement $x_0 \in]a,b[$.

$\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est convergente ssi $\displaystyle\int_{x_0}^b f(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_a^{x_0} f(t)\,dt$ sont convergentes (intégrale doublement impropre)

Dans ce cas, on pose : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \int_{x_0}^b f(t)\,dt + \int_a^{x_0} f(t)\,dt.$

Remarque La convergence et la valeur sont indépendantes du choix de x_0 (relation de Chasles).

Intégrales divergentes

$4^{\text{ème}}$ cas : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est divergente ssi elle n'est pas convergente.

Valeurs aux bornes

Remarque La *valeur* de f en a ou b n'a pas d'importance. Dans l'écriture $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$, on peut toujours considérer qu'on intègre la restriction de f sur $]a, b[$.

Intégrales de référence

Exemples

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}$ si $\alpha > 1$ (et divergence sinon).
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}$ si $\alpha < 1$, DV sinon. (cas particulier : $\dfrac{1}{\sqrt{t}}$.)
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ est toujours divergente.
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t}\, dt$ est doublement divergente !
5. $\displaystyle\int_0^1 \ln t\, dt = -1$ (convergence)
6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at}\, dt = \frac{1}{a}$ CV ssi $a > 0$.
7. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{a^2 + t^2}\, dt = \frac{\pi}{2a}$ CV si $a \neq 0$.

Cas particuliers

Remarque Si f est CPM sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f(t)\,dt$ est convergente.
(Vocabulaire : intégrale ordinaire).
Intégrale faussement impropre Une intégrale est faussement impropre en a si f admet en a un prolongement par continuité. On est ramené à l'étude d'une intégrale ordinaire.
Exemple $\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\,dt$ est convergente car $f(t) = \frac{\sin t}{t}$ est continue sur $]0, 1]$ et admet un PPC en 0.
Remarque Une intégrale n'est jamais faussement impropre en $+\infty$ ou $-\infty$.

Parité

Parité $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge ssi $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt$ convergent. Dans ce cas,

1. Si f est impaire, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 0$.
2. Si f est paire, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 2\int_{0}^{+\infty} f(t)\,dt$

Attention ! $\forall a > 0$, $\displaystyle\int_{-a}^{a} \sin t\,dt = 0$ mais $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \sin t\,dt$ est divergente.

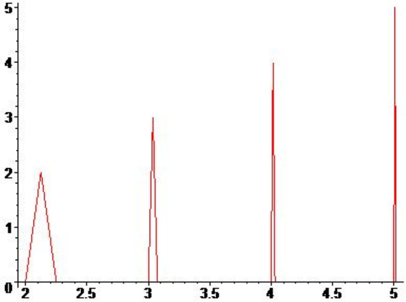
Étude de f aux bornes

Si $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ converge, peut-on affirmer que f est bornée au voisinage de 0 ou qu'elle tend vers 0 en $+\infty$?
–NON dans les deux cas !
exemple 1 : $\ln t$ sur $]0,1]$;
exemple 3 : $\int_0^{\infty} \cos(t)\,dt$ diverge mais $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(t^2)\,dt$ converge (intégrale de Fresnel) - les deux n'ont pas de limite en $+\infty$
Cependant... Si f admet une limite non nulle en $+\infty$, alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ diverge ! (cas évident)

Triangles

exemple 2 : f défini à l'aide de triangles de base $\left[n, n + \frac{2}{n^3}\right]$, de hauteur n, et (donc) d'aire $\frac{1}{n^2}$. On remarque $f(n + 1/n^3) = n \to +\infty$.

Figure: f ne tend pas vers 0 en $+\infty$



Reste d'une intégrale convergente

Proposition Si $\displaystyle\int_{[a,b[} f$ converge, alors $\displaystyle\lim_{x\to b}\int_x^b f = 0$.

Remarque L'existence de $\displaystyle\int_x^b f$ pour $x > a$ nécessite la convergence *préalable* de l'intégrale sur $]a, b[$.

Exemple $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt = \frac{1}{x}$.

Exemple Si l'intégrale de f converge au voisinage de b et $u(x)$ et $v(x)$ tendent vers b en x_0, alors $\displaystyle\lim_{x\to x_0}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt = 0$.

Cependant, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\int_x^{2x} \frac{1}{t}\,dt = \ln 2\ldots$

Propriétés algébriques

Proposition Linéarité, positivité, croissance (par passage à la limite).

Remarque Attention, si $\displaystyle\int_J f$ et $\displaystyle\int_J g$ convergent alors $\displaystyle\int_J f+g$ CV, mais réciproque fausse (ex : $0 = \dfrac{1}{t} + \dfrac{-1}{t}$, sur $]0,+\infty[$.

Proposition Cas des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$. Soit $f : J \to \mathbb{C}$.

1. $\displaystyle\int_J f$ CV ssi $\displaystyle\int_J \operatorname{Re} f$ et $\displaystyle\int_J \operatorname{Im} f$ convergent.
   Dans ce cas, on a $\displaystyle\int_J f = \int_J \operatorname{Re} f + i\int_J \operatorname{Im} f$.
2. $\displaystyle\int_J f$ CV ssi $\displaystyle\int_J \bar{f}$ CV.
   Dans ce cas, on a $\displaystyle\int_J \bar{f} = \overline{\int_J f}$.

Découpage d'une intégrale

Proposition Si $\int_{[a,b[} f$ converge, alors si (a_n) suite strictement croissante telle que $a_0 = a$ et $\lim a_n = b$, la série $\sum \int_{a_n}^{a_{n+1}} f$ est convergente.

Exemple L'intégrale $\int_0^{+\infty} t^a \sin(t)\, dt$ diverge si $a \geq 0$.

Démonstration On considère la série $\sum \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} t^a \sin(t)\, dt$ Le terme général a pour valeur absolue :

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} t^a |\sin(t)|\, dt \geq \int_{\frac{\pi}{4}+n\pi}^{\frac{3\pi}{4}+n\pi} t^a |\sin(t)|\, dt \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\pi}{2} \left(\frac{\pi}{4} + n\pi\right)^a$$

donc la série est grossièrement divergente.
On en déduit que l'intégrale est divergente.

Remarque Réciproque fausse, considérer $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \cos(t)\, dt$. (OK si la fonction est positive !)

Comparaison série-intégrale

Théorème (de comparaison) Si $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ est cpm et décroissante, alors la série $\sum f(k)$ et l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\, dt$ sont de même nature.

Démonstration Ré-écrire la conclusion du théorème vu dans le chapitre "séries". Comme $f \geq 0$, la suite $\int_a^n f$ et l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\, dt$ sont de même nature.

Changement de variable

Rappel Théorème de SUP : Soit φ une application C^1 de $[a, b]$ dans J. Soit f est continue sur J (NB : on peut se restreindre au cas où $J = \varphi([a, b])$ est un segment.) Alors :

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\, du$$

En pratique :

- On pose $u = \varphi(t)$
- On différentie : $du = \varphi'(t)\, dt$
- On changement les bornes

Cas où φ est monotone

Remarque En général (si φ n'est pas monotone), $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$ ne sont pas les bornes de $J = \varphi(I)$.
Si φ est monotone, on peut écrire, compte tenu du signe de φ' et de l'ordre d'écriture des bornes :

$$\int_I f(\varphi).|\varphi'| = \int_J f$$

Peut-on appiquer le théorème si f n'est que CPM ?

Exemple $\varphi(t) = t^3 \sin \frac{1}{t}$. Alors $\varphi'(t) = 3t^2 \sin \frac{1}{t} - t \cos \frac{1}{t}$. On a $\varphi(t) \to 0$ et $\varphi'(t) \to 0$, donc $\varphi(0) = 0$ définit une fonction C^1 sur $[0, 1]$. On considère f telle que $f(x) = 0$ si $x < 0$ et $f(x) = 1$ si $x \geq 0$. Alors $(f \circ \varphi)\varphi'$ est discontinue en $\dfrac{1}{n\pi}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ donc n'est pas CPM.
Le théorème tombe alors en défaut.

Changement de variable strictement monotone

Lemme Si φ est continue sur l'intervalle I, alors φ est strictement monotone ssi φ est injective.
Dans ce cas, si φ est C^1, alors φ' est de signe constant (mais peut s'annuler), et φ induit une bijection de I sur $\varphi(I)$ et les extrêmités de $\varphi(J)$ sont les images de celles de I (ou les limites de φ aux extrémités de I).
En outre, φ^{-1} est continue et tout segment $K' \subset J$ est image d'un segment par φ.
Proposition Si φ est strictement monotone, alors $(f \circ \varphi)\varphi'$ est cpm sur $[a, b]$ et le théorème de changement de variable peut s'appliquer.
Démonstration Une subdivision adaptée à f est image d'une subdivision adaptée à $f \circ \varphi$...

Changement de variable dans une intégrale impropre

Théorème Soit φ une application C^1 et strictement monotone sur I.
Soit f une fonction continue par morceaux sur l'intervalle $J = \varphi(I)$.

1. $\displaystyle\int_J f$ est convergente ssi $\displaystyle\int_I f(\varphi).|\varphi'|$ est convergente.
2. Dans ce cas, $\displaystyle\int_J f = \int_I f \circ \varphi.|\varphi'|$

Remarque Si le changement de variable est décroissant, on écrit tout de même les bornes de l'intervalle dans l'ordre croissant, d'où la valeur absolue qui apparaît dans la formule.

Démonstration On suppose par exemple φ strictement croissante sur $[a,b[$, on applique le th. de changement de variable sur un segment :

$$\forall y \in [a,b[, \quad \int_{\varphi(a)}^{\varphi(y)} f = \int_a^y f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

Si l'intégrale de f est convergente, alors le membre de droite admet une limite finie quand $y \to b$.
Pour tout $y' \in J$:

$$\int_{\varphi(a)}^{y'} f = \int_a^{\varphi^{-1}(y')} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

Si $\displaystyle\int_J f(\varphi)\varphi'$ converge, alors le membre de gauche tend vers une limite finie si y' tend vers $\lim_b \varphi$.
Exemple $\displaystyle\int_a^{a+1} \frac{1}{(x-a)^m}\,dx$ converge ssi $m<1$.

Peut-on affaiblir les hypothèses ?

Remarque L'hypothèse de stricte monotonie de φ est **indispensable**.
Exemple On considère $\varphi : t \mapsto t \sin t$ sur $\mathbb{R}_+$. φ est C^∞ sur $\mathbb{R}_+$ et $\varphi(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}$. On considère la fonction $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, dont l'intégrale est convergente sur $\mathbb{R}$ (et vaut π).
En appliquant le th. de changement de variable sur des segments, on s'aperçoit que :

$$\int_0^{n\pi} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = 0$$

mais également que $\displaystyle\int_0^{2n\pi+\pi/2} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt \to \int_{\mathbb{R}+} f = \frac{\pi}{2}$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$ diverge !

Exemple

Exemple Calculer $I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 + \cos(x)^2}$.

Exemple

Exemple Calculer $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+\cos(x)^2}$.
SOL I n'est pas impropre, la fonction intégrée est continue sur $\mathbb{R}$. Elle est paire et π-périodique, donc : $I = 4\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\cos(x)^2}$. Les règles de Bioche indiquent le changement de variable $t = \tan x$, soit $x = \operatorname{Arctan} t$. Le changement de variable est bien C^1 et strictement croissant, donc :

$$I = 4\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{1+t^2}} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{4}{3}\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\frac{4}{3}+t^2} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

Intégration par parties

Si u et v sont de classe C^1 sur $[a, b]$,

$$\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$$

Attention ! Dans le cas d'intégrales impropres, on effectue la transformation sur un segment, puis on passe à la limite.

Remarque On peut énoncer un théorème d'intégration par parties lorsque $u.v$ admet une limite finie en a et en b.

Remarque Attention ! La convergence des éléments du membre de droite doit être établie avant toute autre chose.

Exemple Justifier que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$ est convergente.

Fonctions positives : principe général

Proposition Si $f \geq 0$ sur I, alors $\int_x^y f(t)\,dt$ est une fonction décroissante de x et croissante de y, donc elle admet une limite pour $x \to a$ ou pour $y \to b$ ssi elle est majorée.
ATTENTION au cas $x \to a$ QUI N'EST PAS CLAIR : on a une fonction décroissante de x mais x est lui-même "décroissant".

Théorème de comparaison

f, g CPM sur $[a, b[$.

1. Si $0 \leq f \leq g$ et $\int_a^b g$ converge, alors $\int_a^b f$ converge et $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.
2. Si $0 \leq f \leq g$ et $\int_a^b f$ diverge, alors $\int_a^b g$ diverge.
3. Généralisation : si $f = \underset{b}{O}(g)$ ou $f = \underset{b}{o}(g)$,...
4. En particulier, si $f \underset{b}{\sim} g$, et f et g positives, leurs intégrales sont de même nature.

On peut adapter ces résultats à $]a, b]$ (avec comparaisons au voisinage de a).

Démonstration

1. $\int_a^x f$ est majorée par $\int_a^b g$.
2. C'est la contraposée de 1.
3. Il existe $M > 0$ tel que, sur $[a', b[$, $f \leq Mg$. Par comparaison (1.), $\int_a^b f$ converge.

Justifier la convergence d'une intégrale

Exemple $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\, dt.$

1. continue sur $\mathbb{R}_+^*$
2. $o(e^{-t})$ en $+\infty$
3. équivalent de $\dfrac{1}{\sqrt{t}}$ en 0

Complément

Pour des fonctions positives équivalentes en b ($f \sim g$)

Intégrales divergentes : alors $\displaystyle\int_a^x f \sim \int_a^x g$. (équivalence des intégrales) ;

Intégrales convergentes : alors $\displaystyle\int_x^b f \sim \int_x^b g$ (équivalence des restes).

Intégrales absolument convergentes

Définition Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction cpm. $\displaystyle\int_I f$ est absolument convergente ssi $\displaystyle\int_I |f|$ est convergente.

Proposition Une intégrale absolument convergente est convergente.

Démonstration Pour tout $x \in I$, $f(x) + |f(x)| \leq 2|f(x)|$. Or $f + |f|$ est CPM, positive, et $\displaystyle\int_I 2f$ converge, donc par comparaison, $\displaystyle\int_I f + |f|$ CV, et donc $\displaystyle\int_I f$ CV.

Vocabulaire f est **intégrable** sur I ssi $\displaystyle\int_I f$ est **absolument convergente**.

Remarque Si f est positive, elle est intégrable sur I ssi son intégrale est convergente.

Exemple $t \mapsto 1/t^2$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Intégrales semi-convergentes

Remarque Une intégrale peut converger sans être absolument convergente. Elle est alors semi-convergente.

Exemple $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$ est semi-convergente.

Remarque Attention ! $\displaystyle\int_I f$ converge ne signifie pas f intégrable sur I. Par exemple, $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Domination par une fonction intégrable

Proposition (domination) Si f est CPM sur $[a, b[$ et dominée au voisinage de b par une fonction g intégrable sur $[a, b[$, alors f est intégrable sur $[a, b[$.

Démonstration $f = O(g) \Leftrightarrow |f| = O(|g|)$, donc par comparaison $\displaystyle\int_I |f|$ converge.

Exemple $f(t) = \dfrac{\sin(t)}{t^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$ et $|f(t)| \leq 1/t^2$

Remarque

1. En particulier, le résultat s'applique si $f \geq g$, si $f = o(g)$, si $f \leq g$ ou si $f \sim g$.
2. Dans la pratique, on écrit la domination de $|f|$ par une fonction positive.

Exemple $f(t) = \ln(1 + \dfrac{sin(t)}{\sqrt{t}})$. Convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$. Intégrabilité de f ?

Propriétés algébriques

Proposition L'ensemble $L^1_m(I)$ des fonctions cpm intégrables sur I est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Démonstration La fonction nulle est intégrable.
Si f et g sont intégrables et $\alpha \in \mathbb{K}$, alors $|f + \alpha g| \leq |f| + |\alpha| \cdot |g|$ donc, par domination, $f + \alpha g$ est intégrable.

Exemples

1. Si f cpm sur le segment $[a,b]$ (intégrale ordinaire) alors f est intégrable (car f bornée sur le segment, donc dominée).
2. Inégalité de la moyenne : si f est cpm bornée sur l'intervalle borné $]a,b[$, alors f est intégrable et $\left|\int_a^b f\right| \leq (b-a)\sup_{]a,b[}|f|$.
3. Intégrales de Bertrand. La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha |\ln(t)|^\beta}$ est intégrable :
   sur $[e,+\infty[$ si $\alpha > 1$ [prendre $\beta \in]1,\alpha[$ et $t^\beta f(t) \to 0$] ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$ [utiliser une primitive].
   sur $]0, \dfrac{1}{e}]$ si $\alpha < 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta < 1$.
4. Intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^\alpha}\,dt$: convergence absolue si $\alpha > 1$, semi-convergence si $0 < \alpha \leq 1$ (ipp), divergence sinon.
5. Intégrales de Fresnel. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{it^2}\,dt$ est convergente (ipp sur $[1,+\infty[$) mais $|e^{it^2}| = 1$ donc $t \mapsto e^{it^2}$ n'est pas intégrable.

Fonctions de carré intégrable

Définition Si f est CPM sur I, f est de carré intégrable ssi f^2 est intégrable.
Remarque Carré intégrable n'implique pas intégrable ! ! !
exemple 1 : $f(t) = \dfrac{1}{t}$ sur $[1, +\infty[$ (est L^2 mais pas L^1).
exemple 2 : f définie par des triangles de base $[n, n + \dfrac{2}{n^3}]$ et de hauteur n (donc d'aire $\dfrac{1}{n^2}$). Alors f est L^1 mais pas L^2 (la somme des aires revient à calculer la somme de la série $\sum \dfrac{1}{n}$). exemple 3 : $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ sur $]0, 1]$ (L^1 mais pas L^2).
exemple 4 : triangles de base $[1/(n+1), 1/n]$, de hauteur n (f est L^2 mais pas L^1 sur $]0, 1]$).

Propriétés algébriques

Proposition L'ensemble $L^2_m(I)$ des fonctions cpm de carré intégrable est un espace vectoriel.

Démonstration Soient f et g de carrés intégrables et $\alpha \in \mathbb{K}$. $\alpha.f$ est clairement de carré intégrable et $|f+g|^2 \leq 2(|f|^2 + |g|^2)$, donc par majoration $|f+g|^2$ est intégrable, cqfd.

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Proposition (Inégalité de Cauchy-Schwarz) Si f et g sont de carré intégrable, alors fg est intégrable et :

$$\left|\int_I fg\right| \leq \int_I |fg| \leq (\int_I |f|^2)^{\frac{1}{2}} (\int_I |g|^2)^{\frac{1}{2}}$$

Démonstration $2|fg| \leq |f|^2 + |g|^2$ donc fg intégrable sur I. Il suffit ensuite d'écrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur un segment puis de passer à la limite.
Exemple Soit f de carré intégrable positive sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt = O(\sqrt{x})$.
SOL Appliquer l'inégalité de Cauchy-S sur $[0, x[$ à $f \times 1$.
NB : on obtient un petit o en utilisant x_0 assez grand pour que le reste soit majoré par $\varepsilon > 0$ et on majore $\displaystyle\int_{x_0}^x f$ par $\varepsilon\sqrt{x}$. Pour x assez grand, $\displaystyle\int_0^{x_0} f \leq \varepsilon\sqrt{x}$, d'où majoration par $2\varepsilon\sqrt{x}$.