

Ex. 1 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0$. Montrer qu'il existe $A, B \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P = A^2 + B^2$.

Ex. 2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer $\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$.

Ex. 3 Soit P un polynôme unitaire de $\mathbb{R}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que P est scindé sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\forall z \in \mathbb{C}, |P(z)| \geq |\operatorname{Im} z|^n$.

Ex. 4 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n = (X^2 - X + 1)^n - X^{2n} + X^n - 1$. Déterminer les valeurs de n pour lesquelles $X^3 - X^2 + X - 1$ divise P_n et donner le reste de la division euclidienne dans les autres cas.

Ex. 5 Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $P_k(X) = (X - 1)^k (X + 1)^k$. Montrer que $(P_0, \dots, P_n)$ est une famille libre. Trouver les racines de $\sum_{k=0}^n P_k$.

Ex. 6 Soit $P_k(X) = X^k(1 - X)^{n-k}$

a) Montrer que $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. b) Décomposer $Q(X) = \frac{d}{dX}(X^n(1 - X)^n)$ dans cette base.

Ex. 7 Pour $d \in \mathbb{N}$, on pose $\binom{X}{d} = \frac{X(X-1)\cdots(X-d+1)}{d!}$. Soit Δ l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ défini par $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$.

a) Déterminer $\operatorname{Ker} \Delta$ et $\Delta(\binom{X}{d})$ pour tout $d \in \mathbb{N}$.

b) Soit $P \in \mathbb{R}_d[X]$ tel que $\forall n \in \mathbb{Z}, P(n) \in \mathbb{Z}$. Montrer qu'il existe $(c_0, \dots, c_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ tel que :

$$P = c_0 \binom{X}{d} + c_1 \binom{X}{d-1} + \cdots + c_{d-1} \binom{X}{1} + c_d$$

c) Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $\forall n \in \mathbb{Z}, P(n) \in \mathbb{Z}$.