Droites stables

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. **Proposition** Soit $u \in L(E)$. Soit $x \in E$ non nul. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. x est vecteur directeur d'une droite stable par u.
2. Il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$.
3. Il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $x \in \mathrm{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{Id})$.

Vecteurs propres, valeurs propres

Définition

1. $\lambda \in \mathbb{K}$ est une **valeur propre** de u ssi il existe $x \neq 0$ tel que $u(x) = \lambda x$.
2. x est alors un **vecteur propre** de u associé à λ.
3. $E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{Id}) = \{x \in E | u(x) = \lambda x\}$ est le **sous-espace propre** (SEP) associé à λ.
4. L'ensemble des valeurs propres de u est son **spectre**, noté : $\mathrm{Sp}(u)$

Remarque S'il n'y a pas d'ambiguïté, on note E_λ pour $E_\lambda(u)$.

Remarques

1. Si u n'est pas injectif, $\operatorname{Ker} u = E_0(u)$.
2. u induit sur E_λ une homothétie (de rapport λ).
3. Les éléments **non nuls** de E_λ sont les vps associés à λ.
4. $\lambda \in \mathbb{K}$ est une **valeur propre** de u ssi $\operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{Id}) \neq \{0\}$.
5. Une vap est associée à une infinité de veps, un vep est associé à une vap et une seule.
6. S'il est non nul, le noyau de u est le sous-espace propre associé à 0 (en particulier, u est bijectif ssi 0 n'est pas valeur propre).
7. En dimension finie=n, $\dim E_\lambda(u) = n - \operatorname{rg}(u - \lambda \operatorname{Id})$.

Exemples

1. Si h est l'homothétie de rapport k. k est valeur propre de h et tout $x \neq 0$ est vecteur propre. $(E = E_k(h))$
2. 1 et -1 sont les vaps d'une symétrie (non triviale). $(E = E_1(s) \oplus E_{-1}(s))$
3. 1 et 0 sont les vaps d'un projecteur (non trivial). $(E = E_0(p) \oplus E_1(p))$
4. $E = C^\infty(\mathbb{R})$, et $u : f \mapsto f'$. Tout réel λ est vap, les vecteurs propres associés étant $t \mapsto Ke^{\lambda t}$, $K \neq 0$.
5. $E = \mathbb{K}[X]$ et $u : P \mapsto P'$. Seul 0 est vap, et les vps associés sont les polynômes de degré 0.
6. $P \mapsto XP$ n'a pas de valeur propre dans $\mathbb{K}[X]$.
7. Dans $\mathbb{R}^2$, la rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ n'a pas de valeur propre (pas de droite stable).

Les SEP sont en somme directe

Théorème Soit $p \geq 2$. Si λ_1, λ_2, ..., λ_p sont p valeurs propres 2 à 2 distinctes de $u \in L(E)$, alors les SEP associés sont en somme directe.
Démonstration Par récurrence sur p.

Conséquences

1. Des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont indépendants (en part, un vep ne peut être associé à 2 vaps distinctes).
2. Si $\dim E = n$, u admet au plus n valeurs propres.

Remarque Les SEPs sont toujours en somme directe mais ne sont pas toujours supplémentaires (cf les exemples ci-dessus).

Endomorphismes qui commutent

Proposition Si u et v commutent, les SEPs de u sont stables par v.
Démonstration $u - \lambda \, \mathrm{Id}$ et v commutent.
Cas particulier Les SEPs de u sont stables par u. La restriction de u à $E_\lambda(u)$ est une homothétie de rapport λ.

Valeurs propres de $P(u)$

Lemme Si $P \in \mathbb{K}[X]$ et $u(x) = \lambda x$, alors $P(u)(x) = P(\lambda)x$.
Démonstration On constate $u^k(x) = \lambda^k x$, cqfd.
Réciproque fausse si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ Considérer la rotation de $\mathbb{R}^2$ d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. $u^4 = \mathrm{Id}$ alors que u n'admet aucun vecteur propre !

Les valeurs propres sont racines des polynômes annulateurs

Conséquence Si P est annulateur de u, alors toute vap de u est racine de P.
(Réciproque fausse : toutes les racines de P ne sont pas néc. valeurs propres !)
Démonstration La seule vap de $P(u) = 0$ est clairement 0 !
Cependant, les polynômes annulateurs de u formant un idéal, on peut facilement fabriquer des poynômes annulateurs ayant des racines arbitraires. (P annulateur $\Rightarrow (X - a)P$ annulateur.)

Exemple des endomorphismes nilpotents

Exemple Si u est nilpotent, alors $\mathrm{Sp}(u) = \{0\}$.
Remarque Réciproque fausse ! ex : $P \mapsto P'$ dans $\mathbb{K}[X]$ ou $f \circ p$, avec p projecteur orthogonal sur le plan P, f la rotation d'axe $D = P^{\perp}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
La seule droite stable est D, noyau de $f \circ p$, donc 0 est l'unique vap.

Identification canonique

Dans la suite, les espaces vectoriels sont de dimension finie.
On identifie canoniquement les matrices colonnes (de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$) aux éléments de $\mathbb{K}^n$ et la matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et l'endormorphisme $X \mapsto AX$.

Définitions dans le cas d'une matrice

Définition Soit $A \in \mathscr{M}_(n)(\mathbb{K})$. La matrice colonne $X \neq 0$ (identifiée canoniquement à un élément de $\mathbb{K}^n$) est un vp associé à la vap $\lambda \in \mathbb{K}$ ssi $AX = \lambda X$. Le SEP associé à λ est :

$$E_\lambda(A) = \{X \in \mathbb{K}^n | AX = \lambda X\}$$

Le spectre de A est l'ensemble de ses valeurs propres.

Propriétés

- Les SEPs de A sont en somme directe.
- A admet au plus n vaps.
- Si P est annulateur de A, les vaps de A sont racines de P.

Remarque Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. A n'admet aucune valeur propre réelle ($X^2 + 1$ est annulateur). En revanche, $E_i(A) = \mathrm{Vect}((1, -i))$ et $E_{-i}(A) = \mathrm{Vect}((1, i))$. On distinguera si nécessaire $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{-i, i\}$.

Matrices de rang 1

Exemple Soit A une matrice de rang 1 vps ? vaps ? Montrer que A est nilpotente ssi $\mathrm{Tr}(A) = 0$.

Matrices de rang 1

Exemple Soit A une matrice de rang 1 vps ? vaps ? Montrer que A est nilpotente ssi $\mathrm{Tr}(A) = 0$. Poser $A = CL$. $\mathrm{Tr}(A) = LC$ et $A^2 = \mathrm{Tr}(A)A$. $X(X - \mathrm{Tr}(A))$ est annulateur. Si $\mathrm{Tr}(A) = 0$, A est nilpotent. $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(L)$. Si $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$, SEP associé $\mathrm{Vect}(C) = \mathrm{Im}(A)$.

Polynôme caractéristique

Définitions On pose $\chi_A : t \in \mathbb{K} \mapsto \det(A - tI_n)$.

1. C'est une application polynomiale. Le polynôme associé est appelé **polynôme caractéristique** de A.
2. La **multiplicité** $m(\lambda)$ de la valeur propre λ est sa multiplicité en tant que racine de χ_A.

Proposition λ est valeur propre de A ssi elle est racine du polynôme caractéristique.

Démonstration Il existe $X \neq 0$ tel que $AX = \lambda X$ ssi $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) \neq \{0\}$ ssi l'endomorphisme associé à $A - \lambda I_n$ n'est pas injectif, ssi $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible, ssi $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

Proposition A et ${}^tA$ ont le même polynôme caractéristique. En particulier, elles ont les mêmes valeurs propres avec les mêmes multiplicités (mais pas les mêmes SEP en général !)

Exemples de calculs

Exemple Matrice triangulaire

Exemple (calcul pratique en dimension 3). $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Matrice compagnon

Exemple (Matrice de Frobénius). Polynôme caractéristique de

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Cette matrice représente f telle que $f(e_k) = e_{k+1} \dots$
(on a $\chi_A(t) = (-1)^n(t^n - a_{n-1}t^{n-1} - \cdots - a_0)$.)
NB : $A - \lambda I_n$ admet $n-1$ lignes indépendantes, donc les SEPS de A sont de dimension 1.

Coefficients du polynôme caractéristique

Proposition (coefficients)
$\chi_A(X) = (-1)^n(X^n - \mathrm{Tr}(A)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A))$
Démonstration Posons $A = (C_1|\cdots|C_n)$ et $I_n = (U_1|\cdots|U_n)$. Alors $\chi_A(\lambda) = \det(C_1 - \lambda U_1, \cdots, C_n - \lambda U_n)$. En développant par multilinéarité :

$$\chi_A(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} (-\lambda)^k \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n} \det(A_{j_1,\cdots,j_k})$$

où $A_{j_1,\cdots,i_k}$ est la matrice obtenue à partir de A en remplaçant les colonnes j_1, ..., j_k par U_{j_1}, ..., U_{j_k}. On reconnaît le coefficient dominant $(-1)^n$, le coefficient du degré $n-1$: $\mathrm{Tr}(A)$, le coefficient constant : $\det(A)$.
Cas particulier Si $n = 2$, $\chi_A = X^2 - \mathrm{Tr}(A)X + \det(A)$.

Trace et déterminant en fonction des valeurs propres

Proposition $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ admet *au plus n* valeurs propres, comptées avec multiplicité (i.e., une vap d'ordre p est comptée p fois).

Conséquence Si χ_A est scindé, $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{\lambda \in \mathbf{Sp}(A)} m(\lambda) \cdot \lambda$. et

$$\det(A) = \prod_{\lambda \in \mathbf{Sp}(A)} \lambda^{m(\lambda)}.$$

Ces formules s'appliquent toujours lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Exercice 1 En particulier, apcr, la matrice $A_k = A - \frac{1}{k} I_n$ est inversible. (Toute matrice est limite -terme à terme- d'une suite de matrices inversibles).

Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique

Proposition Si A et A' sont semblables, alors $\chi_A = \chi_{A'}$.
Démonstration Soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $A = PA'P^{-1}$. Pour tout t,

$$\det(A - tI_n) = \det(P(A' - tI_n)P^{-1} = \det(A' - tI_n)$$

cqfd

Remarque Réciproque fausse : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ont même polynôme caractéristique mais ne sont pas semblables.
Exercice 2 $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ si A et $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On commencera par le cas A inversible.

Multiplicité et dimension du SEP

Conséquence On appelle polynôme caractéristique de u le polynôme caractéristique de sa matrice dans une base quelconque. Les racines de χ_u sont exactement les vaps de u. On définit $\mathrm{Sp}(u)$ l'ensemble des vaps de u, $m(\lambda)$ la multiplicité de ses valeurs propres.

Proposition Pour toute valeur propre de u :

$$1 \leq \dim E_\lambda(u) \leq m(\lambda)$$

Démonstration La première inégalité vient de la définition ($E_\lambda(u) \neq \{0\}$). Notons n_k la dimension de $E_{\lambda_k}(u)$. Dans une base adaptée aux SEPs de u, u admet une matrice triangulaire par blocs donc la « diagonale » s'écrit :

$$\mathrm{diag}(\lambda_1 I_{n_1}, \cdots, \lambda_p I_{n_p}, B)$$

(où B est un bloc carré). Il vient :

$$\chi_u(t) = (\lambda_1 - t)^{n_1} \cdots (\lambda_p - t)^{n_p}.\chi_B(t)$$

On constate $m(\lambda_k) \geq n_k$, cqfd.

Algorithme de Leverrier

Compléments Pour montrer l'existence de la planète Neptune, Leverrier doit résoudre un système différentiel linéaire de 14 équations à 14 inconnues. La résolution passe par le calcul du polynôme caractéristique de la matrice du système, élément de $\mathscr{M}_{14}(\mathbb{R})$.
Si on calcule « naïvement » le polynôme, on doit effectuer 14! opérations (env. 100 milliards). C'est un peu trop, surtout au XIX -ième siècle.

Principe : En supposant que la matrice admet 14 valeurs propres 2 à 2 distinctes dans $\mathbb{C}$, alors $\mathrm{Tr}(A^k) = \sum_{i=1}^{14} \lambda_i^k$ (pourquoi ?)

Principe : En supposant que la matrice admet 14 valeurs propres 2 à 2 distinctes dans $\mathbb{C}$, alors $\mathrm{Tr}(A^k) = \sum_{i=1}^{14} \lambda_i^k$ (pourquoi ?)

Leverrier calcule les traces des matrices A^k, $k = 0..13$. complexité $O(n^4)$: n produits de matrices (n, n), chaque coefficient occasionne $2n$ opérations environ, le calcul de la trace étant négligeable. (ici $n = 14$).

Il applique les *formules de Newton*, qui donnent des relations entre les coefficients et les sommes des puissances k-ème des racines d'un polynôme.

Exemple Pour $P(X) = aX^2 + bX + c$, si λ_1 et λ_2 sont les racines, $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = (\lambda_1 + \lambda_2)^2 - 2\lambda_1\lambda_2 = (b^2 - 2c)/a^2$.

Ainsi, il "suffit" de résoudre un système de 14 équations à 14 inconnues, donc environ $14^2/2$ opérations (négligeable devant n^4).

Finalement, une complexité de l'ordre de n^4 (env. 40000 opérations).

Recherche d'hyperplans stables

Soit A la matrice de f. Les hyperplans sont les noyaux de formes linéaires non nulles, on cherche donc les matrices-lignes non nulles L qui vérifient : $LX = 0 \Rightarrow LAX = 0$, c'est-à-dire $\mathrm{Ker}(L) \subset \mathrm{Ker}(LA)$. Comme ce sont des matrices lignes (matrices de formes linéaires), on en déduit la CNS : il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tq $LA = \lambda L$, soit, en transposant : ${}^tA.{}^tL = \lambda {}^tL$.
Conclusion : il suffit de chercher les vecteurs propres de ${}^tA$.

Endomorphismes ou matrices diagonalisables

Théorème Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. il existe une base B dans laquelle $M_B(u)$ est diagonale
2. il existe une base de vecteurs propres
3. les SEPs de u sont supplémentaires
4. la somme des dimensions des SEP est égale à $\dim E$ (NB : $\geq \dim E$ convient).

Définition Si l'une de ces conditions est vraie, alors $u \in L(E)$ est **diagonalisable**.

Définition A est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale (i.e., l'endo canoniquement associé est diagonalisable).

Proposition u est diagonalisable ssi il existe des supplémentaires F_1, ..., F_p tels que u induise une homothétie sur chaque F_i.

Projecteurs spectraux

Proposition Si u est diagonalisable, on associe à chaque $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ le projecteur sur $E_\lambda(u)$ de direction $\bigoplus_{\mu \neq \lambda} E_\mu(u)$. Alors $u = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \lambda p_\lambda$.

Remarque On constate $u^k = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \lambda^k p_\lambda$.

On en déduit : si $L_1, \dots, L_p$ sont les polynômes de Lagrange associés aux valeurs propres, $L_i(u) = p_{\lambda_i}$, c-à-d que ces projecteurs sont des polynômes en u.

CNS de diagonalisabilité

Proposition Si χ_u scindé, alors u est diagonalisable ssi $m(\lambda) = \dim E_\lambda(u)$ pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$.
Remarque On l'applique en particulier si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

CS de diagonalisabilité

Proposition (Condition suffisante de diagonalisabilité) Si χ_u (resp. χ_A)est scindé **à racines simples**, alors u (resp. A) est diagonalisable.
Démonstration On a pour toute vap λ : $1 \leq \dim E_\lambda(u) \leq m(\lambda) = 1$, donc $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim E_\lambda(u) = \dim E$, cqfd.
Remarque Réciproque fausse, par ex Id a pour polynôme caractéristique $(1-X)^n$.

CNS de diagonalisabilité

Proposition Les trois conditions sont équivalentes :

1. u est diagonalisable
2. $P(X) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)$ est annulateur de u
3. u admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.

Démonstration (1) $\Rightarrow$ (2) : les endomorphismes $u - \lambda_i \,\mathrm{Id}$ commutent deux à deux, donc si $x \in E_{\lambda_i}(u)$, alors $P(u)(x) = \prod_{j \neq i}(u - \lambda_j \,\mathrm{Id}) \circ (u - \lambda_i \,\mathrm{Id})(x) = 0$, le résultat est donc vrai pour tout $x \in E$ puisque les SEP sont supplémentaires.
(2) $\Rightarrow$ (3) : clair.

(suite...)

(3) $\Rightarrow$ (1) : Par récurrence sur $m = \deg P$, montrons que si u est un endomorphisme de dimension finie qui annule P polynôme scindé à racines simples, alors u est diagonalisable.
Si $m = 1$, alors $u - \lambda_1 \operatorname{Id} = 0$, donc u est une homothétie.
Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Supposons le résultat vrai pour tout polynôme de degré m. Soit P scindé, à racines simples, de degré $m+1$, annulateur d'un endomorphisme u.
D'après le théorème du rang,

$$\dim E = \dim \operatorname{Ker}(u - \lambda_{m+1} \operatorname{Id}) + \dim \operatorname{Im}(u - \lambda_{m+1} \operatorname{Id})$$

Or u induit sur $\operatorname{Im}(u - \lambda_{m+1} \operatorname{Id})$ un endomorphisme v. v admet comme polynôme annulateur $\displaystyle\prod_{i=1}^{m}(X - \lambda_i)$, donc par hypothèse de récurrence,
$\operatorname{Im}(u - \lambda_{m+1} \operatorname{Id}) = \bigoplus_{i=1}^{m} \operatorname{Ker}(v - \lambda_i)$. Clairement
$\operatorname{Ker}(v - \lambda_i \operatorname{Id}) \subset \operatorname{Ker}(u - \lambda_i \operatorname{Id})$, on en déduit :

$$\sum_{i=1}^{m+1} \dim \operatorname{Ker}(u - \lambda_i) \geq \dim E$$

cqfd.

Polynômes annulateurs d'un endomorphisme diagonalisable

Remarque Lorsque u est diagonalisable, $P(X) = \prod_{\lambda \in \mathbf{Sp}(u)} (X - \lambda)$ engendre l'idéal des polynômes annulateurs de u.

Exercice

Exercice 3 Soit $M \begin{pmatrix} A & A \\ O & A \end{pmatrix}$. CNS sur A pour que M soit diagonalisable ?

Exercice

Exercice 3 Soit $M \begin{pmatrix} A & A \\ O & A \end{pmatrix}$. CNS sur A pour que M soit diagonalisable ?

Si P annulateur SRS de M, alors P et XP' sont annulateurs de A, donc A est DZ et ses valeurs propres sont racines de P et de XP', donc de X (car P' et P n'ont aucune racine commune). D'où $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$ et comme A est DZ, $A = 0$. Réciproque claire.

Exemples

Exemples

1. A définie par $a_{ij} = 1$: $A^2 = nA$, donc A dz...
2. A circulante. $A = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k$. J tel que $J_{1n} = 1$, $J_{i+1,i} = 1$, et $J_{ij} = 0$ sinon....En déduire $\det(A)$.

Sous-espaces stables

Conséquence Soit $u \in L(E)$, et F un sev de E stable par u. Si u est DZ, alors sa restriction à F est DZ.
Démonstration Un polynôme scindé à racines simples annule u, donc sa restriction.

Sous-espaces stables

Conséquence Soit $u \in L(E)$, et F un sev de E stable par u. Si u est DZ, alors sa restriction à F est DZ.
Démonstration Un polynôme scindé à racines simples annule u, donc sa restriction.
Conséquence Si u et $v \in L(E)$ commutent et sont diagonalisables, alors on peut les diagonaliser dans la même base.
Démonstration Les SEPS de u sont stables par v. Or chaque SEP de u est stable par v, donc la restriction de v y est diagonalisable. On fixe une base de diagonalisation de v sur chacun de ces sevs. Leur réunion est une base de vecteurs propres pour u et pour v.

Théorème spectral

Théorème (Théorème spectral) Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable. (admis, démontré dans le cours d'algèbre bilinéaire.)

Endomorphismes ou matrices trigonalisables

Définition $u \in L(E)$ est **trigonalisable** si et seulement s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure.
Définition $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable ssi elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Exercice 3 Un endomorphisme u ou une matrice A est trigonalisable ssi leur polynôme caractéristique est scindé.

Démonstration Le sens direct est évident. La réciproque se démontre par récurrence. On va montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si $n = \dim E$ et $u \in L(E)$ ou si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, alors si leur polynôme caractéristique est scindé, u et A sont trigonalisables.

Si $n = 1$, résultat clair. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose le résultat vrai si $\dim E = n$.

Supposons maintenant $\dim E = n + 1$. Soit $u \in L(E)$. χ_u est scindé, donc u admet un vecteur propre e_1 associé à une vap λ_1. Avec le T.B.I, on se donne une base $(e_1, ..., e_{n+1})$ de E, dans laquelle la matrice est triangulaire par blocs :

$$A = M(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & L \\ 0 & M_1 \end{pmatrix}$$

On constate $\chi_A = (X - \lambda_1)\chi_{M_1}$ donc χ_{M_1} est scindé.

$M_1 \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ donc par hypothèse de récurrence, il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que $M_1 = PTP^{-1}$, T étant triangulaire supérieure.

La matrice $Q = \mathrm{diag}(1, P)$ est inversible et

$$Q^{-1}M(u)Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & L' \\ 0 & T \end{pmatrix}$$

donc u est trigonalisable.

Cas particulier $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Conséquence Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, tout endomorphisme (en dimension finie) et toute matrice est trigonalisable.

Exercice 4 Si χ_u est scindé, $\mathrm{Tr}(u^k) = \sum_{\lambda} m(\lambda)\lambda^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Le polynôme caractéristique est annulateur

Théorème (Cayley-Hamilton) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On a : $\chi_u(u) = 0$.
De même, si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\chi_A(A) = 0$.
Démonstration Soit x un vecteur non nul. Comme E est de dimension finie, il existe m maximal tel que $(x, u(x), ..., u^{m-1}(x))$ soit libre. On a en particulier $u^m(x) = a_0 x + ... + a_{m-1} u^{m-1}(x) = Q(u)(x)$ (les coeffs sont non tous nuls). Dans une base adaptée à $F = \mathrm{Vect}(x, u(x), ..., u^{m-1}(x)$, la matrice de u est triangulaire par blocs, le premier bloc diagonal étant une matrice de Frobénius (ou compagnon), dont le polynôme caractéristique est $(-1)^m(X^m - Q(X))$. En calculant les déterminants par blocs, on voit $(X^m - Q(X))$ divise χ_u. Or $u^m(x) - Q(u)(x) = 0$, ce qui entraîne $\chi_u(u)(x) = 0$.
On a montré $\chi_u(u) = 0$.

Exemple Montrer que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente ssi $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{Tr}(A^k) = 0$.

Exemple Montrer que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente ssi $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{Tr}(A^k) = 0$.
Si A est nilpotente, alors A^k aussi et son polynôme caractéristique est $(-X)^n$, donc $\mathrm{Tr}(A^k) = 0$.
La réciproque se fait par récurrence en justifiant $\ker(A) = 0$ puis en utilisant une matrice triangulaire par blocs semblable à A.

Puissances d'une matrice

Exemple Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. On veut calculer A^n. On diagonalise :
$\mathrm{Sp}(A) = \{2, 3\}$ donc A DZ. $E_2(A) = \mathrm{Vect}(1, 2)$ et $E_3(A) = \mathrm{Vect}(1, 1)$.
$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
Il vient $A^n = P \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} P^{-1}$.

Exemple Généralisation avec une matrice trigonalisable...

Remarque Cas particulier : si D est diagonalisable, N nilpotente, et $ND = DN$, alors

$$(D + N)^p = \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k} D^{p-k} N^k$$

Récurrence double

Exemple Déterminer les suites u, v telles que :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 4v_n \\ v_{n+1} = u_n + v_n \end{cases}$$

$E_3 = \mathrm{Vect}(2,1)$, $E_{-1} = \mathrm{Vect}(-2,1)$.

Puissance d'une matrice avec un polynôme annulateur

Soit A une matrice, et P un polynôme annulateur, on écrit la division euclidienne :

$$X^k = P(X) \cdot Q(X) + R_k(X)$$

Aors $A^k = R_k(A)$. Si l'ordre de A n'est pas trop grand, on peut choisir $P = \chi_A$ et calculer facilement les coefficients de R_k.

Exemple : théorème ergodique

Exemple automate fini à 3 états, avec la matrice de transitions :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

(p_{ij}= probabilité de passer de l'état i à l'état j.)
utiliser la trace pour trouver la vap $-1/2$.
rq : $E_0 = \mathrm{Vect}(1,-1,0)$, $E_1(A) = \mathrm{Vect}(1,1,1)$, $E_{-1/2}(A) = \mathrm{Vect}(-1,2,1)$.
On calcule $\mathbb{R}_k$ pour $X^k = X(X-1)(X+1/2)Q_k(X) + R_k(X)$.
On montre $A^k = a_k A^2 + b_k A$ avec $a_k \to 2/3$ et $b_k \to 1/3$, et on en déduit que
$A^k \to 2/3A^2 + 1/3A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
et donc $(p,q,r)\cdot A^k \to (1/3,1/3,1/3)$ (th. ergodique : les conditions initiales n'interviennent pas).

Suites vérifiant une relation de récurrence linéaire

Théorème L'ensemble E des suites complexes u telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+p} = a_0 u_n + a_1 u_{n+1} + \cdots + a_{p-1} u_{n+p-1}$$

avec $a_0 \neq 0$, est un sev de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, de dimension p.
Démonstration E est clairement un sev de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et l'application E : $u \mapsto (u_0, \cdots, u_{p-1})$ est un isomorphisme de E sur $\mathbb{K}^p$, cqfd.

Détermination pratique

Posons $X_n = {}^t(u_n, \cdots, u_{n+p-1})$ et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_{p-1} \end{pmatrix}$$

Alors $X_{n+1} = AX_n$ et donc $X_n = A^n X_0$. Supposons $A = P\Delta P^{-1}$, et posons $Y_n = P^{-1}X_n$. Il vient : $Y_n = \Delta^n Y_0$ (changement de base), et finalement :

$$X_n = P\Delta^n Y_0$$

On voit tout l'intérêt de la manœuvre si A est diagonalisable. Or, le polynôme caractéristique de A est :

$$\chi_A(X) = (-1)^n(X^n - \sum_{k=0}^{p-1} a_k X^k)$$

Remarque Les $n-1$ dernières colonnes de A sont échelonnées, donc indépendantes, donc les SEPS de A sont de dimension 1. Ainsi, A est diagonalisable ssi A admet n vaps distinctes. Or, (ASTUCE !) si $V = {}^t(v_0, \ldots, v_{n-1})$ est vep de A, alors en particulier :

$$\begin{cases} v_1 = \lambda v_0 \\ v_2 = \lambda v_1 \\ \vdots \\ v_{n-1} = \lambda v_{n-2} \end{cases}$$

on constate $v_0 = 0 \Rightarrow v_1 = v_2 = \cdots = v_{n-1} = 0$, contradiction. Si A est diagonalisable, on peut donc imposer $v_0 = 1$, et donc chosir P de sorte que la première ligne de P soit $(1 \cdots 1)$. u_n est alors la somme des coordonnées de $\Delta^n Y_0$, donc de la forme $u_n = \sum_{i=1}^{n} C_i \lambda_i^n$.

Suites complexes récurrentes linéaires d'ordre 2

Théorème Soit (u_n) une suite complexe telle que $u_{n+2} = a_1 u_{n+1} + a_0 u_n$. ($a_1$, $a_0 \in \mathbb{C}$ et $a_0 \neq 0$.)
Soit $X^2 - a_1 X - a_0 = 0$ son équation caractéristique et Δ son discriminant.

1. Si $\Delta \neq 0$, il existe deux racines $\alpha \neq \beta$ et $u_n = C_1 \alpha^n + C_2 \beta^n$.
2. Si $\Delta = 0$, il existe une racine double α et $u_n = C_1 \alpha^n + C_2 n \alpha^n$.

Démonstration On cherche les racines de $\chi_A(X) = X^2 - a_1 X - a_0$. Si $\Delta \neq 0$, il y a deux racines complexes $\alpha \neq \beta$, et $X_n = P\,\mathrm{diag}(\alpha^n, \beta^n) Y_0$. On choisit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$, il vient $u_n = C_1\alpha^n + C_2\beta^n$.
Si $\Delta = 0$, il y a une racine double α, non nulle car, par hypothèse, $a_0 \neq 0$. A n'est pas diagonalisable car sinon elle serait déjà égale à αI_2, donc semblable à $T = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$.
On constate $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha^2 & 2\alpha \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & 1+\alpha \end{pmatrix}$ convient. Or $T^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1} \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix}$. De là, $X_n = PT^nY_0$ et $u_n = C_1\alpha^n + C_2 n\alpha^n$.

Cas des suites réelles

Corollaire Soit (u_n) une suite réelle telle que $u_{n+2} = a_1 u_{n+1} + a_0 u_n$.($a_1$, $a_0 \in \mathbb{C}$ et $a_0 \neq 0$.)
Soit $X^2 - a_1 X - a_0 = 0$ son équation caractéristique et Δ son discriminant.

1. Si $\Delta > 0$, il existe deux racines réelles $\alpha \neq \beta$ et $u_n = C_1\alpha^n + C_2\beta^n$.
2. Si $\Delta = 0$, il existe une racine double α et $u_n = C_1\alpha^n + C_2 n\alpha^n$.
3. Si $\Delta < 0$, deux racines imaginaires conjuguées $re^{i\theta}$ et $re^{-i\theta}$ et $u_n = r^n(C_1\cos(n\theta) + C_2\sin(n\theta))$.

Démonstration Il suffit de remarquer que $u_n = \mathrm{Re}(u_n)$ et appliquer le théorème.