Séries numériques

PSI*

Lycée Claude Bernard

1er octobre 2012

1.- Suites des sommes partielles

Définition Soit (u_n) une suite de $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

La série $\sum u_n$ est **convergente** si la suite des **sommes partielles** $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ est convergente.

Si $\sum u_n$ est convergente, la limite de (S_n) est la **somme** de la série $\sum u_n$. On la note $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

Si (S_n) diverge, on dit que la série $\sum u_n$ est **divergente**.

Vocabulaire u_n est le **terme général** de la série $\sum u_n$.

Exemples importants

Exemple Séries géométriques.

Si $q \neq 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ et si $q = 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = n+1$. Ainsi, la série est convergente ssi $|q| < 1$. Dans ce cas :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$$

Exemple Série harmonique.

$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. S_n est croissante et $S_{2n} - S_n \geq \dfrac{1}{2}$ donc S_n diverge et tend vers $+\infty$.

Remarque $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n}{k^2+n^2}$ n'est pas la somme partielle d'une série....

Remarque (Troncature). Si on modifie un nombre fini de termes, on ne change pas la **nature** (convergente ou divergente) de la série.
En revanche, sa **somme** est modifiée. On notera $\sum_{n \geq n_0} u_n$ une série indexée à partir de n_0 et $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ sa somme.
Dans ce cours, on suppose que les séries sont a priori définies sur $\mathbb{N}$.

Suite des restes

Définition Soit $\sum u_n$ une série *convergente*, de somme S.

Pour tout n, la série $\sum\limits_{k\geq n} u_k$ converge et on peut définir les **restes** de la série :

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

Proposition On a $R_n = S - S_n$ donc $R_n \to 0$.

Remarque Il faut d'abord vérifier la convergence de la série pour pouvoir définir ses restes.

Téléscopages

Proposition (équivalence suite/série) Soit (v_k) une suite. (v_k) converge ssi la série $\sum v_k - v_{k-1}$ converge.

Exemple Séries "téléscopiques".

1. $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1.$$
2. $$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Arctan} \frac{1}{k^2+k+1} = \sum_{k=1}^{n} (\operatorname{Arctan} \frac{1}{k} - \operatorname{Arctan} \frac{1}{k+1}) \to \frac{\pi}{4}.$$

Divergence grossière

Proposition Si la série $\sum u_n$ converge, alors u_n tend vers 0. Par contraposée : Si u_n ne tend pas vers 0, alors $\sum u_n$ diverge **grossièrement**.

Démonstration Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $u_n = S_n - S_{n-1} \to S - S = 0$.

Exemples

1. $\sum (\sin n)$ diverge grossièrement.
2. Attention, réciproque fausse ! ! ! Par ex., $\dfrac{1}{n} \to 0$ mais $\sum \dfrac{1}{k}$ diverge.

Comment calculer la somme d'une série ?

Dans la pratique, il est **rare** de pouvoir calculer explicitement une somme.
On se contente souvent de **justifier la convergence** de la série (ce qui n'est déjà pas toujours facile), les sommes partielles fournissant des approximations de la somme ; il faut éventuellement tenter de contrôler l'erreur d'approximation (majoration ou équivalent du reste $|R_n|$).
Dans quelques cas particuliers, cependant, on sait calculer la somme :
Séries géométriques, séries "téléscopiques", utilisation des formules de Taylor (méthode de séries entières), utilisation des séries de Fourier.

Exemple avec une formule de Taylor

Exemple Série de Taylor.

$$e^1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + R_n$$

d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, $|R_n| \leq e.\frac{1}{(n+1)!}$. d'où $\sum \frac{1}{k!}$ est convergente, de somme e.

Remarque Si $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit $f(t) = e^{\alpha t}$ pour $t \in [0, 1]$.
D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange,

$$\left| e^{\alpha} - \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!} \right| \leq |\alpha|^{n+1} \frac{e^{|\alpha|}}{(n+1)!}$$

Opérations sur les séries convergentes

Proposition

1. Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\sum u_n + \lambda v_n$ converge, de somme $\sum_{k=0}^{+\infty} u_n + \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} v_n$.
2. Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge, alors $\sum u_n + v_n$ diverge.
3. Attention, la somme de 2 séries divergente peut être convergente, ex $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = -\frac{1}{n}$.
4. $\sum z_n$ converge ssi $\sum \operatorname{Re} z_n$ et $\sum \operatorname{Im} z_n$ converge.

Qu'est-ce qu'une série alternée ?

Vocabulaire La série réelle $\sum u_n$ est alternée ssi pour tout n, $u_n = (-1)^n |u_n|$ ou si pour tout n, $u_n = (-1)^{n+1}|u_n|$.

Exemple $\sum \sin(n)$ n'est pas une SA ; $\sum \ln(1 + (-1)^n/(n+2))$ est une SA.

Critère spécial des séries alternées

Théorème (CSSA ou Critère de Leibniz) Si $\sum u_n$ est une série alternée telle que $|u_n|$ décroissante et tend vers 0, alors :

1. $\sum u_n$ converge.
2. R_n est du même signe que u_{n+1}.
3. $|R_n| \leq |u_{n+1}|$.

Démonstration Quitte à changer u_n en $-u_n$, on pose $u_n = (-1)^n a_n$, avec a_n qui décroit et tend vers 0. Alors :
$S_{2n+2} - S_{2n} = a_{2n+2} - a_{2n+1} \leq 0$ donc S_{2n} décroit.
$S_{2n+3} - S_{2n+1} = -a_{2n+3} + a_{2n+2} \geq 0$ donc S_{2n} croît.
Or $S_{2n+1} - S_{2n} = a_{2n+1} \to 0$ donc S_{2n+1} et S_{2n} sont adjacentes, et convergent vers la même limite S.
Par recollement, S_n converge vers S.
Maintenant, on a $S_{2n-1} \leq S \leq S_{2n}$ donc en retranchant S_{2n-1},
$0 \leq R_{2n-1} \leq u_{2n}$.
De même, $S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$ donc en retranchant S_{2n}, $u_{2n} \leq R_{2n} \leq 0$.

La série harmonique alternée

Exemple Série harmonique alternée : $\sum \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$ est convergente.

Calcul de sa somme :

On applique l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$ sur $[0,1]$, sachant que $f^{(k)}(x) = \dfrac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{(1+x)^k}$:

$$\left| \ln 2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right| \leq \frac{n!}{(n+1)!}.1 = \frac{1}{n}$$

donc

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2$$

Remarque (Accélération de la convergence) On a pour $\alpha \in]0,1[$:

$$\left|\ln(1+\alpha) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}\alpha^k}{k}\right| \leq \frac{n!}{(n+1)!}.\alpha^{n+1}$$

Ce qui converge beaucoup plus vite. On peut ainsi obtenir une approximation rapide de $\ln 2$ en remarquant :

$$\ln 2 = \ln(3/2 \times 4/3) = \ln(1+\frac{1}{2}) + \ln(1+\frac{1}{3})$$

(convergence en $O(1/(n2^n))$) donc très rapide (environ 1 décimale exacte supplémentaire pour 3 itérations).

Critère de convergence des séries positives

Si $u_n \geq 0$, alors (S_n) est croissante, donc :

1. la série $\sum u_n$ converge ssi S_n est bornée ;
2. dans ce cas $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_n = \sup S_n$

Les résultats suivants s'adaptent aux cas des séries de terme général négatif ou positives APCR.
Pour ces séries, les résultats sont essentiellement des théorèmes de comparaison.

Comparaison des termes généraux

Lemme Soient a_n, $b_n \geq 0$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq b_n$.

1. Si $\sum b_n$ converge, alors $\sum a_n$ converge.
2. Si $\sum a_n$ diverge, alors $\sum b_n$ diverge ($=$ contraposée du 1.)

Démonstration Clair en utilisant les sommes partielles.
Remarque Ce lemme est valide si $a_n \leq b_n$ APCR seulement.

Exemple $\sum \frac{|\cos n|}{n^2}$ convergente.

Exemple Si $\alpha < 1$, $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge.

Exercice 1 Règle de Cauchy.
Soit $u_n \geq 0$ tq $\sqrt[n]{u_n} \to \ell$. La série CV si $\ell > 1$, DV si $\ell < 1$, cas douteux si $\ell = 1$.

Exemple $\sum \dfrac{|\cos n|}{n^2}$ convergente.

Exemple Si $\alpha < 1$, $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ diverge.

Exercice 2 Règle de Cauchy.

Soit $u_n \geq 0$ tq $\sqrt[n]{u_n} \to \ell$. La série CV si $\ell > 1$, DV si $\ell < 1$, cas douteux si $\ell = 1$.

Démonstration Fixer $\ell < a < 1$, on obtient $0 \leq u_n < a^n$ apcr, terminé...

Comparaison des sommes partielles

Remarque En général, **on compare les termes généraux** pour en déduire la nature de la série étudiée. Il arrive, dans le cas de séries positives, qu'on étudie les sommes partielles :

Exemple La série $\sum \dfrac{|\sin n|}{n}$ est divergente.

Démonstration La longueur du cercle trigo étant de 2π, alors $|\sin(n)|$ ou $|\sin(n+1)|$ est supérieur à $\sin(1/2)$, donc on peut minorer les sommes partielles par celles de $\sum \dfrac{\sin(1/2)}{2n}$, qui divergent.

Convergence et domination

Théorème Soient a_n, $b_n \geq 0$ telles que $a_n = O(b_n)$.

1. Si $\sum b_n$ converge, alors $\sum a_n$ converge.
2. Si $\sum a_n$ diverge, alors $\sum b_n$ diverge (= contraposée du 1.)

Démonstration Il existe $M \geq 0$ tel que $a_n \leq M b_n$.

Remarque Ce théorème s'applique en particulier :

1. si $a_n = o(b_n)$.
2. si $a_n \sim b_n$.

Séries positives de termes équivalents

Corollaire Si $a_n \geq 0$ et $a_n \sim b_n$, alors $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont de même nature (convergente ou divergente).
Attention ! Le critère d'équivalence ne s'applique qu'aux séries dont le tg est de signe constant. $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n} \sim \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Cependant, la seconde série est convergente (CSSA) alors que la première diverge (somme d'une série CV et d'une série DV).

Comparaison Séries-intégrales

C'est une méthode de majoration (ou d'encadrement) des sommes partielles.
Théorème Si $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ est continue par morceaux et décroissante, la série de terme général :

$$w_n = \int_{n-1}^{n} f(t)\,dt - f(n)$$

est convergente. En particulier, $\sum f(n)$ et la suite $\int_0^n f(t)\,dt$ sont de même nature.

Démonstration On utilise l'encadrement :

$$f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t)\,dt \leq f(k-1)$$

d'où

$$0 \leq w_k \leq f(k-1) - f(k)$$

Or f est décroissante, minorée par 0, donc admet une limite finie L en $+\infty$.
On en déduit que $\sum f(k-1) - f(k)$ converge, de somme $f(0) - L$ (série téléscopique).
Par conséquent, $\sum w_k$ converge.
Remarque Le théorème s'applique encore si f n'est définie que sur $[a, +\infty[$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Séries de Riemann

Exemple La série $\sum \frac{1}{k^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$.
Démonstration On a déjà traité le cas $\alpha = 1$.
Si $\alpha \leq 1$, alors $\frac{1}{k^\alpha} \geq \frac{1}{k}$ donc par comparaison, $\sum \frac{1}{k^\alpha}$ diverge.
Si $\alpha > 1$, alors comme $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est continue et décroissante sur $[1, +\infty[$, la série est de même nature que la suite $\int_1^n \frac{1}{t^\alpha}\, dt$, qui converge vers $\frac{1}{\alpha - 1}$.
Remarque Ne pas confondre avec les sommes de Riemann...

Séries de Bertrand

Exemple La série $\sum \frac{1}{n^a(\ln n)^b}$ est convergente ssi $a > 1$ ou $a = 1$ et $b > 1$.
Démonstration Si $a > 1$, introduire $a > c > 1$, si $a < 1$, introduire $a < c < 1$, et comparer avec une série de Riemann.
Si $a = 1$:
Pour $b > 1$, comparer à l'intégrale de $\frac{1}{t(\ln t)^b}$ (=> CV)
Pour $b = 1$, la même comparaison aboutit la divergence (primitive en $\ln(\ln \ldots)$).
Pour $b < 1$, $\frac{1}{n(\ln n)^b} \geq \frac{1}{n(\ln n)}$, dont la série DV (vient d'être traité).

Comparaison séries/intégrales : généralisation

Proposition Si f est continue par morceaux et croissante, et si f admet une limite finie en $+\infty$, alors la série de terme général :

$$w_n = \int_n^{n+1} f(t)\,dt - f(n)$$

est convergente.

Remarque De manière générale, si f est monotone, un encadrement de $f(k)$ par $\displaystyle\int_{k-1}^{k} f(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_{k}^{k+1} f(t)\,dt$ permet souvent de déterminer la nature de la série $\sum f(k)$ et/ou un équivalent des sommes partielles...

Équivalent de la s.p. de la série harmonique

Exemple $\displaystyle\int_{k-1}^{k} dt/t \geq 1/k \geq \int_{k}^{k+1} dt/t$; en isolant le premier terme et en sommant de 2 à n, on obtient : $\displaystyle 1+\ln(n) \geq \sum_{k=1}^{n} 1/k \geq \ln(n+1)$. On obtient facilement $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 1/k \sim \ln(n)$.

Développement décimal d'un nombre réel

À tout nombre réel x on associe un unique développement décimal propre : $x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{10^k}$ où a_0 est la partie entière de x et pour $k \geq 1$, sa k-ème décimale, de sorte que la suite (a_k) admette une infinité de termes différents de 9.
Les nombres décimaux sont ceux qui admettent un DD propre et un DD impropre (tel que $a_k = 9$ à partir d'un certain rang). Par exemple :

$$1 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{9}{10^k}$$

c'est-à-dire : $1{,}000000... = 0{,}999999...$

Équivalent du reste ou de la somme partielle

Théorème On considère deux séries positives telles que $u_n \sim v_n$. Si les séries convergent, alors leurs restes sont équivalents.
Si les série divergent, alors leurs sommes partielles sont équivalentes.
Démonstration La preuve est "à la Cesaro".
Exemple $u_n = \dfrac{1}{n} - \ln(1+\frac{1}{n}) \sim \dfrac{1}{2n^2}$, donc cette série est convergente, on note γ sa limite. On en déduit également :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k} - \ln(1+\frac{1}{k}) \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2k^2}$$

Or, en encadrant à l'aide d'intégrales :

$$\int_{n+1}^{N+1} \frac{dx}{2x^2} \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{2k^2} \leq \int_{n}^{N} \frac{dx}{2x^2}$$

soit :

$$\frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2(N+1)} \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{2k^2} \leq \frac{1}{2n} - \frac{1}{2N}$$

On fait tendre N vers l'infini :

$$\frac{1}{2(n+1)} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2k^2} \leq \frac{1}{2n}$$

et enfin $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2k^2} \sim \frac{1}{2n}$.

Conséquence :

$$\gamma - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln(n+1) = \frac{1}{2n} + o(1/n)$$

et donc :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})$$

Absolue convergence

Les suites étudiées sont à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition La série $\sum u_n$ est dite absolument convergente ssi $\sum |u_n|$ est convergente.

Théorème Toute suite absolument convergente est convergente, et on a :

$$\left| \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \right| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|$$

Démonstration Cas des séries réelles :
On pose $u_k^+ = \max(0, u_k)$ et $u_k^- = -\min(0, u_k)$. Ce sont deux suites positives.
On constate $u_k = u_k^+ - u_k^-$ et $|u_k| = u_k^+ + u_k^-$. Par comparaison, la convergence de $\sum |u_k|$ entraîne celle de u_k^+ et u_k^-, donc celle de $\sum u_k$.

Cas des séries complexes :
Il suffit d'écrire $|Re(u_k)| \leq |u_k|$ donc la série $\sum \mathrm{Re}(u_k)$ est ACV, donc CV. De même pour la série $\sum \mathrm{Im}(u_k)$. D'où la convergence de $\sum u_k$.
Enfin, l'inégalité :

$$\left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right| \leq \sum_{k=0}^{n} |u_k|$$

passe à la limite.

Exemple $\sum \frac{\sin n}{n^2}$ est convergente.

$\sum \frac{z^n}{n!}$ est convergente, sa somme est (par définition) l'exponentielle complexe $\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.

Attention ! La série $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ est convergente (CSSA) mais n'est pas absolument convergente (série harmonique).

Définition Une série convergente qui n'est pas absolument convergente est dite **semi-convergente**.

Exercice 3 Si σ est une permutation de $\mathbb{N}$, et $\sum u_k$ ACV, alors $\sum u_{\sigma(k)}$ CV, de même somme.

Exercice 4 Si σ est une permutation de $\mathbb{N}$, et $\sum u_k$ ACV, alors $\sum u_{\sigma(k)}$ CV, de même somme.

Solution On pose $N(n) = \max(\sigma(0), ..., \sigma(n))$. Clairement $N(n) \geq n \to +\infty$ et

$$\sum_{k=0}^{n} |u_{\sigma(k)}| \leq \sum_{k=0}^{N(n)} |u_k|$$

ce qui assure que $\sum u_{\sigma(k)}$ ACV.

De plus, on établit une comparaison des sommes, que l'on renverse à l'aide de σ^{-1}, ce qui établit :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |u_{\sigma(k)}| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|$$

Posons maintenant : $U_n = \{0, ..., N(n)\} \setminus \{\sigma(0), ..., \sigma(n)\}$.

$$|\sum_{k=0}^{N(n)} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_{\sigma(k)}| = |\sum_{k \in U_n} u_k|$$

Or :

$$|\sum_{k \in U_n} u_k|| \leq \sum_{k \in U_n} |u_k| \leq \sum_{k=0}^{N(n)} |u_k| - \sum_{k=0}^{n} |u_{\sigma(k)}| \to 0$$

cqfd.

Domination par une série ACV

Corollaire Si $u_n = O(v_n)$ et $\sum v_n$ est ACV, alors $\sum u_n$ est ACV. (car $|u_n| = O(|v_n|)$. En pratique, on n'utilise que des v_n positives). Si $u_n \sim v_n$ et $\sum v_n$ est ACV, alors $\sum u_n$ est ACV. Attention ! $u_n \sim v_n$ et $\sum v_n$ CV ou DV ne permet pas de conclure (voir $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n} \sim \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.)

Exemple Étudier la nature de $\sum u_n$ avec $u_n = \ln(1 + \dfrac{(-1)^n}{n})$.

IMPORTANT : formule de Stirling

Exemple

$$n! \sim \sqrt{2n\pi}\, n^n e^{-n}$$

Démonstration On pose $u_n = \dfrac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}$ et $v_n = \ln(u_n)$.
On calcule $v_{n+1} - v_n = 1 - (n + 1/2)\ln(1 + \frac{1}{n}) = \ldots = O(1/n^2)$.
La série $\sum v_{n+1} - v_n$ est ACV, donc CV, et donc v_n converge vers une limite L et u_n converge vers $K = e^L > 0$.
On en déduit $n! \sim K\sqrt{n}n^n e^{-n}$, en on calcule K à l'aide de l'équivalent de Wallis.

Règle de d'Alembert

Théorème On suppose $u_n > 0$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell$.

1. Si $\ell > 1$, la série $\sum u_n$ diverge.
2. Si $\ell < 1$, la série converge.
3. Si $\ell = 1$, le critère ne permet pas de conclure.

Démonstration

1. Si $\ell > 1$, alors on choisit $1 < \rho < \ell$.
APCR N, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > \rho$, donc $u_n \geq \rho^{n-N} u_N$. u_n est minorée par le tg d'une série divergente, donc $\sum u_n$ DV.
2. Inversement, si $\ell < 1$, alors on choisit $0 < \rho < 1$.
APCR N, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < \rho$, donc $u_n \leq \rho^{n-N} u_N$. u_n est positive et majorée par le tg d'une série convergente, donc $\sum u_n$ CV.

Cas $\ell = 1$. Les exemples des séries $\sum \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ montre que le cas est indéterminé.

Exemple Montrer que $\sum \frac{1}{(\ln n)^n}$ est divergente.

SOL : $\dfrac{(\ln(n+1))^{n+1}}{(\ln n)^n} \sim (\ln n) \to +\infty$.

Remarque L'idée du critère de d'Alembert est de comparer la *variation* de la suite à celle d'une série de référence (ici, géométrique). On peut généraliser ce critère :

Exercice 5 Soient u_n, $v_n > 0$. On suppose $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ (NB : APCR suffit). Alors

1. Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
2. (Contraposée) Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ converge.

Démonstration En comparant 2 produits téléscopiques, on montre $u_n \leq \dfrac{u_0}{v_0} v_n$ pour tout n, et on applique le théorème de comparaison.

Exercice 6 Règle de Rabbe-Duhamel.
Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{a}{n} + o(\frac{1}{n})$. Si $a > 1$, la série diverge, si $a < 1$, la série converge.
Démonstration On compare avec la série $\sum v_n$, avec $v_n = \dfrac{1}{n^b}$.
On a $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = (1 + \frac{1}{n})^{-b} = 1 - \dfrac{b}{n} + o(\frac{1}{n})$. La position de a par rapport à 1 permet de comparer la nature des séries...

Produit de Cauchy

Définition Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries, on définit leur produit de Cauchy $\sum w_n$ par :

$$w_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q$$

Remarque

1. C'est la formule qui apparaît naturellement quand on multiplie deux polynômes $\sum u_n X^n$ et $\sum v_n X^n$.
2. Le produit de Cauchy est associatif, commutatif, d'élément neutre la série δ_{0k} (Kronecker), distributif par rapport à l'addition.

Théorème Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont ACV, alors :

1. Leur produit de Cauchy est ACV.
2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$.

Démonstration 1. Montrons la convergence absolue du produit de Cauchy.

$$\sum_{k=0}^{n} |w_k| \leq \sum_{k=0}^{n} \sum_{p+q=k} |u_p||v_q| \leq \left(\sum_{p=0}^{n} |u_k|\right)\left(\sum_{k=0}^{n} |v_k|\right) \leq$$

$\displaystyle\left(\sum_{p=0}^{+\infty} |u_k|\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} |v_k|\right)$ donc la série $\sum w_n$ est absolument convergente.

2. On établit ensuite l'égalité dans le cas de suites positives :
Il suffit de remarquer que, en notant $\sum w'_n$ le produit de Cauchy de $\sum |u_n|$ et $\sum |v_n|$:

$$\sum_{k=0}^{2n} w'_k \geq \sum_{k=0}^{n} |u_k| \times \sum_{k=0}^{n} |v_k|$$

ce qui montre : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} w'_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} |v_n|\right)$.

3. Enfin, on traite le cas général (méthode semblable à la permutation plus haut) : On pose $V_n = \{(p,q) | 0 \leq p, q \leq n \text{ et } p+q > n\}$.

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{p=0}^{n} u_p \sum_{q=0}^{n} v_q - \sum_{k=0}^{n} w_k \right| &= \left| \sum_{(p,q)\in V_n} u_p v_q \right| \\
&\leq \sum_{(p,q)\in V_n} |u_p||v_q| \\
&= \sum_{p=0}^{n} |u_p| \sum_{q=0}^{n} |v_q| - \sum_{k=0}^{n} w_k' \\
&\to 0 \text{ (d'après 2.)}
\end{aligned}$$

Exemple $w_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!(n-p)!}$. On reconnaît le produit de Cauchy de $\sum \frac{1}{p!}$ par elle-même, et donc $\sum w_n$ converge, de somme $e \times e = e^2$ (on peut le voir en calculant $w_n = \frac{2^n}{n!}$.

Exemple Carré de Cauchy de $\sum \frac{(-1)^n}{n}$.

$$w_n = \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p(n-p)} = \frac{(-1)^n}{n} \sum_{p=1}^{n-1} (\frac{1}{p} - \frac{1}{n-p}) = \frac{2(-1)^n}{n} \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p} =$$
$$\frac{2(-1)^n \ln n}{n} + \frac{2\gamma(-1)^n}{n} + O(\frac{1}{n^2})$$

On vérifie que $\sum w_n$ est bien convergent (alors qu'on n'est pas dans le cadre du théorème).

Suites de Cauchy

Définition Soit (x_k) une suite. Elle est de Cauchy ssi pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tq $p, q \geq n_0 \Rightarrow |x_p - x_q| \leq \varepsilon$.
Écriture équivalente : il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $|x_n - x_{n_0}| \leq \varepsilon$.
Proposition Toute suite convergente est de Cauchy.
Démonstration Pour n assez grand, $|x_n - \ell| \leq \varepsilon$ donc pour m, n assez grands, $|x_n - x_m| \leq |x_n - \ell| + |x_m - \ell| \leq 2\varepsilon$.
Théorème Toute suite de Cauchy de $\mathbb{K}$ est convergente.
Démonstration (admis)

Critère de Cauchy

Conséquence (Critère de Cauchy) La série $\sum u_n$ est convergente ssi, pour tout ε, il existe n_0 telle que pour tout $n \geq n_0$,

$$\left| \sum_{k=n_0+1}^{n} u_k \right| \leq \varepsilon$$

Exemple Transformation d'Abel.
Montrer que $\sum \frac{\sin n}{n}$ converge. (Généralisation ?)