Ex. 1 Soit (u_n) une suite à termes strictement positifs telle que :

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq \frac{p}{n} + \frac{1}{p}$$

Montrer que (u_n) tend vers 0.

Ex. 2 On pose $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = (n + {u_n}^{n-1})^{\frac{1}{n}}$ pour tout $n > 0$. Expliciter le terme général et calculer la limite de la suite (u_n).

Ex. 3 Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{pn} \frac{n}{n^2 + k^2}$. Déterminer la limite de u_n : a) quand $p = 1$; b) quand $p > 1$ (on utlisera un encadrement à l'aide d'intégrales).

Ex. 4 a) Calculer $\sum_{k=1}^{n} \sin kx$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b) Soit $u_n = \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{k\pi}{n}$. Montrer $u_n \sim \dfrac{2n}{\pi}$.

c) Déterminer un développement asymptotique à 3 termes de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin \frac{k}{n^2}$.

Ex. 5 a) Déterminer les valeurs des sommes S_1, S_2, S_3 où $S_p = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^p$.

b) Déterminer la limite de $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + 2 + \cdots + k}$.

Ex. 6 Déterminer un développement asymptotique à 3 termes de la suite définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{e^{-u_n}}{1+n}$.

Ex. 7 On considère l'ensemble E des suites réelles définies par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{e^{u_n}}{1+n}$.

1. Montrer que si $u, v \in E$ et $u_0 \leq v_0$, alors $u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire d'une part, que si $u \in E$ et s'il existe N tel que $u_{N+1} \leq u_N$, alors u converge ; de l'autre, que si $u \leq v$ et v converge, alors u converge.
3. Montrer que pour $u_0 = \ln(\ln 2)$, alors u converge.
4. Montrer que pour $u_0 = 1$, alors u diverge.
5. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$, tel que u diverge pour $u_0 \geq \alpha$ et u converge pour $u_0 < \alpha$.

Ex. 8 Montrer que le polynôme $P_n(X) = X^n - nX + 1$ admet une unique racine x_n dans $]0, 1[$ pour n assez grand. Donner un équivalent de x_n, puis un équivalent de $y_n = nx_n - 1$ (justifier que $y_n \leq \frac{1}{2^n}$ à partir d'un certain rang), puis un développement asymptotique à 2 termes de $z_n = n^n y_n$, de y_n et enfin un développement asymptotique à 3 termes de x_n.

Ex. 9 1) Calculer et donner un équivalent de $J_n = \int_{n-1}^{n} \dfrac{x^{n-1}}{x^n + 1}\, dx$.

2) En déduire un équivalent de $I_n = \int_{n-1}^{n} \frac{x^{n-1}+1}{x^n+1}\, dx$.

Ex. 10 Intégrales de Wallis. On pose $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^n\, dt$.

a) En intégrant par parties $W_{n+2} - W_n$, montrer $W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} W_n$.

b) Justifier $W_n \sim W_{n+1}$ et en déduire $W_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

Ex. 11 En encadrant $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ à l'aide d'intégrales, montrer que $S_n \sim \ln n$.

Ex. 12 On considère la suite donnée par u_0 et $u_{n+1} = \dfrac{1 + (u_n)^2}{2}$. Étudier u et donner un équivalent en $+\infty$.

Ex. 13 Soit f une fonction 1-lipschitzienne sur $[a,b]$. On considère la suite $u_{n+1} = \dfrac{u_n + f(u_n)}{2}$. Montrer que u_n converge vers un point fixe de f. (On pourra montrer la monotonie de $x \mapsto \dfrac{x+f(x)}{2}$.

Ex. 14 Montrer le théorème de Cesaro : Si la suite réelle (u_n) tend vers $\ell \in \mathbb{R}$, alors $\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$ tend également vers ℓ.
Justifier que la réciproque est fausse.

Ex. 15 Montrer que le polynôme $P_n(X) = X^n + X - 1$ possède une unique racine positive x_n. Montrer que x_n converge vers une limite ℓ et donner un équivalent de ℓ en $+\infty$.

Ex. 16 Soit (u_n) une suite complexe telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}(u_n + |u_n|)$. Étudier la convergence puis calculer la limite de (u_n).

Ex. 17 Étudier la suite (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 - (u_n)^2$

Ex. 18 Étudier la suite (u_n) définie par $u_0, u_1 > 0$ et pour $n \geq 0$: $u_{n+2} = \sqrt{u_n u_{n+1}}$

Ex. 19 On considère l'équation $x^n = e^x$.
1) Montrer que cette équation admet 2 racines $a_n < b_n$.
2) Montrer que (a_n) converge vers une limite ℓ.
3) Déterminer un développement asymptotique de $a_n - \ell$ à 2 termes.
4) Déterminer un équivalent de b_n, puis un développement asymptotique à 2 termes.