Leçon n°6 : DROITES – TRIANGLES – QUADRILATERES – CERCLES

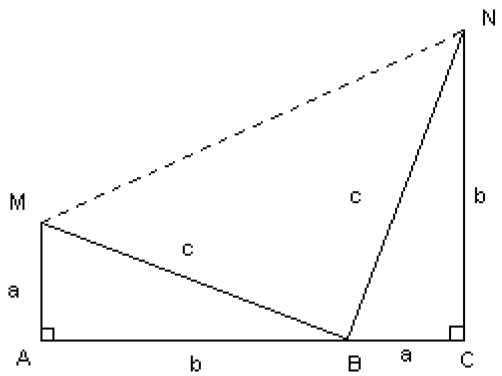
Dans cette leçon de géométrie, il s'agit surtout de conformer les acquis de troisième sur les configurations classiques dans le plan.
Nous trouverons donc des exercices sur les droites du plan (P), sur les triangles (Triangles quelconques, triangles rectangles, triangles isocèles ou triangles équilatéraux), les quadrilatères et les cercles.
Attention, on vous l'a déjà dit en troisième, il faut faire **des figures claires**, **bien documentées** avec les égalités de longueurs ou d'angles. Ecrire à côté de la figure les hypothèses du problème (parallélisme de droites ou bien les droites perpendiculaires etc….)
Si vous n'avez pas fait de **fiches résumées** en troisième, il faut s'y mettre, dans les exercices, ce sont toujours les mêmes théorèmes qui reviennent. (Voir les révisions de troisième sur le site Périer - Math)
Une fiche de révisions, c'est personnel et donc il faut faire l'effort de les faire soi-même.

Commençons par les deux outils les plus employés dans les problèmes de troisième :

- **Le théorème de Pythagore** et sa réciproque.
- **Le théorème de Thalès** et sa réciproque.

Voici les démonstrations de ces théorèmes qui d'habitude ne sont pas faîtes en troisième.
Nous ferons que les démonstrations de théorèmes directs et cela sous forme d'exercices pour vous faire participer.

Exercice 1 – Le théorème de Pythagore.
Il existe beaucoup de démonstrations du théorème de Pythagore mais, celle trouvée par **M. Garfield** (président des Etats-Unis d'Amérique en 1880, assassiné en 1881) est particulièrement simple. Ce mathématicien a eu l'idée de construire la figure ci-dessous. Il a pris un triangle rectangle dont les deux plus petits côtés mesurent respectivement a et b ; le plus grand côté mesure c.



Nous avons deux fois le même triangle en effet (AMB) et (BNC) sont superposables.
(Une petite parenthèse, nous ne disons pas (AMB) et (BNC) sont égaux car il n'y a qu'un triangle égal à (AMB) c'est celui dessiné en (AMB), nous dirons en 1° que (AMB) et (BNC) sont **isométriques** ce qui est synonyme de superposables)

a) Démontrer que le triangle (MBN) est isocèle et rectangle en B.
b) Calculer l'aire du trapèze rectangle (AMNC) de deux façons différentes.
   (Indications : directement avec la formule du trapèze, puis par sommes d'aires)

Solution

a) Nous avons deux fois le même triangle donc MB = NB, le triangle MBN est donc isocèle. De plus les angles $\widehat{MBA}$ et $\widehat{CBN}$ sont complémentaires c'est-à-dire que leur somme vaut 90° (mes $\widehat{CBN}$ = mes $\widehat{BMA}$ car les deux triangles (AMB) et (BNC) sont superposables, or mes $\widehat{BMA}$ + mes $\widehat{MBA}$ = 90°. J'ajoute le préfixe mes devant les angles pour mesure car, au lycée, nous allons faire la différence entre un angle (objet géométrique) et sa mesure qui est un nombre réel.) $\widehat{ABC}$ étant un angle plat, l'angle $\widehat{MBN}$ sera un angle droit.
Conclusion : **le triangle (MBN) est un triangle isocèle et rectangle en B**.

b) (AMNC) est un trapèze rectangle ((AM) // (NC) ces deux droites sont perpendiculaires à (AC) ; en $\hat{A}$ et en $\hat{C}$, nous avons deux angles droits)
M. Garfield a calculé l'aire de ce trapèze de deux façons différentes :
Première façon avec la formule du trapèze :
Aire(AMNC) = $\dfrac{(\text{Petite base} + \text{Grande base}) \times \text{Hauteur}}{2}$

Cela donne ici : Aire(AMNC) = $\dfrac{(AM + NC) \times CA}{2} = \dfrac{(a+b)(a+b)}{2} = \dfrac{(a+b)^2}{2}$
Deuxième façon, en utilisant la somme des aires de trois triangles (AMB), (MBN) et (BNC) qui sont rectangles.
Aire(AMNC) = $\dfrac{ab}{2} + \dfrac{c^2}{2} + \dfrac{ab}{2} = \dfrac{c^2 + 2ab}{2}$
Conclusion : $\dfrac{(a+b)^2}{2} = \dfrac{c^2 + 2ab}{2} \Leftrightarrow (a+b)^2 = c^2 + 2ab$
$\Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$
Nous avons bien : $\mathbf{c^2 = a^2 + b^2}$.

Théorème de Pythagore :
Dans un triangle rectangle, le carré de la longueur du plus grand des côtés est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.
Ou plus simplement dit, *si un triangle ABC est rectangle en A, alors* $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Réciproque de Pythagore :
Si dans un triangle (ABC), $BC^2 = AB^2 + AC^2$ *alors, ce triangle (ABC) est rectangle en A.*
Evidemment, ceci se démontre mais laissons la démonstration de côté ; l'important est de ne pas confondre le théorème direct avec sa réciproque.

Exercice 2 : Le théorème de Thalès

Nous considérons un trapèze (ABCD) quelconque non croisé avec (AB) // (CD). Nous appelons I l'intersection des deux diagonales.

a) Démontrer que l'aire(ABD) = l'aire(ABC).

Nous prolongeons (AD) et (BC) qui se coupent en O. Soit h la longueur de la hauteur issue de B dans le triangle (OAB) et k la longueur de la hauteur issue de A dans ce même triangle.

b) Calculer les aires de (OAB) et de (OBD) en fonction de h.
c) Calculer les aires de (OAB) et de (OAC) en fonction de k.
d) Montrer que l'aire (OBD) = l'aire (OAC).
e) Calculer les deux rapports : $\frac{\text{Aire(OAB)}}{\text{Aire(OBD)}}$ et $\frac{\text{Aire(OAB)}}{\text{Aire(OAC)}}$. Que peut-on dire de ces deux rapports ? Conclure.

A ce stade, nous avons une partie du théorème de Thalès.

Il reste à démontrer que $\frac{OA}{OD} = \frac{AB}{DC}$. Reprenons une nouvelle figure avec le triangle (ODC) et la parallèle (AB). Nous traçons par A la parallèle à (BC), elle coupe [DC] en M.

Démontrer que $\frac{DC - MC}{DC} = \frac{OD - OA}{OD}$ en déduire que $1 - \frac{MC}{DC} = 1 - \frac{OA}{OD}$.

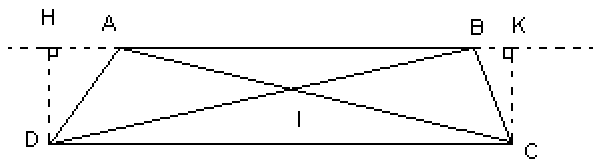
En conclure que $\frac{OA}{OD} = \frac{AB}{DC}$.

Il reste le cas où A et D d'un côté et B et C de l'autre sont de part et d'autre de O. Peut-on se ramener au précédent cas de figure ?

Enoncer alors le théorème de Thalès.
Donner sa réciproque.

Solution

a)

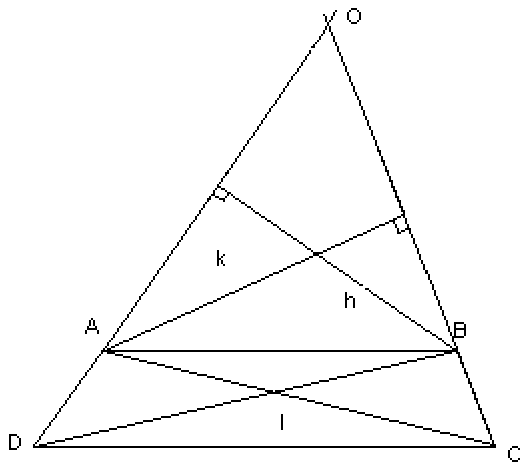


Les triangles (ABD) et (ABC) ont la même bas [AB] et la même hauteur CK = DH, distance entre les deux parallèles (AB et (DC) du trapèze (Hauteur du trapèze).

Aire(ABD) = Aire(ABC) = $\frac{AB \times DH}{2} = \frac{AB \times CK}{2}$.

Aire(ABD) = Aire(ABC).

b) Nous prolongeons (AD) et (BC), ces deux droites se coupent car (ABCD) est un trapèze et les côtés [AD] et [BC] ne sont pas parallèles.
Nous traçons dans (OAB), la hauteur issue de B de longueur h et la hauteur issue de A de longueur k.



En fonction de h :

Aire(OAB) = $\dfrac{OA \times h}{2}$; Aire(OBD) = $\dfrac{OD \times h}{2}$.

c) En fonction de k :

Aire(OAB) = $\dfrac{OB \times k}{2}$; Aire(OAC) = $\dfrac{OC \times k}{2}$.

d) **Aire(OBD) = Aire(OAC)** en effet, Aire(OBD) = Aire(OAB)+Aire(ABD) et
Aire(OAC) = Aire(OAB)+Aire(ABC).

Or Aire(ABD) = Aire(ABC).

e)

$$\frac{\text{Aire(OAB)}}{\text{Aire(OBD)}} = \frac{\frac{OA \times h}{2}}{\frac{OD \times h}{2}} = \frac{OA}{OD} \; ; \; \frac{\text{Aire(OAB)}}{\text{Aire(OAC)}} = \frac{\frac{OB \times k}{2}}{\frac{OC \times k}{2}} = \frac{OB}{OC}.$$

Ces deux rapports sont égaux car ils ont le même numérateur et Aire(OBD) = Aire(OAC).
Nous avons ici un morceau du théorème de Thalès :

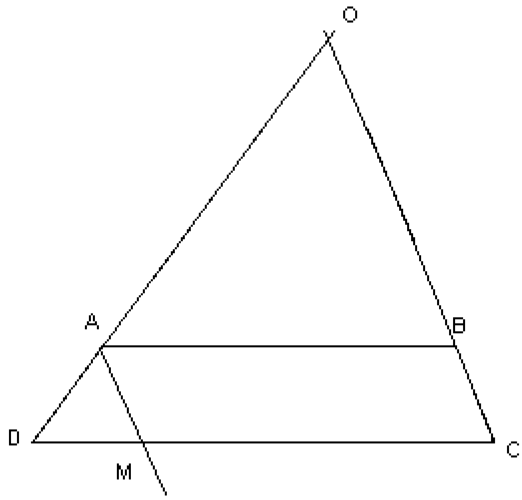
$$\mathbf{\frac{OA}{OD} = \frac{OB}{OC}}.$$

Pour terminer, reprenons une nouvelle figure :
Nous allons appliquer au triangle (ODC) et à la parallèle (AM), la première partie du théorème de Thalès :

$\dfrac{DM}{DC} = \dfrac{DA}{DO} \Leftrightarrow \dfrac{DC - MC}{DC} = \dfrac{DO - AO}{DO}$; effectuons les quotients :

$\dfrac{DC}{DC} - \dfrac{MC}{DC} = \dfrac{DO}{DO} - \dfrac{AO}{DO} \Leftrightarrow 1 - \dfrac{MC}{DC} = 1 - \dfrac{AO}{DO}$ et donc, $\dfrac{MC}{DC} = \dfrac{AO}{DO}$ or (ABCM) est un parallélogramme par construction et donc MC = AB.

Conclusion : $\mathbf{\dfrac{OA}{OD} = \dfrac{AB}{DC}}$**.**



Il reste le cas où A et D d'un côté et B et C de l'autre sont de part et d'autre de O.
Nous pouvons faire une symétrie de centre O appliquée à D et C pour avoir les points dans l'ordre de la démonstration ci-dessus.
Nous pouvons énoncer le Théorème de THALES :
Si nous avons deux sécantes (OD) et (OC) et (AB) // (DC) alors, les points O, A, D et O, B, D étant dans cet ordre sur les droites (OD) et (OC), nous avons des rapports égaux :

$$\frac{OA}{OD} = \frac{OB}{OC} = \frac{AB}{DC}$$

Nous avons aussi une réciproque :
Soit deux droites sécantes (OD et (OC), les points O, A et D sur (OD) et O, B et C sur (OC) avec : $\frac{OA}{OD} = \frac{OB}{OC} = \frac{AB}{DC}$ *alors, les droites (AB) et (DC) sont parallèles*.

Ici aussi, nous ne démontrerons pas la réciproque.

Ces deux démonstrations sont instructives car elles utilisent le calcul des aires.
Nous pouvons passer maintenant aux exercices sur les configurations traditionnelles.
ATTENTION A BIEN SOIGNER LES FIGURES.

DROITES ; TRIANGLES ; QUADRILATERES et CERCLES

Exercice 1

Dans un repère orthonormal (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) du plan (P), nous avons les points A(– 2 ;2), B(3 ;7), C(2 ;– 2) et D(7 ;3).

a) Donner les équations des droites (AB), (BC), (CD) et (DA). Que constatez-vous ?
b) Donner les coordonnées du milieu de [AC] et celles du milieu de [BD]. Quel théorème vérifie-t-on par ces calculs ?

Exercice 2

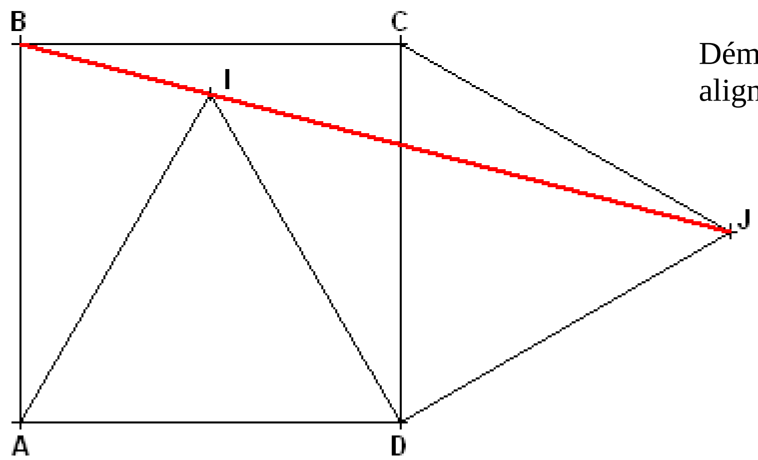
Dans un repère orthonormal du plan(P), nous considérons (D1) d'équation y = $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}$ et (D2), d'équation y = $-\frac{3}{4}x+5$. Déterminer (D1)$\cap$(D2).

Exercice 3

Soit un triangle (ABC) quelconque avec AB = 6, AC = 7 et BC = 9. M un point de [AB] et (MNPB) est un parallélogramme. N$\in$[AC] et P$\in$[BC].
Nous posons BM = x. Comment doit on choisir x pour que (MNPB) soit un losange.

Exercice 4

Soit la figure ci-dessous avec un carré (ABCD) ; (AID) et (CJD) des triangles équilatéraux



Démontrer que B,I et J sont alignés.

Exercice 5

Dans un carré (ABCD) de côté AB = 4, nous prenons M sur [AD] tel que AM = x, N sur [DC] tel que CN = y. Comment doit-on choisir x et y pour que (MNB) soit un triangle équilatéral.

Exercice 6

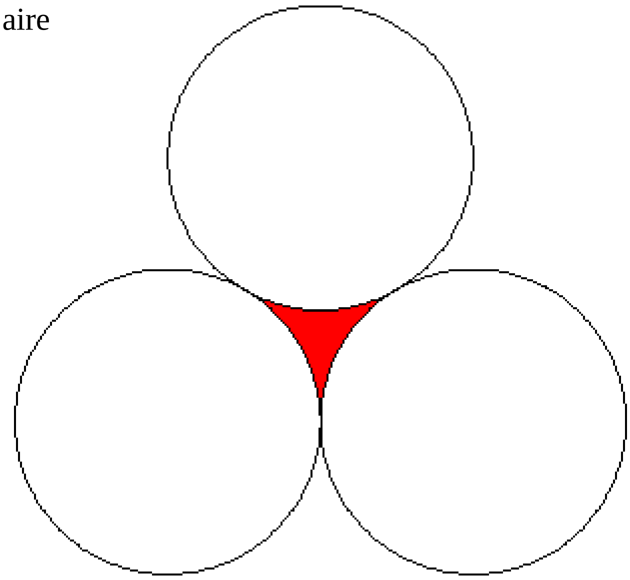
Dans un triangle quelconque (ABC), nous traçons la bissectrice intérieure de l'angle $\hat{A}$, elle coupe [BC] en I. Démontrer en calculant des aires que $\frac{AB}{AC}=\frac{IB}{IC}$.

Exercice 7
Soit un parallélogramme (ABCD) , nous traçons les bissectrices intérieures des angles $\hat{A}$ et $\hat{B}$. Elles se coupent en I. Démontrer que le triangle (AIB) est rectangle en I.
Que devient ce triangle dans le cas où (ABCD) est un rectangle.

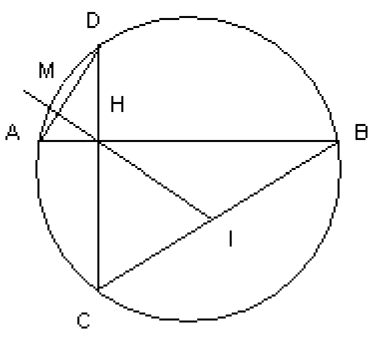
Exercice 8
Soit un quadrilatère quelconque (ABDC) tel que (BAD) soit rectangle en A et (BCD) rectangle en C. Démontrer que la médiatrice de [AC] passe par le milieu de [BD].

Exercice 9
Soit trois carrés (ABGH), (BCFG) et (CDEF) disposés les uns à côté des autres.
I le milieu de [HB], [HD] coupe [BG] en J. Démontrer que I,J et F sont alignés.

Exercice 10
Périmètre et aire d'une surface curviligne.
Chaque cercle a pour rayon 1.
Calculer le périmètre et l'aire du domaine en rouge.



Exercice 11



[AB] et [CD] sont perpendiculaires.
I est le milieu de [BC].
(IH) coupe [AD] en M.
En utilisant les angles, montrer que [IM] $\perp$ [AD]

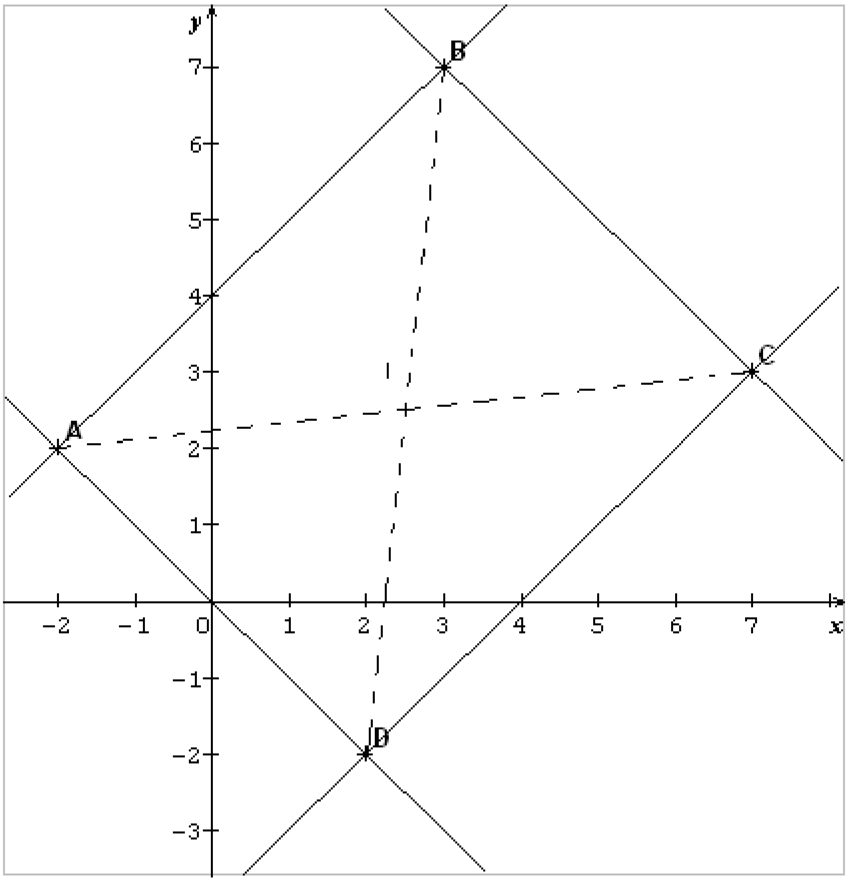
Exercice 12
Soit un cercle (C), de centre O et un diamètre [AB]. M se déplace sur (C). N le milieu de [AM]. Quel est l'ensemble décrit par les points N ?

Correction

Exercice 1 :

a) Faisons la figure

A(– 2 ; 2)
B(3 ; 7)
C(7 ; 3)
D(2 ; – 2)



Equation de (AB)

Elle est de la forme **y = ax + b** (Fonction affine). Calculons a :

a = $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{7-2}{3-(-2)}$ = **1** ; l'équation est donc de la forme y = x + b et pour trouver b, nous utilisons un des deux points, A par exemple 2 = – 2 + b et donc **b = 4**.

L'équation de (AB) est y = x + 4.

Equation de (BC)

a = $\frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{3-7}{7-3} = \frac{-4}{4}$ = – 1 . L'équation est de la forme y = – x + b, utilisons B(3 ;7), cela donne 7 = – 3 + b et donc b = 10.

L'équation de(BC) est y = – x + 10.

Equation de (CD)

a = $\frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{-2-3}{2-7} = 1$. L'équation est de la forme y = x + b, utilisons C, 3 = 7 + b et donc b = – 4.

L'équation de (CD) est y = x – 4.

Equation de (DA)

a = $\frac{y_A - y_D}{x_A - x_D} = \frac{2-(-2)}{-2-2} = \frac{4}{-4}$ = – 1. L'équation est de la forme y = – x + b, utilisons D.

$-2 = -2 + b$ et donc $b = 0$.

L'équation de (DA) est $y = -x$. (C'est une fonction affine particulière, fonction linéaire, la droite passe par l'origine du repère)

Nous constatons que (AB) // (CD), dans les équations, nous avons le même coefficient directeur $a = 1$.

De même (BC) // (DA), dans les équations, nous avons le même coefficient directeur -1.

Ceci nous permet de dire que **(ABCD) est un parallélogramme** car ces côtés opposés sont parallèle deux à deux.

De plus, (AB) $\perp$ (BC) en effet, dans les équations de ces droites, nous avons le produit des coefficients directeurs égal à -1. ($1(-1) = -1$)

(*Dans un repère orthonormal du plan (P), deux droites (D) et (D') d'équation $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$. (D) $\perp$ (D') si et seulement si $aa' = -1$.*)

Nous savons qu'un parallélogramme qui a un angle droit est un rectangle donc **(ABCD) est un rectangle**.

Est-ce un carré ? Visiblement non mais pour le prouver calculons AB et BC.

Théorème :

Dans un repère orthonormal du plan (P), si on a $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A\ ;\ y_B - y_A)$ alors :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

$\overrightarrow{AB}(3 - (-2)\ ; 7 - 2)$ soit $\overrightarrow{AB}(5\ ;\ 5)$ donc $AB = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} = \mathbf{5\sqrt{2}}$

$\overrightarrow{BC}(7 - 3\ ;\ 3 - 7)$ soit $\overrightarrow{BC}(4\ ;\ -4)$ et donc $BC = \sqrt{4^2 + (-4)^2} = \sqrt{32} = \mathbf{4\sqrt{2}}$.

AB $\neq$ BC, **(ABCD) est donc seulement un rectangle**.

b) Formule du milieu : *Soit $A(x_A\ ;y_A)$ et $B(x_B\ ;y_B)$ alors le milieu I aura pour coordonnées* :

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \quad et\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

(Formule démontrée dans la leçon sur les vecteurs)

Appelons I le milieu de [AC] et J le milieu de [BD].

$$\left.\begin{array}{l} x_I = \dfrac{-2+7}{2} = \dfrac{5}{2}\ ;\ y_I = \dfrac{2+3}{2} = \dfrac{5}{2} \\ x_J = \dfrac{3+2}{2} = \dfrac{5}{2}\ ;\ y_J = \dfrac{7+(-2)}{2} = \dfrac{5}{2} \end{array}\right\}$$

Evidemment, **I = J, les deux diagonales ont le même milieu**.

Exercice 2

Pour chercher l'intersection de deux droites (D1) et (D2), nous devons résoudre un système.

Nous cherchons x et y tels que

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{3} \\ y = -\dfrac{3}{4}x + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{3} & (1) \\ \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{3} = -\dfrac{3}{4}x + 5 & (2) \end{cases}$$

Pour résoudre (2), nous réduisons au même dénominateur (12)

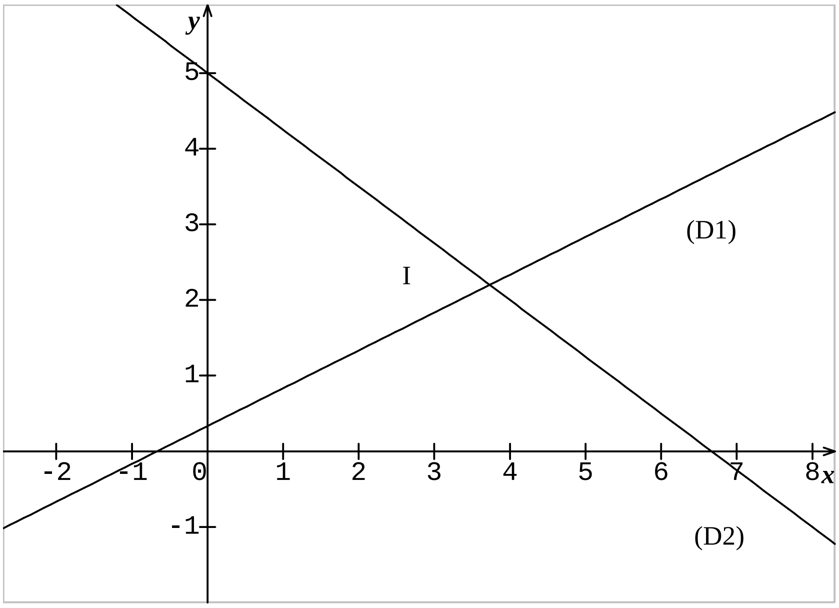
$\dfrac{6x+4}{12} = \dfrac{-9x+60}{12}$ et donc $6x + 4 = -9x + 60 \Leftrightarrow 15x = 56$ soit $x = \dfrac{56}{15}$.

Calculons l'ordonnée du point d'intersection avec (1) :

$y = \frac{1}{2}\left(\frac{56}{15}\right) + \frac{1}{3} = \frac{28}{15} + \frac{5}{15} = \frac{33}{15} = \frac{11}{5}$.

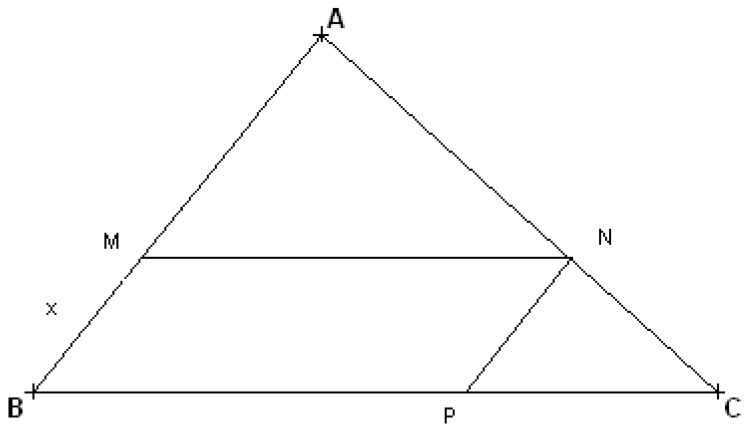
(D1) et (D2) sont sécantes au point $\mathbf{I}\left(\frac{\mathbf{56}}{\mathbf{15}};\frac{\mathbf{11}}{\mathbf{5}}\right)$.

Faisons le graphique :



Exercice 3

Attention, M∈[AB] donc $\mathbf{0 \leq x \leq 6}$.



Si (MNPB) est un losange alors les quatre côtés ont la même longueur.

BM = MN = NP = BP = x.

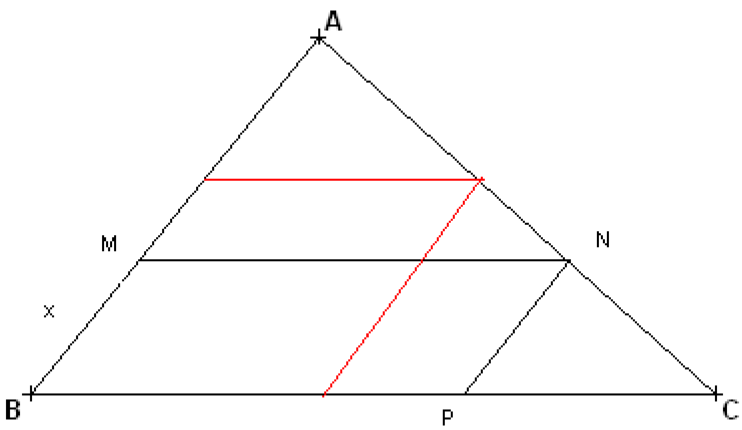
Nous appliquons Thalès aux droites sécantes (AB) et (AC) et à la parallèle (MN) à (BC).

$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$; prenons $\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$ soit $\frac{6-x}{6} = \frac{x}{9}$.

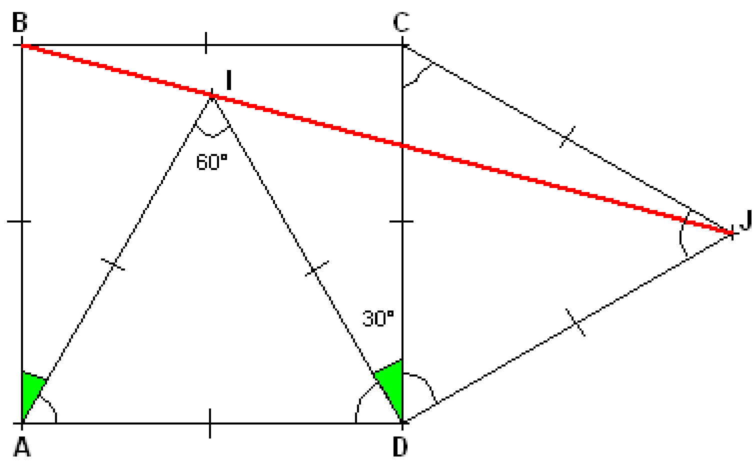
Théorème : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ *avec b≠0 et d≠0* ⇔ *ad = bc.*

Ceci nous donne : 9(6 – x) = 6x soit 54 – 9x = 6x et donc 15x = 54. x = $\frac{54}{15} = \frac{18}{5}$ = **3,6**.

Nous pouvons alors faire la bonne figure :



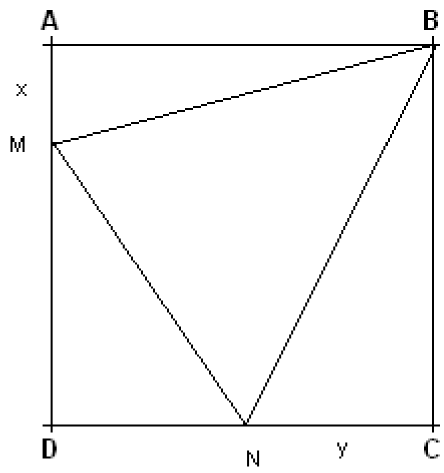
Exercice 4
Pour démontrer que B,I et J sont alignés, nous allons utiliser les angles. Etudions la figure.
Dans les triangles équilatéraux, les angles mesurent 60°. Marquons les égalités de longueurs.



Le triangle (BAI) est isocèle car AI = BI, l'angle au sommet dans ce triangle mesurant 30°
(mes $\widehat{BAD} = 90°$ et mes $\widehat{IAD} = 60°$) donc mes $\widehat{ABI}$ = **mes** $\widehat{BIA} = \dfrac{180° - 30°}{2}$ = **75°**.

D'autre part, le triangle (IDJ) est rectangle en D, en effet, mes $\widehat{IDC} = 30°$ et mes $\widehat{CDJ} = 60°$.
Il est aussi isocèle car ID = DJ donc mes $\widehat{DIJ} = 45°$.
Au total, mes $\widehat{BIA}$ + mes $\widehat{AID}$ + mes $\widehat{DIJ}$ = 75° + 60° + 45° = 180°, donc $\widehat{BIJ}$ est un angle plat. **B, I et J sont alignés**.
(Remarque : si vous ne documentez pas bien la figure, la démonstration n'apparaît pas)

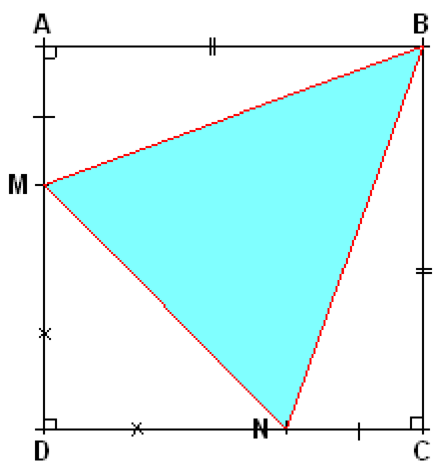
Exercice 5
Dans cet exercice, nous faisons une première figure pour réfléchir au problème.
Si nous voulons que le triangle (MBN) soit équilatéral, il faut que ses trois côtés aient la même longueur donc MB = MN = NB ;
Nous allons calculer ces trois longueurs en fonction de x et de y.
AB = 4. x et y sont des réels de l'intervalle [0 ;4] car M et N sont sur les côtés du carré.
Pour MB, utilisons Pythagore car (MAB) est un triangle rectangle en A.
$\mathbf{MB^2 = x^2 + 16}$.



Pour NB, même chose : $\mathbf{NB^2 = y^2 + 16}$.
Pour MN, nous aurons : $\mathbf{MN^2 = (4 - x)^2 + (4 - y)^2}$.
Nous cherchons x et y tels que :

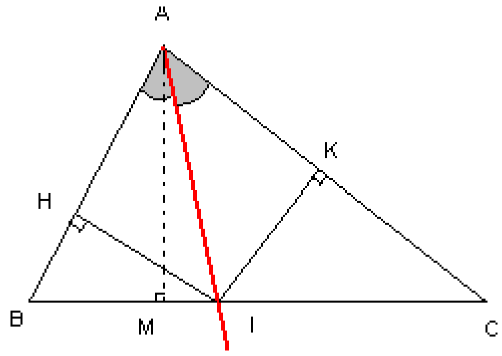
$$\begin{cases} x^2 + 16 = y^2 + 16 \\ x^2 + 16 = (4 - x)^2 + (4 - y)^2 \end{cases}$$

La première équation montre que $x^2 = y^2$ et donc $\mathbf{x = y}$ car ce sont des nombres positifs.
Utilisons la deuxième équation en substituant x à y.
$x^2 + 16 = (4 - x)^2 + (4 - x)^2$
$x^2 + 16 = 16 - 8x + x^2 + 16 - 8x + x^2$
$\mathbf{x^2 - 16x} + 16 = 0$
Pour résoudre cette équation, remplaçons le début $x^2 - 16x$ par $(x - 8)^2 - 64$.
$\mathbf{(x - 8)^2 - 64} + 16 = 0$
$(x - 8)^2 - 48 = 0$
$(x - 8)^2 = 48$, nous avons deux solutions, $x - 8 = \sqrt{48}$ ou bien $x - 8 = -\sqrt{48}$.
$x = 8 + \sqrt{48}$ ne convient pas car cette valeur n'est pas dans [0 ;4].
Solution : $\mathbf{x = y} = 8 - \sqrt{48} = \mathbf{8 - 4\sqrt{3} \approx 1{,}07}$.
Voici la bonne figure.



Remarquons que les triangles (AMB) et (BNC) sont superposables et que (MDN) est un triangle rectangle isocèle.

Exercice 6



La bissectrice d'un angle est l'ensemble des points équidistants des côtés de l'angle.
Nous avons IH = IK.

Aire(AIB) = $\dfrac{AB \times IH}{2}$; Aire(AIC) = $\dfrac{AC \times IK}{2}$

Si on utilise la hauteur AM issue de A, nous avons :

Aire(AIB) = $\dfrac{IB \times AM}{2}$; Aire(AIC) = $\dfrac{IC \times AM}{2}$.

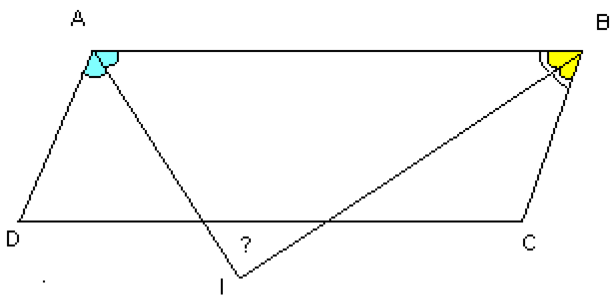
Grâce à ces deux expressions des mêmes aires, nous avons :

$\dfrac{\text{Aire(AIB)}}{\text{Aire(AIC)}} = \dfrac{\frac{AB \times IH}{2}}{\frac{AC \times IK}{2}} = \dfrac{\frac{IB \times AM}{2}}{\frac{IC \times AM}{2}}$, nous simplifions par IH, IK et 2 dans le premier quotient et par AM et 2 dans le deuxième.

Conclusion : $\mathbf{\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{IB}{IC}}$.

Remarque : si nous avons les longueurs des 3 côtés du triangle (ABC), cette propriété de la bissectrice permet de localiser le point I sur [BC].

Exercice 7



(AI) est la bissectrice intérieure de $\hat{A}$ donc mes $D\hat{A}I$ = mes $I\hat{A}B = \dfrac{1}{2}$ mes $D\hat{A}B$.

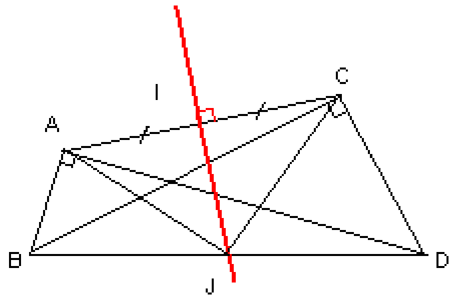
(BI) est la bissectrice intérieure de $\hat{B}$ donc mes $A\hat{B}I$ = mes $I\hat{B}C = \dfrac{1}{2}$ mes $A\hat{B}C$.

Dans un parallélogramme, la somme des mesures de deux angles consécutifs est toujours égale à 180°.

Par exemple ici, mes $D\hat{A}B$ + mes $A\hat{B}C$ = 180° donc $\dfrac{1}{2}$ mes $D\hat{A}B + \dfrac{1}{2}$ mes $A\hat{B}C$ = 90°.

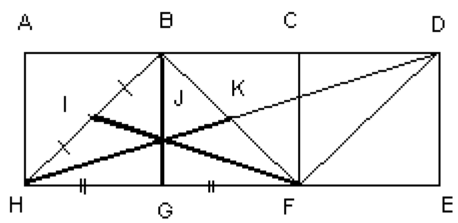
Ceci montre que les angles $\widehat{IAB}$ et $\widehat{ABI}$ sont complémentaires donc **(AIB) est rectangle en I**. Dans le cas où (ABCD) est un rectangle, alors les angles intérieurs mesurent 90°, à ce moment là, mes $\widehat{IAB}$ = mes $\widehat{ABI} = 45°$.
Le triangle (AIB) sera à la fois rectangle et isocèle.

Exercice 8



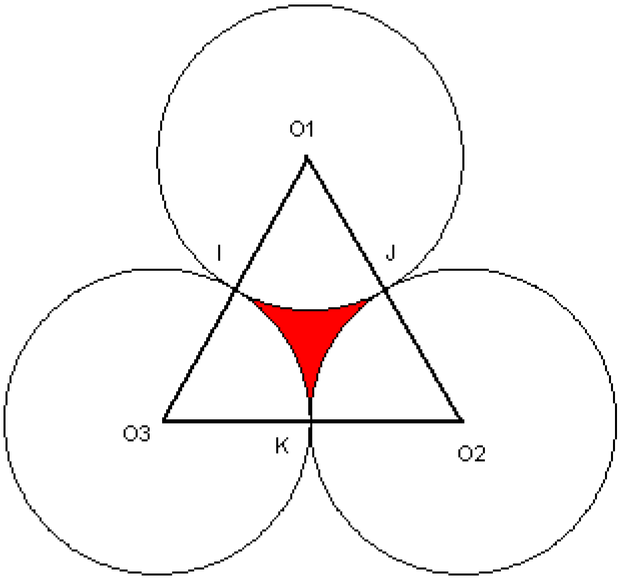
Soit J le milieu de [BD].
Théorème : Dans un triangle rectangle, la médiane relative à l'hypoténuse a pour longueur la moitié de la longueur de l'hypoténuse.
Dans le triangle (ABD), AJ = $\frac{1}{2}BD$; de même, dans le triangle (BCD), CJ = $\frac{1}{2}BD$ donc :
AJ = CJ, le point J est donc équidistant de A et de C or la médiatrice de [AC] est l'ensemble des points équidistants de A et de C.
Conclusion : **J appartient à la médiatrice de [AC]**.
On peut remarquer que dans cet exercice, A,B ,D et C sont cocycliques c'est-à-dire sur un même cercle ce centre J et de rayon $\frac{1}{2}BD$.

Exercice 9



Nous complétons la figure en traçant [BF] et [FG].
Remarquons que les trois carrés ont la même longueur de côtés, AB = BC = CD etc…= a.
(HBDF) est un parallélogramme en effet, BD = HF = 2a et BH = FD = a$\sqrt{2}$ (propriété de la diagonale d'un carré). Les diagonales de ce parallélogramme se coupent en leur milieu donc [HD] coupe [BF] en son milieu K. Dans le triangle (HBF), nous avons 3 médianes, [FI], [HK] et [BG]. Nous savons que les médianes d'un triangle se coupent en un même point que l'on appelle le centre de gravité du triangle, or [HD] coupe [BG] en J, donc [IF] passe par J.
I, F et J sont alignés.
Remarque : il est important de bien connaître les propriétés des droites remarquables dans un triangle : médianes, médiatrices, hauteurs et bissectrices intérieures.

Exercice 10



Ici aussi, il faut compléter la figure. Traçons $[O_1O_2]$, ce segment passe par le point J de tangence des deux cercles (C_1) et (C_2), $O_1O_2 = 1 + 1 = 2$. De même O_1O_3 passe par I et O_2O_3 passe par K, $O_1O_3 = O_2O_3 = 2$. **Il apparaît un triangle équilatéral $(O_1O_2O_3)$**.

En conséquence, les angles $\hat{O}_1$, $\hat{O}_2$ et $\hat{O}_3$ du triangle $(O_1O_2O_3)$ mesurent 60°.

Nous pouvons alors calculer la longueur des trois arcs $\overset{\frown}{IJ}$, $\overset{\frown}{JK}$ et $\overset{\frown}{KI}$.

Théorème : soit un cercle de rayon R, la longueur d'un arc de cercle intercepté par un angle au centre de α sera : $L = \dfrac{2\pi R\times\alpha}{360}$ α en degrés ou αR, si α est en radians.

Le périmètre de la surface curviligne (IJK) sera donc : $P = 3\times\dfrac{2\pi(1)\times 60}{360} = \boldsymbol{\pi}$.

Si l'unité est le centimètre, alors **le périmètre de (IJK) surface curviligne composée de trois arcs de cercles est π cm soit environ 3,14 cm**.

Pour le calcul de l'aire, nous allons procéder par soustraction :
Aire(IJK curviligne) = Aire $(O_1O_2O_3)$ – Aire(des 3 secteurs O_1IJ, O_2JK et O_3KI)
Théorème : soit un cercle de rayon R, l'aire d'un secteur de cercle intercepté par un angle au centre de α sera : $A = \dfrac{\pi R^2\times\alpha}{360}$ α en degrés ou $\dfrac{\alpha R^2}{2}$ si α est en radians.

Théorème : dans un triangle équilatéral de côté a, la hauteur mesure $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

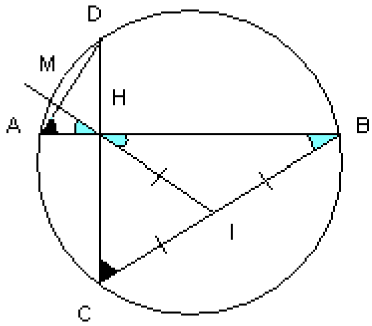
Dans le triangle $(O_1O_2O_3)$, $h = \dfrac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$, donc Aire$(O_1O_2O_3)$ = $\dfrac{\text{Base}\times\text{hauteur}}{2} = \dfrac{2\times\sqrt{3}}{2}$

Aire$(O_1O_2O_3)$ = $\sqrt{3}$.

Aire(3 secteurs) = $3\times\dfrac{\pi(1)^2\times 60}{360} = \dfrac{\pi}{2}$.

Aire((IJK) curviligne) = $\mathbf{A} = \boldsymbol{\sqrt{3} - \dfrac{\pi}{2}}$ **cm² soit environ 0,16 cm²**.

Exercice 11



Le triangle HBC est rectangle en H par hypothèse, [HI] est la médiane relative à l'hypothénuse donc HI = IB = IC. Le triangle (HIB) en particulier est isocèle donc :

mes $\widehat{IHB}$ = mes $\widehat{HBI}$. D'autre part, mes $\widehat{IHB}$ = mes $\widehat{MHA}$ angles opposés par le sommet, donc **mes $\widehat{MHA}$ = mes $\widehat{HBI}$**.

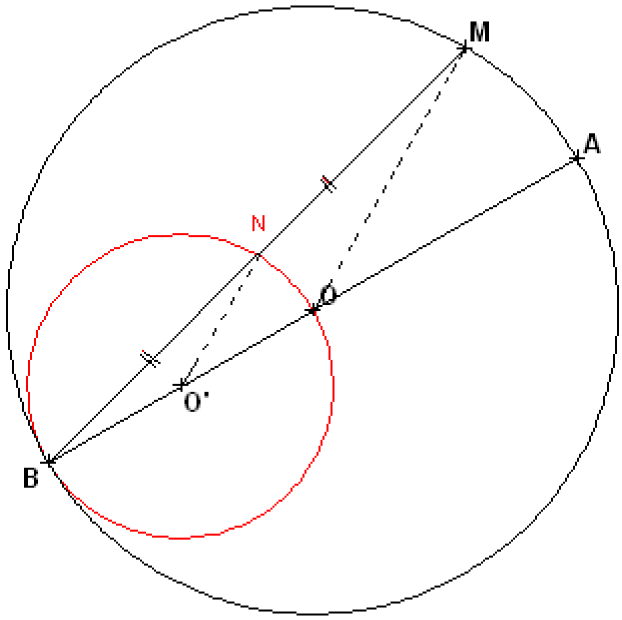
Théorème : Dans un cercle, deux angles inscrits qui interceptent le même arc ont la même mesure.

Conclusion, **mes $\widehat{MAH}$ = mes $\widehat{DCB}$**, ces deux angles sont des angles inscrits dans le cercle (C) qui interceptent tous les deux l'arc BD.

Or les angles $\widehat{HBI}$ et $\widehat{HCB}$ **(**en fait $\widehat{DCB}$) sont complémentaires donc :

mes $\widehat{MAH}$ **+** mes $\widehat{MHA}$ **=** 90°**,** le triangle (MAH) est donc rectangle en M, **(MI) ⊥ (AD)**.

Exercice 12



Le point M se déplace sur le cercle (C) de centre O et de rayon R. N est le milieu de [BM].
Repérons les points fixes : A, B et O sont fixes et M se déplace ainsi que N.
Soit O' le milieu de [OB] ; **O' est un point fixe du problème**.
Traçons [OM] et [O'N], [O'N] est le segment qui joints les milieux de deux côtés dans le triangle (BMO), nous savons alors que O'N = $\frac{1}{2}$ OM. La distance OM reste égal à R quand

M se déplace sur le cercle (C) donc quelque soit la position de M, O’N sera une longueur constante. O’N = $\frac{1}{2}R$.

Le point N reste à la même distance de O’ quand M décrit le cercle (C) donc **N se déplacera sur un cercle de centre O’ et de rayon $\mathbf{\frac{1}{2}R}$** .

Quand nous trouvons un lieu géométrique pour le déplacement d’un point, il faut toujours se poser la question de la réciproque, à savoir ici, tout les points du cercle trouvé conviennent-ils ?

La réponse est oui en effet, quand M est en A, N est en O, quand M est en B, N est en B et si nous prenons un point quelconque du cercle trouvé N, en prolongeant (BN), cette droite coupe (C) en un point M et il est facile de montrer que N est le milieu de [BM].

Les triangles (BNO) et (BMA) sont rectangles respectivement en N et M, ils sont inscrits dans un demi-cercle. (ON) // (AM) car toutes les deux perpendiculaires à (BM). D’après Thalès, $\frac{BN}{BM} = \frac{BO}{BA}$ or BO = $\frac{1}{2}BA$ donc $\frac{BN}{BM} = \frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow$ BM = 2 BN. **N milieu de [BM].**