Indag. Mathem., N.S., 7 (3), 389–417 September 30, 1996

Cohomologie d'intersection des actions toriques simples

par Martintxo Saralegi-Aranguren*

Unidad de Matemáticas, Instituto de Matemáticas y Física Fundamental, Consejo Superior de Investigaciones Científicas, Serrano 123, 28006 Madrid, Espagne
Faculté Jean Perrin, U.R.A. D 751 au C.N.R.S., Université d'Artois, rue Jean Souvraz S.P. 18, 62307 Lens, France

Communicated by Prof. J.J. Duistermaat at the meeting of March 27, 1995

Considérons une action $\Phi : \mathbb{T} \times M \to M$ d'un tore $\mathbb{T}$ sur une variété M. Supposons que cette action est libre. La filtration du complexe des formes différentielles sur M par leur degré vertical détermine la suite spectrale de Leray-Serre $\{E_m\}$. Celle-ci converge vers la cohomologie de M et son second terme E_2 est le produit tensoriel $H^*(M/\mathbb{T}) \otimes H^*(\mathbb{T})$. Ceci n'est plus valable si l'action n'est pas libre. Remarquons que dans ce cas l'espace des orbites $M/\mathbb{T}$ n'est plus forcément une variété mais un ensemble stratifié.

Dans le but d'étendre cette suite spectrale aux autres actions non libres, nous avons traité dans [7] le cas $\mathbb{T} = \mathbb{S}^1$. Là, la suite spectrale dégénère en la suite de Gysin:

$$(1) \qquad \begin{cases} \cdots \longrightarrow IH_{\bar{r}}^{v}(M/\mathbb{T}) \longrightarrow H^{v}(M) \longrightarrow \\ \qquad\qquad \longrightarrow IH_{\bar{r}-\bar{2}}^{v-1}(M/\mathbb{T}) \xrightarrow{\wedge[e]} IH_{\bar{r}}^{v+1}(M/\mathbb{T}) \longrightarrow \cdots, \end{cases}$$

où $[e]$ est la classe d'Euler de Φ, qui est de degré pervers 2, et $\bar{r}$ une perversité quelconque sur $M/\mathbb{T}$. Rappelons que la cohomologie d'intersection $IH_{\bar{r}}^*(M/\mathbb{T})$ est calculée en utilisant les formes différentielles d'intersection ω dont le degré pervers (ainsi que celui de $d\omega$) est majoré par la perversité $\bar{r}$. L'apparition de la cohomologie d'intersection de $M/\mathbb{T}$ (au lieu de $H^*(M/\mathbb{T})$) n'est pas surprenante. En effet, comme les travaux de Goresky et MacPherson le montrent, celle-ci est un outil naturel quand il s'agit de travailler avec des ensembles stratifiés.

* Projet de recherche PB91-0142 DGICYT-Espagne.

L'objectif de ce travail est de poursuivre cette étude, dans le cadre des actions toriques simples (localement 'one or two orbit types', selon la terminologie de [3]). Toujours à l'aide de la filtration du complexe des formes différentielles sur M par son degré vertical, nous construisons, pour chaque perversité $\bar{r}$, une suite spectrale à la Leray-Serre $\{_{\bar{r}}E_m\}$ convergeant vers la cohomologie de M dont le second terme est décrit à l'aide de la cohomologie d'intersection de $M/\mathbb{T}$ et de la cohomologie de $\mathbb{T}$ (pour l'éconcé exact voir Théorème 5.5). Cette suite spectrale donne (1) quand $\mathbb{T} = \mathbb{S}^1$ et coïncide avec la suite spectrale de Leray-Serre si l'action est libre. Nous espérons dans un prochain travail étendre les résultats de ce travail aux actions toriques générales.

La description du second terme $_{\bar{r}}E_2$ est comme suit. Supposons que l'action Φ ne possède qu'une strate singulière S (ensemble des points fixes d'un sous-groupe d'isotropie $\mathbb{T}_S \subset \mathbb{T}$, que l'on supposera non discret). Nous choisissons une base $B = \{a_1, \dots, a_n\}$ de l'algèbre de Lie A de $\mathbb{T}$ avec $a_1 \in A_S$, algèbre de Lie de $\mathbb{T}_S$. Le degré pervers de (la forme d'Euler associée à) a_1 est 2 tandis que celui des autres éléments de B est 0. Le second terme de la suite spectrale s'écrit alors:

$$\begin{aligned} {}_{\bar{r}}E_2^{v,u} \simeq & \{IH^v_{\bar{r}-\bar{2}}(M/\mathbb{T}) \otimes (\Lambda^1(a_1) \otimes \Lambda^{u-1}(a_2, \dots, a_n))\} \\ & \oplus \{IH^v_{\bar{r}}(M/\mathbb{T}) \otimes \Lambda^u(a_2, \dots, a_n)\}, \end{aligned}$$

où $H^*(\mathbb{T})$ est identifié à l'algèbre libre $\Lambda^*(a_1, \dots, a_n)$. On remarquera que dans chacune des parties de la somme précédente le degré pervers se conserve. Cet espace vectoriel est une sorte de produit tensoriel, où la perversité du facteur de gauche est déterminée par le facteur de droite; nous le noterons $IH^*_{\bar{r}}(M/\mathbb{T}) \otimes_B H^*(\mathbb{T})$. Le produit $\otimes_B$ sera appelé produit pertensoriel (pervers + tensoriel).

Dans le cas de plusieurs strates, nous pouvons étendre cette démarche et écrire le deuxième terme de la suite spectrale comme un produit pertensoriel, sous la condition $\#(B \cap A_S) = 1$ pour toute strate S de M avec $\dim \mathbb{T}_S = 1$. Le degré pervers des éléments de B est toujours 0, sauf pour l'un d'entre eux, a_S, dont le degré est 2. Ainsi, chaque $a = a_{i_1} \cdots a_{i_u} \in B_u$ (base canonique de $H^u(\mathbb{T})$) détermine sur $M/\mathbb{T}$ la perversité $\bar{a}$ définie par

$$\bar{a}(\pi(S)) = \begin{cases} 2 & \text{si } a_S \in \{a_{i_1}, \dots, a_{i_u}\} \\ 0 & \text{si } a_S \notin \{a_{i_1}, \dots, a_{i_u}\}. \end{cases}$$

Dans ce cas $_{\bar{r}}E_2^{v,u}$ est isomorphe au produit pertensoriel:

$$IH^v_{\bar{r}}(M/\mathbb{T}) \otimes_B H^u(\mathbb{T}) = \bigoplus_{a \in B_u} IH^v_{\bar{r}-\bar{a}}(M/\mathbb{T}) \otimes \langle a \rangle,$$

où $\langle a \rangle \subset H^u(\mathbb{T})$ est le sous-espace engendré par a.

Dans le cas général, la situation est plus compliquée et le produit pertensoriel ne suffit pas à déterminer $_{\bar{r}}E_2$. En effet, tout élément de B a un degré pervers 2 tandis qu'il y a des combinaisons linéaires des éléments de la base dont le degré pervers est 0. Ces relations empêchent d'écrire $_{\bar{r}}E_2$ comme un produit pertensoriel. Néanmoins, nous montrons dans ce travail que la deuxième terme de la suite spectrale s'envoie naturellement dans le produit pertensoriel de façon a être déterminé par la suite exacte longue

$$\begin{aligned}\cdots \longrightarrow IH_{\bar{r}}^{v-1}(M/\mathbb{T}) \otimes_{\mathcal{B}} H^{u}(\mathbb{T}) \longrightarrow \mathcal{Q}_{\bar{r}}^{v-1,u} \longrightarrow {}_{\bar{r}}E_2^{v,u} \longrightarrow \\ \longrightarrow IH_{\bar{r}}^{v}(M/\mathbb{T}) \otimes_{\mathcal{B}} H^{u}(\mathbb{T}) \longrightarrow \cdots .\end{aligned}$$

Le troisième terme de cette suite exacte est le terme résiduel suivant:

$$\mathcal{Q}_{\bar{r}}^{v,u} = \bigoplus_{s \in \mathcal{S}} \{H^{v-2[\bar{r}(\pi(S))/2]}(S/\mathbb{T})\}^{\binom{n-1}{n-u} - \binom{n-r_S}{n-u}}$$

où r_S est la dimension du plus petit sous-espace de A contenant A_S et engendré par un sous-ensemble de B, $[-]$ est la partie entière, $\{-\}^{\leq 0} = 0$ et $\binom{a}{b} = 0$ si $b < 0$ ou $b > a$ (voir Théorème 5.5 pour l'énoncé exact). Pour deux perversités différentes $\bar{q} \leq \bar{r}$ nous avons construit deux suites spectrales $\{_{\bar{q}}E_m\}$ et $\{_{\bar{r}}E_m\}$ qui convergent vers le même but. Elles sont différentes mais liées, comme le montre le Théorème 5.8.2. Nous terminons le travail en étudiant la dégénérescence de la suite spectrale $\{_{\bar{r}}E_m\}$; nous montrons dans le Théorème 5.9.1 que ce fait équivaut à l'existence d'un feuilletage singulier transverse aux orbites de l'action.

L'étude cohomologique que nous venons de faire montre que les actions toriques simples sont bien plus compliquées que les actions du cercle. Pour étudier le deuxième terme de la suite spectrale de Leray-Serre nous avons introduit la notion de produit pertensoriel; dans certains cas cette notion suffit pour décrire ce deuxième terme. Mais, si le nombre de strates est trop grand, un terme résiduel apparaît; terme qui est plus complexe au fur et à mesure que l'action est tordue (dans le sens que les sous-groupes d'isotropie sont nombreux). Dans un travail à venir, nour prévoyons de construire une suite de Leray-Serre pour toute action d'un groupe de Lie compact. Nous pensons décrire le deuxième terme de cette suite spectrale en termes du produit pertensoriel que nous venons d'introduire dans le présent travail. La situation sera bien sûr plus compliquée du fait que les strates ne seront plus isolées mais emboîtées les unes sur les autres.

L'organisation de ce travail est la suivante. Dans la première section nous présentons les actions toriques simples et leur relation avec les ensembles stratifiés. La cohomologie d'intersection, utilisant des formes différentielles et la nouvelle notion de perversité de [8], est introduite dans la deuxième section. Le deuxième terme de la suite spectrale que nous construisons est décrit à l'aide du produit pertensoriel, notion que nous introduisons dans la section 3. Le principal pilier de la construction de la suite spectrale $\{_{\bar{r}}E_m\}$ est celui des formes différentielles d'intersection invariantes; elles sont étudiées dans la section 4. La dernière section est consacrée au calcul et à l'étude du terme $_{\bar{r}}E_2$.

L'auteur voudrait remercier le Département de Mathématiques de l'Université de Purdue pour lui avoir permis de réaliser cet article au sein d'une agréable ambiance de travail.

Tout au long de ce travail, par variété nous entendrons une variété sans bord, connexe et différentiable (de classe C^∞). Nous désignerons par $\mathbb{T}$ un tore de dimension n. Une fibration sera toujours localement triviale. Toute action est supposée effective.

1. ACTIONS TORIQUES SIMPLES

Etant donnée $\Phi : \mathbb{T} \times M \to M$, une action différentiable du tore $\mathbb{T}$ sur une variété M, il y a une façon naturelle d'associer à M et à l'espace des orbites $M/\mathbb{T}$ une structure d'ensemble stratifié. Si l'action Φ est simple, ces ensembles stratifiés possèdent des propriétés plus riches. Ceci fait l'objet de cette section.

1.1. Ensembles stratifiés simples. Considérons E un ensemble stratifié (cf. [11]). Nous dirons que E est *simple* s'il possède une strate R dense (dite *régulière*) et si toute autre strate S est fermée (dite *singulière*). La deuxième condition implique que les strates singulières sont séparables par ouverts. La dimension de E est, par definition, $\dim R$. On posera $\mathcal{S}$ la famille des strates singulières de E.

Il est bien connu (cf. [11]) que pour chaque strate $S \in \mathcal{S}$ il existe un voisinage $\mathcal{T}_S$ de S, une variété compacte L_S, appelée *entrelac* de S, et une fibration $\tau_S : \mathcal{T}_S \to S$ vérifiant:

(a) la fibre de τ_S est le *cône* $cL_S = L_S \times [0,1[/L_S \times \{0\}$,

(b) la restriction de τ_S à S est l'identité,

(c) le groupe structural de τ_S est $Diff(L_S)$,

(d) $\mathcal{T}_S \cap \mathcal{T}_{S'} = \emptyset$ si $S \neq S'$.

La famille $\{\mathcal{T}_S/S \in \mathcal{S}\}$ est une *famille de tubes*. Observons que, d'après (c), il existe une application différentiable $r_S : (\mathcal{T}_S - S) \to]0,1[$ telle que la restriction $r_S : r_S^{-1}(]0,\epsilon[) \to S$, où $\epsilon \in]0,1[$, est une fibration différentiable de fibre $L_S \times]0,\epsilon[$. Nous écrivons $M_S = r_S^{-1}(]0,\frac{1}{2}[)$, qui est 'la moitié' de $\mathcal{T}_S$.

1.2. Actions simples. Nous dirons qu'une action différentiable $\Phi : \mathbb{T} \times M \to M$ du tore $\mathbb{T}$ sur une varité M est *simple* si, pour chaque $x \in M$, l'action du sous-groupe d'isotropie $\mathbb{T}_x$ sur l'espace tangent T_xM possède un ou deux types d'orbites (cf. [3, pag. 246]). En d'autres termes, l'action de $\mathbb{T}_x$ sur $T_xM - \{$vecteurs fixés par $\mathbb{T}_x\}$ est libre.

La relation d'équivalence '$x \sim y$ si et seulement si $\mathbb{T}_x = \mathbb{T}_y$' définit une partition de M en sous-variétés invariantes. Elles sont fermées sauf une qui est un ouvert dense. L'action Φ induit donc sur M une structure naturelle d'ensemble stratifié simple. Pour chaque strate S de M nous écrirons $\mathbb{T}_S$ le sous-groupe d'isotropie d'un point de S (et donc de tout point de S).

Vu que chaque strate singulière S est une sous-variété invariante, nous construisons un voisinage tubulaire $(\mathcal{T}_S, \tau_S, S, D^{\ell_S+1})$ vérifiant:

(i) $\mathcal{T}_S$ est un voisinage de S.

(ii) $\tau_S : \mathcal{T}_S \to S$ est une fibration différentiable de fibre le disque ouvert D^{ℓ_S+1} et dont la restriction de τ_S à S est l'identité.

(iii) Il existe une action orthogonale $\Phi^S : \mathbb{T}_S \times \mathbb{S}^{\ell_S} \to \mathbb{S}^{\ell_S}$ et un atlas $\mathcal{A}_S = \{(U,\varphi)\}$ tels que toute carte $\varphi : \tau_S^{-1}(U) \to U \times D^{\ell_S+1}$ soit $\mathbb{T}_S$-équivariante:

$\varphi g \varphi^{-1}(x,[\theta,r]) = (x,[\Phi^S(g,\theta),r])$, si $g \in \mathbb{T}_S$ et $(x,[\theta,r]) \in U \times c\mathbb{S}^{\ell_S}$. Ici, on a identifié D^{ℓ_S+1} avec le cône $c\mathbb{S}^{\ell_S}$ et noté $[\theta, r]$ un élément générique.

(iv) Si $g \in \mathbb{T}$ et $\varphi_j : \tau_S^{-1}(U_j) \to U_j \times c\mathbb{S}^{\ell_S}$, $j = 1,2$, sont deux cartes avec $g \cdot U_1 \subset U_2$ alors il existe une application $\gamma : U_1 \to O(\ell_S + 1)$ telle que $\varphi_2 g \varphi_1^{-1}(x,[\theta,r]) = (g \cdot x, [\gamma(x) \cdot \theta, r])$ pour tout $(x,[\theta,r]) \in U_1 \times c\mathbb{S}^{\ell_S}$.

La condition (iii) implique que le groupe structural de $\mathcal{A}_S$ est le centralisateur $\mathcal{Z}_S$ de $\mathbb{T}_S$ dans $O(\ell_S + 1)$. La condition (iv) signifie que le groupe $\mathbb{T}$ agit sur $\mathcal{T}_s$ par des morphismes de fibration à groupe structural; elle implique aussi que l'application τ_S est équivariante. Remarquons que l'action Φ^S est libre (ce qui fait la simplicité de Φ); ainsi, chaque sous-groupe $\mathbb{T}_S$ est ou fini ou isomorphe au cercle $\mathbb{S}^1$ (cf. [3, pag. 153]). Nous écrirons $\mathcal{S}$ la famille des strates singulières de M et $\mathcal{S}_j = \{S \in \mathcal{S} / \dim \mathbb{T}_S = j\}$, pour $j = 0, 1$.

Nous fixons pour la suite une famille $\{\mathcal{T}_S / S \in \mathcal{S}\}$ de voisinages tubulaires avec $\mathcal{T}_S \cap \mathcal{T}_{S'} \neq \emptyset$ si $S \neq S'$. Par $\pi : M \to M/\mathbb{T}$ nous noterons la projection canonique de M sur l'espace des orbites $M/\mathbb{T}$. Cet espace hérite naturellement de M une structure d'ensemble stratifié simple, les strates étant $\{\pi(S)/S$ strate de $M\}$. En fait, on a la

Proposition 1.3. *La famille* $\{(\pi(\mathcal{T}_S), \rho_S, \pi(S), c\mathbb{S}^{\ell_S}/\mathbb{T}_S)/S \in \mathcal{S}\}$, *où* $\rho_S(\pi(x)) = \pi(\tau_S(x))$, *est une famille de tubes de* $M/\mathbb{T}$.

Démonstration. Il suffit de montrer que, pour tout $S \in \mathcal{S}$, l'application $\rho_S : \pi(\mathcal{T}_S) \to \pi(S)$ est une fibration de fibre le cône $c\mathbb{S}^{\ell_S}/\mathbb{T}_S$ ayant $Diff(\mathbb{S}^{\ell_S}/\mathbb{T}_S)$ comme groupe structural. Soit $\pi(x_0)$ un point de $\pi(S)$. Etant donné que la restriction $\pi : S \to \pi(S)$ est une fibration différentiable (de fibre $\mathbb{T}/\mathbb{T}_S$), nous trouvons un voisinage $V \subset \pi(S)$ de $\pi(x_0)$ et une section différentiable $\sigma : V \to S$ de π. Nous pouvons supposer $V = \pi(U)$ pour une carte $(U, \varphi) \in \mathcal{A}_S$. Pour tout point x de U il existe $g \in \mathbb{T}$ avec $g \cdot x \in \sigma(V)$. L'élément g n'est pas unique, mais $g' \cdot x \in \sigma(V)$ implique $g^{-1}g' \in \mathbb{T}_S$. Vu que τ_S est équivariant, nous en déduisons $\pi\tau_S^{-1}\sigma(V) = \tau_S^{-1}\sigma(V)/\mathbb{T}_S$. La restriction $\varphi : \tau_S^{-1}\sigma(V) \to \sigma(V) \times c\mathbb{S}^{\ell_S}$ est un difféomorphisme $\mathbb{T}_S$-équivariant et le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
\tau_S^{-1}\sigma(V) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & \sigma(V) \times c\mathbb{S}^{\ell_S} \arrow[d, "\Pi"] \\
\rho_S^{-1}(V) \arrow[r, "\psi"] & V \times c\mathbb{S}^{\ell_S}/\mathbb{T}_S
\end{tikzcd}$$

est commutatif. Ici on a noté $\Pi(y,[\theta,r]) = (\pi(y),[p(\theta),r])$ et $p : \mathbb{S}^{\ell_S} \to \mathbb{S}^{\ell_S}/\mathbb{T}_S$ la projection canonique. Par conséquent, l'application ψ est un homéomorphisme qui vérifie $pr_V\, \psi\pi(x) = \pi\tau_S(x) = \rho_S\, \pi(x)$, où $pr_V : V \times c\mathbb{S}^{\ell_S}/\mathbb{T}_S \to V$ est la projection canonique. Ainsi, l'application ρ_S est une fibration de fibre le cône $c\mathbb{S}^{\ell_S}/\mathbb{T}_S$, ayant $\mathcal{B}_{\pi(S)} = \{(V, \psi)\}$ comme atlas. Finalement, puisque les cocycles de $\mathcal{A}_S$ prennent ses valeurs dans $\mathcal{Z}_S$, les cocycles de $\mathcal{B}_{\pi(S)}$ prennent ses valeurs dans $Diff(\mathbb{S}^{\ell_S}/\mathbb{T}_S)$. $\square$

1.4. Posons A l'algèbre de Lie de $\mathbb{T}$. Pour chaque $S \in \mathcal{S}$ on écrira A_S l'algèbre de Lie de $\mathbb{T}_S$. Une base B de A est *ona* si $\#(B \cap A_S) = 1$ pour chaque $S \in \mathcal{S}_1$. Le calcul du deuxième terme ${}_{\bar{T}}E_2$ de la suite spectrale que nous effectuons dans ce travail nécessite d'un choix d'une base de l'algèbre de Lie A. Si cette base est ona, le terme ${}_{\bar{T}}E_2$ est décrit directement comme produit pertensoriel. Dans le cas général, le terme ${}_{\bar{T}}E_2$ est determiné par une suite exacte longue où les autres termes sont un produit pertensoriel et un terme résiduel (cf. Théorème 5.5).

L'existence d'une base ona est équivalente à la condition: la famille $\{A_S/S \in \mathcal{S}_1\}$ est libre.

2. COHOMOLOGIE D'INTERSECTION

Nous rappelons la notion de cohomologie d'intersection [4] qui utilise la notion de perversité introduite par MacPherson en [8].

2.1. Degré pervers. Soit $\kappa : N \to C$ une submersion différentiable entre deux variétés différentiables N et C. Pour chaque forme différentielle $\omega \neq 0$ sur N, nous définissons le *degré pervers* de ω, noté $\|\omega\|_C$, comme le plus petit entier k vérifiant:

> $i_{\xi_0} \cdots i_{\xi_k} \omega \equiv 0$ pour toute famille $\xi_0, \ldots, \xi_k$ de champs de vecteurs sur N tangents aux fibres de κ.

Ici, nous avons écrit i_{ξ_j} le produit intérieur par ξ_j. Nous poserons $\|0\|_C = -\infty$. Pour $\alpha, \beta \in \Omega^*(N)$, complexe des formes différentielles de N, nous avons les relations:

$$(2) \qquad \|\alpha + \beta\|_C \leq \max(\|\alpha\|_C, \|\beta\|_C) \qquad \text{et} \qquad \|\alpha \wedge \beta\|_C \leq \|\alpha\|_C + \|\beta\|_C.$$

2.2. Soit E un ensemble stratifié simple. Une *perversité* est une application $\bar{q} : \mathcal{S} \to \mathbb{Z}$ (cf. [8]). Pour chaque entier ℓ, on posera $\bar{\ell}$ la perversité constante définie par $\bar{\ell}(S) = \ell$. Une forme différentielle ω sur la strate régulière R de E est une *forme différentielle de $\bar{q}$-intersection* (ou simplement *forme différentielle d'intersection*) si, pour chaque $S \in \mathcal{S}$, la restriction de ω à M_S vérifie:

$$\max\{\|\omega|_{M_S}\|_S, \|d\omega|_{M_S}\|_S\} \leq \bar{q}(S),$$

relativement à $\tau_S : M_S \to S$. Pour simplifier la notation nous écrirons $\|\omega|_{M_S}\|_S = \|\omega\|_S$. Le complexe des formes différentielles de $\bar{q}$-intersection sera noté $\Omega^*_{\bar{q}}(E)$. La cohomologie du complexe $\Omega^*_{\bar{q}}(E)$, notée $IH^*_{\bar{q}}(E)$, est la *cohomologie d'intersection* de E.

Remarquons que, dans le cas où $\mathcal{S} = \emptyset$, le complexe $\Omega^*_{\bar{q}}(E)$ (resp. $IH^*_{\bar{q}}(E)$) coïncide avec $\Omega^*(E)$, complexe de deRham de E (resp. avec $H^*(E)$, cohomologie de deRham de E).

2.3. La cohomologie d'intersection jouit des propriétés suivantes (voir [8] et [9]):

- $IH^*_{\bar{q}}(E) \cong H^*(E)$ si E est une variété et $\bar{0} \leq \bar{q} \leq \bar{t}$. On a écrit $\bar{t}$ la perversité définie par $\bar{t}(S) = \dim L_S - 1$.

• Si chaque entrelac L_S est connexe (c'est-à-dire, E est *normal*) alors $IH^*_{\bar{0}}(E) \cong H^*(E)$, cohomologie à coefficients réels de E.

• $IH^*_{\bar{q}}(E) \cong \mathrm{Hom}(IH^{\bar{p}}_*(E), \mathbb{R})$ si $\bar{p}+\bar{q}=\bar{t}$ (perversités complémentaires).

2.4. Si $E' \subset E$ est un *sous-ensemble stratifié* (ensemble stratifié avec la structure induite), toute perversité $\bar{q}$ de E induit par restriction une perversité sur E', qui sera encore notée $\bar{q}$. L'application restriction $\mathcal{R} : \Omega^*_{\bar{q}}(E) \to \Omega^*_{\bar{q}}(E')$ est bien définie et induit un morphisme $\mathcal{R}^* : IH^*_{\bar{q}}(E) \to IH^*_{\bar{q}}(E')$. Quelques exemples de sous-ensemble stratifié sont: $U \subset R$ ouvert, l'entrelac L_S, le cône cL_S, $\tau_S^{-1}(W)$ avec $W \subset S$ ouvert, ...

2.5. Une *fonction contrôlée* $f : E \to \mathbb{R}$ est une application continue, différentiable sur chaque strate, dont la restriction aux fibres de chaque $\tau_S : M_S \to S$ est constante (cf. [12]). Nous avons donc la relation $\max\{\|f\|_S, \|df\|_S\} \leq 0$. Rappelons que tout recouvrement de E, par des sous-ensembles stratifiés ouverts, possède une partition de l'unité subordonnée constituée de fonctions contrôlées [12, pag. 8].

Nous montrons la première relation entre les formes différentielles d'intersection de M et celles de $M/\mathbb{T}$. Ecrivons $M - \Sigma$ et $\pi(M-\Sigma)$ les strates régulières de M et $M/\mathbb{T}$ respectivement (ici $\Sigma = \bigcup\{S / S \in \mathcal{S}\}$). Fixons $\bar{r}$ une perversité sur $M/\mathbb{T}$ et posons $\bar{q}$ la *perversité induite* sur M définie par $\bar{q}(S) = \bar{r}(\pi(S))$.

Proposition 2.6. *Pour toute forme différentielle $\alpha \in \Omega(\pi(M-\Sigma))$ et pour tout $S \in \mathcal{S}$ nous avons*:

(3) $\qquad \|\pi^*\alpha\|_S = \|\alpha\|_{\pi(S)}.$

L'application $\pi^* : \Omega^*_{\bar{r}}(M/\mathbb{T}) \to \Omega^*_{\bar{q}}(M)$ est bien définie.

Démonstration. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} M_S - S & \xrightarrow{\ \tau_S\ } & S \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi} \\ \pi(M_S - S) & \xrightarrow{\ \rho_S\ } & \pi(S) \end{array}$$

où $S \in \mathcal{S}$. Etant donné que la restriction de π aux fibres de τ_S est une submersion différentiable $((\mathbb{S}^{\ell_S} \times]0, \frac{1}{2}[) \mapsto (\mathbb{S}^{\ell_S}/\mathbb{T}_S \times]0, \frac{1}{2}[))$, nous avons la relation $\pi_*\{\mathrm{Ker}(\tau_S)_*\} = \mathrm{Ker}(\rho_S)_*$. Ainsi, pour toute forme différentielle $\alpha \in \Omega^*(\pi(M-\Sigma))$ nous pouvons écrire (3). Nous en déduisons que l'application $\pi^* : \Omega^*_{\bar{r}}(M/\mathbb{T}) \to \Omega^*_{\bar{q}}(M)$ est bien définie. □

3. PRODUIT PERTENSORIEL

Le deuxième terme de la suite spectrale que nous construisons dans ce travail est décrit à l'aide du produit pertensoriel, notion que nous introduisons maintenant.

3.1. Définition. Considérons E un ensemble stratifié. Fixons V un espace vectoriel et B une base de V. Une *distinction* est une application $D : \mathcal{S} \to \mathcal{P}(B)$, où $\mathcal{P}(B)$ dénote la famille des sous-ensembles de B. Pour chaque $v \in B$, cette distinction détermine sur E la perversité suivante:

$$\bar{v}(S) = \begin{cases} 2 & \text{si } v \in D(S) \\ 0 & \text{si } v \notin D(S). \end{cases}$$

Soit $\bar{r}$ une perversité sur E. Les espaces vectoriels

$$\Omega^*_{\bar{r}}(E) \otimes_D V = \bigoplus_{v \in B} \Omega^*_{\bar{r}-\bar{v}}(E) \otimes \langle v \rangle,$$

$$IH^*_{\bar{r}}(E) \otimes_D V = \bigoplus_{v \in B} IH^*_{\bar{r}-\bar{v}}(E) \otimes \langle v \rangle$$

sont appelés *produits pertensoriels*. Ici, $\langle v \rangle$ dénote le sous-espace de V engendré par v. Le produit pertensoriel est donc une sorte de produit tensoriel où la perversité du terme de gauche est déterminée par le terme de droite. En particulier, si $\mathcal{S} = \emptyset$ ou bien D est l'application constante $\emptyset$, alors $\Omega^*_{\bar{r}}(E) \otimes_D V = \Omega^*_{\bar{r}}(E) \otimes V$.

3.2. Produits pertensoriels dans l'espace d'orbites. Dans ce travail, l'ensemble stratifié E sera $M/\mathbb{T}$ (ou bien un sous-ensemble stratifié de $M/\mathbb{T}$) et $V = H^*(\mathbb{T})$. La base de V est determinée comme suit. Nous fixons pour la suite une base $B = \{a_1, \ldots, a_n\}$ de l'algèbre de Lie A. Nous écrirons $(- \mid -)$ le seul produit scalaire de A pour lequel B est une base orthonormale. La base B détermine, pour chaque $u \geq 0$, une base B_u de $H^u(\mathbb{T})$ (où on identifie $H^*(\mathbb{T})$ avec l'algèbre graduée $\Lambda^*(a_1, \ldots, a_n)$) de la façon suivante: $B_0 = \{1\}$ et $B_u = \{a_{i_1} \cdots a_{i_u} / 1 \leq a_{i_1} < \cdots < a_{i_u} \leq n\}$ si $u \geq 1$. Remarquons que B_1 est en fait B. Finalement la famille $B_* = \bigcup_{u \geq 0} B_u$ est la base de $H^*(\mathbb{T})$ que nous cherchons. Les principales distinctions utilisées dans ce travail sont les deux suivantes.

- $\mathcal{B} : \mathcal{S} \to \mathcal{P}(B_*)$ définie par $\mathcal{B}(S) = \{a_{i_1} \cdots a_{i_u} \in B_* / 0 \neq A_S \subset \langle a_{i_1}, \ldots, a_{i_u} \rangle, u \geq 1\}$. Ici, $\langle a_{i_1}, \ldots, a_{i_u} \rangle$ dénote le sous-espace de A engendré par $\{a_{i_1}, \ldots, a_{i_u}\}$. En particulier $\mathcal{B}(S) = \emptyset$ si $S \in \mathcal{S}_0$. Ceci donne le produit pertensoriel $IH^*_{\bar{r}}(M/\mathbb{T}) \otimes_{\mathcal{B}} H^*(\mathbb{T})$.
- $\boldsymbol{B} : \mathcal{S} \to \mathcal{P}(B_*)$ définie par $\boldsymbol{B}(S) = \{a_{i_1} \cdots a_{i_u} \in B_* / \{a_{i_1}, \ldots, a_{i_u}\} \not\subset A_S^{\perp}, u \geq 1\}$, où $A_S^{\perp}$ est le sous-espace de A orthogonal à A_S. En particulier $\boldsymbol{B}(S) = \emptyset$ si $S \in \mathcal{S}_0$. Ceci donne le produit pertensorial $IH^*_{\bar{r}}(M/\mathbb{T}) \otimes_{\boldsymbol{B}} H^*(\mathbb{T})$.

Si la base B est ona, alors $\mathcal{B} = \boldsymbol{B}$ et donc $IH^*_{\bar{r}}(M/\mathbb{T}) \otimes_{\boldsymbol{B}} H^*(\mathbb{T}) = IH^*_{\bar{r}}(M/\mathbb{T}) \otimes_{\mathcal{B}} H^*(\mathbb{T})$.

4. FORMES DIFFERENTIELLES D'INTERSECTION INVARIANTES

Pour une action libre, le complexe des formes différentielles invariantes $I\Omega^*(M)$ est naturellement isomorphe au produit tensoriel $\Omega^*(M/\mathbb{T}) \otimes \Omega^*(\mathbb{T})$. En outre, l'inclusion $I\Omega^*(M) \subset \Omega^*(M)$ est une équivalence d'homotopie. L'utilisation de ce complexe est une simplification importante à l'heure de construire la suite spectrale. Cette section est devouée à l'étude du complexe des formes différentielles d'intersection invariantes $I\Omega^*_{\bar q}(M)$.

4.1. Définitions. Pour chaque $a \in A$, le champ de vecteurs X_a est défini par $X_a = T_e \Phi_x(a)$, où $\Phi_x(g) = g \cdot x$, est un *champ fondamental* de Φ. Puisque $\mathbb{T}$ est abelien, le champ X_a est invariant. Son flot est donné par l'action de $\mathbb{T}$, il est donc tangent aux orbites de l'action. Ainsi, X_a est tangent aux strates de Φ. La restriction de X_a à $M - \Sigma$ n'a pas de zéros (pourvu que $a \neq 0$!). Etant donné que chaque application τ_S est équivariante, nous obtenons la relation $(\tau_S)_* X_a = X_a \circ \tau_S$. Remarquons aussi que l'application $X : A \to \Xi(M)$ (algèbre de Lie des champs de vecteurs de M) définie par $a \mapsto X_a$, est un morphisme d'algèbres de Lie.

Le sous-complexe des formes différentielles invariantes

$$\begin{aligned} I\Omega^*(M) &= \{\omega \in \Omega^*(M)/g^*\omega = \omega \text{ si } g \in \mathbb{T}\} \\ &= \{\omega \in \Omega^*(M)/L_{X_a}\omega = 0 \text{ si } a \in A\} \end{aligned}$$

calcule la cohomologie de M (voir par exemple [6]). Nous prouvons un résultat similaire pour

$$I\Omega^*_{\bar q}(M) = \{\omega \in \Omega^*_{\bar q}(M)/L_{X_a}\omega = 0 \text{ pour tout } a \in A\}.$$

Proposition 4.2. *Pour chaque perversité $\bar q$ avec $\bar 0 \le \bar q \le \bar t$ on a $H^*(I\Omega^{\cdot}_{\bar q}(M)) \cong H^*(M)$.*

Démonstration. Il suffit de prouver que l'inclusion $I\Omega^*_{\bar q}(M) \hookrightarrow \Omega^*_{\bar q}(M)$ induit un isomorphisme en cohomologie (cf. § 2.3). Rappelons que la restriction de Φ à $M - \Sigma$ est une action libre. Les opérateurs, utilisés dans [6] pour prouver que l'inclusion $I\Omega^*(M - \Sigma) \hookrightarrow \Omega^*(M - \Sigma)$ induit un isomorphisme en cohomologie, sont des compositions d'opérateurs du type $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ et $\mathcal{L}_3$ que nous décrivons maintenant. Il suffira de montrer qu'ils envoient les formes différentielles d'intersection sur les formes différentielles d'intersection.

Pour chaque variété N, nous considérons sur le produit $N \times M$ l'action de $\mathbb{T}$ définie par $g \cdot (x, y) = (x, g \cdot y)$. Posons $pr_N : N \times M \to N$ et $pr_M : N \times M \to M$ les projections canoniques. On considérera sur $N \times M$ le système de tubes $\{\tau_{N \times S} \equiv (\text{identité sur } N) \times \tau : N \times \mathcal{T}_S \to N \times S\}_{S \in \mathcal{S}}$. La perversité $\bar q$ induit sur $N \times M$ la perversité $N \times S \mapsto \bar q(S)$, que nous écrirons aussi $\bar q$.

- $\mathcal{L}_1 : \Omega^*(N \times (M - \Sigma)) \to \Omega^*(M - \Sigma)$ est définie par $\mathcal{L}_1\omega = \fint_N \omega \wedge pr_N^* \Delta$, où $\Delta \in \Omega^*(N)$ est une forme différentielle à support compact et $\fint_N$ est l'intégration le long des fibres de pr_M.
- $\mathcal{L}_2 : \Omega^*(N \times (M - \Sigma)) \to \Omega^{*-1}(N \times (M - \Sigma))$ est définie par $\mathcal{L}_2\omega = \int_0^1 (H^*\omega)(x, y, t)(\partial/\partial t) \wedge dt$ où $H : N \times [0, 1] \times M \to N \times M$ est une application de la forme $H(x, t, y) = (H_0(x, t), y)$, avec H_0 différentiable.
- $\mathcal{L}_3 : \Omega^*(M - \Sigma) \to \Omega^*(\mathbb{T} \times (M - \Sigma))$ est définie par $\mathcal{L}_3\omega = \Phi^*\omega$.

Nous montrons ensuite que chaque $\mathcal{L}_i$ envoie les formes différentielles d'intersection sur les formes différentielles d'intersection.

• Soit $\omega \in \Omega^*_{\bar q}(N \times M)$. Les fibres de $\tau_{N \times S}$ sont incluses dans les fibres de pr_N. Ainsi, $pr_N^* \Delta \in \Omega^*_{\bar 0}(N \times M)$ et donc $\omega \wedge pr_N^* \Delta \in \Omega^*_{\bar q}(N \times M)$ (cf. (2)). L'égalité $(pr_M)_* \{\mathrm{Ker}(\tau_{N \times S})_*\} = \mathrm{Ker}(\tau_S)_*$ implique que l'opérateur $⨍_N$ envoie $\Omega^*_{\bar q}(N \times M)$ dans $\Omega^*_{\bar q}(M)$. D'où $\mathcal{L}_1 \omega \in \Omega^*_{\bar q}(M)$.

• Soit $\omega \in \Omega^*_{\bar q}(N \times M)$. L'application H envoie les fibres de $\tau_{N \times [0,1] \times S}$ sur les fibres de $\tau_{N \times S}$. Ainsi, $H^* \omega \in \Omega^*_{\bar q}(N \times [0,1] \times M)$. L'égalité $(pr_{N \times M})_* \{\mathrm{Ker}(\tau_{N \times [0,1] \times S})_*\} = \mathrm{Ker}(\tau_{N \times S})_*$ implique que $\mathcal{L}_2 \omega$ appartient à $\Omega^*_{\bar q}(N \times M)$.

• Soit $\omega \in \Omega^*_{\bar q}(M)$. Les applications τ_S sont invariantes et par conséquent l'application Φ envoie les fibres de $\tau_{\mathbb{T} \times S}$ sur celles de τ_S. Ainsi, $\mathcal{L}_3 \omega = \Phi^* \omega \in \Omega^*_{\bar q}(\mathbb{T} \times M)$. $\square$

4.3. Décomposition. Considérons une métrique riemannienne μ sur $M - \Sigma$, invariante par l'action de $\mathbb{T}$ et vérifiant $\mu(X_a, X_b) = (a \mid b)$, si $a, b \in A$. Elle existe toujours. Pour chaque $a \in A$ la *forme fondamentale* χ_a est la 1-forme différentielle invariante définie sur $M - \Sigma$ par $\chi_a = \mu(X_a, -)$. Une forme différentielle de $I\Omega^*(M - \Sigma)$ est combinaison linéaire de formes différentielles du type

$$\underbrace{\pi^* \alpha}_{\text{partie basique}} \wedge \underbrace{\chi_{a_1} \wedge \cdots \wedge \chi_{a_u}}_{\text{partie verticale}} .$$

Explicitons ceci. Toute forme différentielle $\omega \in I\Omega^*(M - \Sigma)$ s'écrit de façon unique sous la forme:

$$(4) \qquad \sum_{a \in B_*} \pi^* \omega_a \wedge \chi_a,$$

où $\chi_1 = 1$ et $\chi_{a_{i_1} \cdots a_{i_u}} = \chi_{a_{i_1}} \wedge \cdots \wedge \chi_{a_{i_u}}$. Nous dirons que (4) est la *décomposition* de ω relative à B et μ. Cette décomposition est unique.

L'opérateur *décomposition* $\Delta : I\Omega^*(M - \Sigma) \to \Omega^*(\pi(M - \Sigma)) \otimes H^*(\mathbb{T})$, définie par

$$\Delta(\omega) = \sum_{a \in B_*} \omega_a \otimes a,$$

est un isomorphisme d'algèbres graduées commutatives. Remarquons que la restriction $\Delta : \{\chi_a / a \in H^*(\mathbb{T})\} \to H^*(\mathbb{T})$ est, avec les notations évidentes, un isomorphisme d'algèbres graduées commutatives; la cohomologie de $\mathbb{T}$ est donc calculée par les formes fondamentales de l'action.

Proposition 4.3.1. *L'opérateur Δ ne dépend pas du choix de la base orthonormale B (relativement à $(- \mid -)$).*

Démonstration. Soit B' une autre base orthonormale de $(A, (- \mid -))$. Posons $(t_{ab})_{a \in B_*, b \in B'_*}$ la matrice du changement de base: $a = \sum_{b \in B'_*} t_{ab} b$, pour tout $a \in B_*$. L'égalité $\sum_{a \in B_*} \pi^* \omega_a \wedge \chi_a = \sum_{b \in B'_*} \pi^* \omega_b \wedge \chi_b$ se traduit par $\sum_{a \in B_*} t_{ab} \pi^* \omega_a = \pi^* \omega_b$ pour tout $b \in B_*$, ce qui implique $\sum_{a \in B_*} \omega_a \otimes a = \sum_{b \in B'_*} \omega_b \otimes b$. $\square$

4.4. Le degré pervers. Un calcul. Nous avons déjà calculé le degré pervers de $\pi^*\alpha$ (voir (3)). Celui de $\chi_{a_1} \wedge \cdots \wedge \chi_{a_u}$ dépend du choix de μ. Néanmoins, $\|\chi_a\|_S$ vaut toujours 1 si $a \notin A_S^\perp$. Il semble naturel de vouloir $\|\chi_a\|_S = 0$ si $a \in A_S^\perp - \{0\}$. Nous dirons ainsi qu'une métrique riemannienne μ définie sur $M - \Sigma$ est *bonne* si

(a) μ est invariante,

(b) $\mu(X_a, X_b) = (a \mid b)$ pour tout $a, b \in A$,

et, pour chaque strate $S \in \mathcal{S}$,

(c) $\max\{\|\chi_a\|_S, \|d\chi_a\|_S\} = 0$ pour $a \in A_S^\perp - \{0\}$, et

(d) pour chaque $(U, \varphi) \in \mathcal{A}_S$ la restriction de φ aux fibres de $\mathcal{T}_S : (M_S - S) \to S$ est une isométrie sur $(\mathbb{S}^{\ell_S} \times]0, \frac{1}{2}[, \mu_S + dr^2)$, où μ_S est une métrique riemannienne $\mathbb{T}_S$-invariante sur $\mathbb{S}^{\ell_S}$.

Les deux premières propriétés assurent l'existence de la décomposition Δ. La quatrième implique l'uniformité métrique des fibres de $\mathcal{T}_S : (M_S - S) \to S$, ce qui sera utilisée dans le Lemma 5.3.3. Comme on pouvait s'y attendre,

Proposition 4.4.1. *Les bonnes métriques existent.*

Démonstration. Considérons $\{M - \Sigma, \mathcal{T}_S / S \in \mathcal{S}\}$ qui est un recouvrement ouvert invariant de M. Il possède une partition de l'unité subordonnée constituée par des fonctions invariantes contrôlées (cf. § 2.5). Nous pouvons donc nous restreindre au cas $M = \mathcal{T}_S$.

Notons $\langle X_a / a \in A_S^\perp \rangle$ (resp. $\langle X_a / a \in A_S \rangle$) le sous-fibré de $T(\mathcal{T}_S - S)$ engendré par $\{X_a / a \in A_S^\perp\}$ (resp. $\{X_a / a \in A_S\}$). Le sous-espace $\langle X_a / a \in A_S^\perp \rangle$ est transverse à $\operatorname{Ker}\{\tau_S : (\mathcal{T}_S - S) \to S\}_*$ tandis que le sous-espace $\langle X_a / a \in A_S \rangle$ est tangent. Nous avons donc la décomposition invariante:

$$T(\mathcal{T}_S - S) = \operatorname{Ker}\{\tau_S : (\mathcal{T}_S - S) \to S\}_* \oplus \langle X_a / a \in A_S^\perp \rangle \oplus \mathcal{C}.$$

Nous construisons μ en deux temps.

- Ecrivons, pour chaque $a \in A_S$, Z_a le champ fondamental de $\mathbb{S}^{\ell_S}$ relatif à Φ^S. Le group stuctural $\mathcal{Z}_S$ de $\mathcal{A}_S$ est compact et laisse invariant Z_a (cf. § 1.2). Posons μ_S une métrique riemannienne sur $\mathbb{S}^{\ell_S}$, invariante par $\mathcal{Z}_S$ et vérifiant $\mu_S(Z_a, Z_a) = (a \mid a)$ pour tout $a \in A_S$. La métrique $\mu_S + dr^2$ de $\mathbb{S}^{\ell_S} \times]0, 1[$ s'étend en une métrique riemannienne μ_1 sur $\operatorname{Ker}\{\tau_S : (\mathcal{T}_S - S) \to S\}_*$. Elle est invariante (chaque $g \in \mathbb{T}$ agit sur $\mathcal{T}_S$ comme morphisme de fibration à groupe structural d'après § 1.2 (iv)) et vérifie $\mu_1(X_a, X_a) = (a \mid a)$. Remarquons que pour chaque $(U, \varphi) \in \mathcal{A}_S$ nous avons $\varphi^*(\mu_S + dr^2) = \mu_1$.
- Considérons μ_0 une métrique riemannienne sur S, invariante par $\mathbb{T}$, et ν la métrique sur $\langle X_a / a \in A_S^\perp \rangle$ définie par $\nu(X_a, X_b) = (a \mid b)$ pour tout $a, b \in A_S^\perp$. Remarquons que $(\tau_S)_*$ envoie injectivement les fibres de $\mathcal{C}$ sur les fibres de $\mathbb{T}S$. La métrique $\nu + \tau_S^* \mu_0$ est donc une métrique riemannienne invariante sur $\langle X_a / a \in A_S^\perp \rangle \oplus \mathcal{C}$.

Posons finalement $\mu = \mu_1 + \nu + \tau_S^* \mu_0$. Par construction elle vérifie (a), (b) et (d). La restriction de μ à $(\operatorname{Ker}\{\tau_S : (\mathcal{T}_S - S) \to S\}_*)^\perp = \langle X_a / a \in A_S^\perp \rangle \oplus \mathcal{C}$ est de la forme $\tau_S^*(\nu_0 + \mu_0)$; où nous avons écrit $\nu_0((\tau_S)_* X_a, (\tau_S)_* X_b) = (a \mid b)$ pour $a, b \in A_S^{\perp}$. Ainsi, $\chi_a = \tau_S^* \gamma$ pour une forme différentielle $\gamma \in \Omega^1(S)$. Par conséquent, $\|\chi_a\|_S \leq 0$ et $\|d\chi_a\|_S \leq 0$. Puisque $\chi_a(X_a) = 1$, nous obtenons (c). □

Nous fixons pour la suite de ce travail une bonne métrique sur $M - \Sigma$.

4.5. Classe d'Euler. Les propriétés §4.4(a) et (b) impliquent la nullité de $i_{X_b} d\chi_a$ pour tout $a, b \in A$; la forme $d\chi_a$ est donc basique. La forme différentielle $e_a \in \Omega^2(\pi(M - \Sigma))$ définie par la relation $d\chi_a = \pi^* e_a$ est la *forme d'Euler* associée à a; elle dépend de la métrique μ choisie. Remarquons que e_a est un cycle vérifiant $\|e_a\|_{\pi(S)} \leq 2$ pour tout $S \in \mathcal{S}$. La classe $[e_a] \in IH_{\bar{2}}^2(M/\mathbb{T})$ est la *classe d'Euler* associée à a. Pour tout $a \in A_S^{\perp}$ nous avons $\|e_a\|_{\pi(S)} \leq 0$ (cf. §4.4(c)).

La forme d'Euler dépend de la bonne métrique choisie; ce qui n'est pas le cas pour la classe d'Euler (après normalisation). En effet, soit μ' une autre bonne métrique sur $M - \Sigma$ et $a \in A$. Notons e'_a la forme d'Euler correspondante. Les formes e_a et e'_a sont aussi des formes d'Euler relativement à l'action de $\mathbb{T}$ sur $M - \Sigma$, qui est une action libre. On sait donc que les classes d'Euler $[e_a]$ et $[e'_a]$ sont égales dans $H^2((M - \Sigma)/\mathbb{T})$. Il existe donc $\gamma_a \in \Omega^1((M - \Sigma)/\mathbb{T}) \subset \Omega_{\bar{2}}^1(M/\mathbb{T})$ telle que $e_a - e'_a = d\gamma_a$ et donc $[e_a] = [e'_a]$ dans $IH_{\bar{2}}^2(M/\mathbb{T})$.

Le degré pervers d'une forme différentielle d'intersection est calculable en termes du degré pervers de ses composantes de la façon suivante.

Proposition 4.6. *Fixons S une strate singulière de M avec $S \in \mathcal{S}_0$. Pour chaque $\omega \in I\Omega^*(M - \Sigma)$ nous avons* $\max\{\|\omega\|_S, \|d\omega\|_S\} = \max\{\|\omega_a\|_{\pi(S)}, \|d\omega_a\|_{\pi(S)} / a \in B_*\}$.

Démonstration. La décomposition de ω est $\omega = \sum_{a \in B_*} \pi^* \omega_a \wedge \chi_a$. La relation $\|\omega\|_S \leq j$ est équivalente à:

> '$\omega(u_0, \ldots, u_j) = 0$ pour toute famille de vecteurs $\{u_0, \ldots, u_j\}$ tangents à $\mathrm{Ker}\{\tau_S : (M_S - S) \to S\}_*$'.

La condition §4.4(c) implique que $\mathrm{Ker}\{\tau_S : (M_S - S) \to S\}_*$ est inclus dans $\langle X_a / a \in A \rangle^{\perp}$. Ainsi la relation précédente devient

> '$\pi^* \omega_a(u_0, \ldots, u_j) = 0$ pour tout $a \in B_*$ et pour toute famille de vecteurs $\{u_0, \ldots, u_j\}$ tangents à $\mathrm{Ker}\{\tau_S : (M_S - S) \to S\}_*$'.

Puisque $\pi_*\{\mathrm{Ker}(\tau_S)_*\} = \mathrm{Ker}(\rho_S)_*$, la condition précédente se transforme en

> '$\omega_a(v_0, \ldots, v_j) = 0$ pour tout $a \in B_*$ et pour toute famille de vecteurs $\{v_0, \ldots, v_j\}$ tangents à $\mathrm{Ker}\{\rho_S : \pi(M_S - S) \to \pi(S)\}_*$'.

C'est-à-dire, l'assertion $\|\omega\|_S \leq j$ est équivalente à $\|\omega_a\|_{\pi(S)} \leq j$ pour tout $a \in B_*$.

Remarquons l'égalité

$$(5) \qquad d\omega = \sum_{u=0}^{n} \sum_{a \in B_u} \pi^* d\omega_a \wedge \chi_a + (-1)^{i-u} \pi^* \omega_a \wedge d\chi_a,$$

où i est le degré de ω. Puisque μ est une bonne métrique on a $\max\{\|\chi_a\|_S, \|d\chi_a\|_S\} \leq 0$, pour tout $a \in B_*$. Ainsi,

$$\max\{\|d\omega\|_S, \|\omega_a\|_{\pi(S)}/a \in B_*\} = \max\{\|\eta\|_S, \|\omega_a\|_{\pi(S)}/a \in B_*\},$$

où $\eta = \sum_{a \in B_*} \pi^* d\omega_a \wedge \chi_a$. Ainsi, $\max\{\|d\omega\|_S, \|\omega_a\|_{\pi(S)}/a \in B_*\} \leq j$ est équivalent à $\max\{\|\omega_a\|_{\pi(S)}, \|d\omega_a\|_{\pi(S)}/a \in B_*\} \leq j$, ce qui achève la démonstration. $\square$

Proposition 4.7. *Fixons S une strate singulière de M avec $S \in \mathcal{S}_1$. Choisissons B une base orthonormale de A avec $a_1 \in A_S$. Pour chaque $\omega \in I\Omega^i(M - \Sigma)$ nous avons*

$$\max\{\|\omega\|_S, \|d\omega\|_S\} = \max\{\|\omega_{a'}\|_{\pi(S)} + 1, \|d\omega_{a'}\|_{\pi(S)} + 1, \|\omega_{a''}\|_{\pi(S)}, \|d\omega_{a''} + (-1)^{i-u} e_{a_1} \wedge \omega_{a_1 \cdot a''}\|_{\pi(S)}\},$$

calculé sur $a' \in B'_u = \{a_1 \cdot a_{i_2} \cdots a_{i_u} / 1 < i_2 < \cdots < i_u\}$, $a'' \in B''_u = B_u - B'_u$ et $u \geq 0$.

Démonstration. La décomposition de ω est $\omega = \sum_{a \in B_*} \pi^* \omega_a \wedge \chi_a$. La relation $\|\omega\|_S \leq j$ est équivalente à:

‘$\omega(u_0, \ldots, u_j) = (i_{X_{a_1}} \omega)(u_0, \ldots, u_{j-1}) = 0$ pour toute famille de vecteurs $\{u_0, \ldots, u_j\}$ tangents à $\mathrm{Ker}\{\tau_S : (M_S - S) \to S\}_* \cap \langle X_{a_1} \rangle^\perp$’.

La condition § 4.4 (c) implique que l'intersection $\mathrm{Ker}\{\tau_S : (M_S - S) \to S\}_* \cap \langle X_{a_1} \rangle^\perp$ est incluse dans $\langle X_a / a \in A \rangle^\perp$. Ainsi la relation

$$(6) \qquad \begin{cases} \text{‘}\omega(u_0, \ldots, u_j) = 0 \text{ pour toute famille de vecteurs } \{u_0, \ldots, u_j\} \\ \text{tangents à } \mathrm{Ker}\{\tau_S : (M_S - S) \to S\}_* \cap \langle X_{a_1} \rangle^\perp\text{’} \end{cases}$$

devient

‘$\pi^* \omega_a(u_0, \ldots, u_j) = 0$ pour tout $a \in B_*$ et pour toute famille de vecteurs $\{u_0, \ldots, u_j\}$ tangents à $\mathrm{Ker}\{\tau_S : (M_S - S) \to S\}_* \cap \langle X_{a_1} \rangle^\perp$’.

Puisque π_* envoie surjectivement $\mathrm{Ker}\{\tau_S : (M_S - S) \to S\}_* \cap \langle X_{a_1} \rangle^\perp$ sur $\mathrm{Ker}\{\rho_S : \pi(M_S - S) \to \pi(S)\}_*$ (n'oublions que $\pi_* X_{a_1} = 0$) la condition précédente se transforme en

‘$\omega_a(v_0, \ldots, v_j) = 0$ pour tout $a \in B_*$ et pour toute famille de vecteurs $\{v_0, \ldots, v_j\}$ tangents à $Ker\{\rho_S : \pi(M_S - S) \to \pi(S)\}_*$’.

C'est-à-dire, l'assertion (6) est équivalente à $\|\omega_a\|_{\pi(S)} \leq j$ pour tout $a \in B_*$.

Pour chaque $a' = a_1 \cdot a'' \in B'_u$ nous avons $i_{X_{a_1}} \chi_{a'} = \chi_{a''}$. Si $a'' \in B''_u$ alors $i_{X_{a_1}} \chi_{a''} = 0$. Ainsi, la décomposition de $i_{X_{a_1}} \omega$ est: $i_{X_{a_1}} \omega = \sum_{u=0}^n \sum_{a'' \in B''_u} (-1)^{i-u} \pi^* \omega_{a_1 \cdot a''} \wedge \chi_{a''}$. L'inégalité $\|\omega\|_S \leq j$ est donc équivalente à $\max\{\|\omega_{a'}\|_{\pi(S)} + 1, \|\omega_{a''}\|_{\pi(S)}\} \leq j$, pour tout $a' \in B'_*$, $a'' \in B''_*$.

Puisque μ est une bonne métrique on a $\max\{\|\chi_{a''}\|_S, \|d\chi_{a''}\|_S\} \leq 0$, pour tout $a'' \in B''_*$. Ainsi, $\max\{\|d\omega\|_S, \|\omega_{a'}\|_{\pi(S)} + 1, \|\omega_{a''}\|_{\pi(S)}/a' \in B'_*, a'' \in B''_*\} = \max\{\|\eta\|_S, \|\omega_{a'}\|_{\pi(S)} + 1, \|\omega_{a''}\|_{\pi(S)}/a' \in B'_*, a'' \in B''_*\}$, où

$$\eta = \sum_{u=0}^{n} \sum_{a \subset B_u} \pi^* d\omega_a \wedge \chi_a + \sum_{u=0}^{n} \sum_{a'' \in B''_u} (-1)^{i-u} \pi^* \omega_{a_1 \cdot a''} \wedge \pi^* e_{a_1} \wedge \chi_{a''}$$
$$= \sum_{u=0}^{n} \sum_{a' \in B'_u} \pi^* d\omega_{a'} \wedge \chi_{a'}$$
$$+ \sum_{u=0}^{n} \sum_{a'' \in B''_u} \pi^*(d\omega_{a''} + (-1)^{i-u} \omega_{a_1 \cdot a''} \wedge e_{a_1}) \wedge \chi_{a''},$$

(cf. (5)). Ainsi, $\max\{\|\omega\|_S, \|d\omega\|_S\} = \max\{\|\omega_{a'}\|_{\pi(S)} + 1, \|\omega_{a''}\|_{\pi(S)}, \|d\omega\|_S / a' \in B'_u, a'' \in B''_u\} \leq j$ est équivalent à $\max\{\|\omega_{a'}\|_{\pi(S)} + 1, \|d\omega_{a'}\|_{\pi(S)} + 1, \|\omega_{a''}\|_{\pi(S)}, \|d\omega_{a''} + (-1)^{i-u}\omega_{a_1 \cdot a''} \wedge e_{a_1}\|_{\pi(S)}\} \leq j$, pour tout $a' \in B'_u$, $a'' \in B''_u$, $u \geq 0$. D'où le résultat. □

5. SUITE SPECTRALE

Nous construisons dans cette section la suite spectrale $\{_{\bar{r}}E_m\}$, qui converge vers $H^*(M)$ et dont le deuxième terme dépend de la cohomologie d'intersection de l'espace d'orbites $M/\mathbb{T}$ et de la cohomologie de $\mathbb{T}$. Nous suivons la méthode habituelle des fibrations: filtration du complexe des formes différentielles d'intersection invariantes de M par le degré vertical déterminé par la projection $\pi : M \to M/\mathbb{T}$.

Fixons sur $M/\mathbb{T}$ une perversité $\bar{r}$ vérifiant $\bar{0} \leq \bar{r} \leq \bar{z}$, où $\bar{z}(\pi(S)) = \ell_S - 1$, et posons, comme précédemment, $\bar{q}$ la perversité induite sur M, définie par $\bar{q}(S) = \bar{r}(\pi(S))$. Elle vérifie $\bar{0} \leq \bar{q} \leq \bar{t}$. Nous fixons une famille $\{a_S / S \in \mathcal{S}\}$ telle que chaque a_S engendre A_S, unitaire si $S \in \mathcal{S}_1$.

5.1. Filtration. Posons R la strate régulière de M. La projection $\pi : R \to \pi(R)$ est une fibration. Nous définissons la filtration

$$\cdots = F^{\dim M + 1} I\Omega^*_{\bar{q}}(M) = \{0\} \subset F^{\dim M} I\Omega^*_{\bar{q}}(M) \subset \cdots \subset F^0 I\Omega^*_{\bar{q}}(M)$$
$$= I\Omega^*_{\bar{q}}(M) = F^{-1} I\Omega^*_{\bar{q}}(M) = \cdots$$

de $I\Omega^*_{\bar{q}}(M)$ de la façon suivante

$$F^v I\Omega^{v+u}_{\bar{q}}(M) = \{\omega \in I\Omega^{v+u}_{\bar{q}}(M) / \|\omega\|_{\pi(R)} \leq u\}.$$

Pour tout $a \in A$ nous avons $d\chi_a = \pi^* e_a$ et ainsi $\|d\chi_a\|_{\pi(R)} \leq 0$, par conséquent $\|d\omega\|_{\pi(R)} \leq \|\omega\|_{\pi(R)}$ pour tout $\omega \in I\Omega^*(M - \Sigma)$. La filtration est donc préservée par la différentielle d. En procédant de façon standard, nous associons à cette filtration une suite spectrale $\{_{\bar{r}}E_m\}$ du premier quadrant convergeant à $H^*(M)$ (cf. § 2.3). Puisque cette filtration ne dépend des choix faits (bonne métrique μ et base B) il en sera de même pour la suite spectrale.

Nous entreprenons maintenant la tâche de calculer le deuxième terme $\{_{\bar{r}}E_2\}$ de cette suite spectrale.

5.2. Les termes $(_{\bar{r}}E_0, d_0)$ et $(_{\bar{r}}E_1, d_1)$. Par définition, la suite courte

$$0 \longrightarrow F^{v+1} I\Omega^{u+v}_{\bar{q}}(M) \longrightarrow F^v I\Omega^{u+v}_{\bar{q}}(M) \longrightarrow {}_{\bar{r}}E_0^{v,u} \longrightarrow 0$$

est exacte. Puisque $dF^{v}I\Omega_{\bar{q}}^{u+v}(M) \subset F^{v+1}I\Omega_{\bar{q}}^{u+v+1}(M)$, la différentielle d_0 de la suite spectrale est l'application nulle. Ainsi ${}_{\bar{r}}E_1 = {}_{\bar{r}}E_0$.
Considérons l'opérateur *intégration le long des fibres*

$$\int_{\bar{r},u} : \frac{F^{*}I\Omega_{\bar{q}}^{*+u}(M)}{F^{*+1}I\Omega_{\bar{q}}^{*+u}(M)} \longrightarrow \Omega_{\bar{r}}^{*}(M/\mathbb{T}) \otimes H^{u}(\mathbb{T})$$

défini par $\int_{\bar{r},u} [\![\omega]\!] = \sum_{a\in B_u} \omega_a \otimes a$, où $[\![\omega]\!]$ est la classe de $\omega = \sum_{w=0}^{u} \sum_{a\in B_w} \pi^{*}\omega_a \wedge \chi_a \in F^{*}I\Omega_{\bar{q}}^{*+u}(M)$. D'après les Propositions 4.6 et 4.7 l'opérateur $\int_{\bar{r},u}$ est bien défini. Il est clairement injectif. La différentielle d_1 devient sur Im $\int_{\bar{r},u}$ la différentielle $\partial = d \otimes \{\textit{identité sur } H^{*}(\mathbb{T})\}$ ($\|d\chi_a\|_{\pi(R)} \leq a - 1$ pour tout $a \in B_u$ et l'égalité (5)). Ainsi,

$$(7) \qquad ({}_{\bar{r}}E_1^{*,u}, d_1) \cong (\mathrm{Im} \int_{\bar{r},u}, \partial).$$

Proposition 5.2.1. *L'opérateur $\int_{\bar{r},u}$ ne dépend ni de la base orthonormale B de A (relativement à $(-\mid-)$) ni de la bonne métrique μ choisies.*

Démonstration. Pour l'indépendance sur la choix de la base B nous raisonnons comme dans le Lemme 4.3.1. Posons μ' une autre bonne métrique. Soit $\omega \in F^{v}\Omega_{\bar{q}}^{v+u}(M)$. Par définition, nous avons: $\omega = \eta + \sum_{a\in B_u} \pi^{*}\omega_a \wedge \chi_a = \eta' + \sum_{a\in B_u} \pi^{*}\omega'_a \wedge \chi'_a$ avec $\eta, \eta' \in F^{v+1}I\Omega_{\bar{q}}^{v+u}(M)$. D'après §4.5, pour chaque $a \in B_u$, la forme différentielle $\chi_a - \chi'_a$ appartient à $F^{1}I\Omega_{\bar{q}}^{u}(M)$. Ainsi, $\sum_{a\in B_u} \pi^{*}(\omega_a - \omega'_a) \wedge \chi_a \in F^{v+1}I\Omega_{\bar{q}}^{v+u}(M)$ et donc $\omega_a = \omega'_a$ pour tout $a \in B_u$. D'où le résultat. □

5.3. Réduction de ${}_{\bar{r}}E_1$. La procédure suivie dans les Propositions 4.6 et 4.7 permettrait de caractériser les éléments du produit tensoriel $\Omega_{\bar{r}}^{*}(M/\mathbb{T}) \otimes H^{u}(\mathbb{T})$ qui appartiennent à Im $\int_{\bar{r},u}$; mais cette caractérisation se complique du fait que la base B n'est pas ona (voir Lemme 5.3.4 pour le cas d'une strate). Nous exhibons dans cette section un sous-complexe $\mathcal{N}_{\bar{r}}^{*,u}(M/\mathbb{T})$ de Im $\int_{\bar{r},u}$ qui lui est cohomologue et de présentation plus simple. Pour cela nous avons besoin de l'opérateur ∇_S que nous introduisons maintenant.

5.3.1. L'opérateur ∇_S. Considérons S une strate singulière de M. L'opérateur $\delta_S : H^{*}(\mathbb{T}) \to H^{*-1}(\mathbb{T})$ est défini par linéarité à partir de

$$\delta_S(a_{i_1} \cdots a_{i_u}) = \sum_{j=1}^{u} (-1)^{j-1} (a_{i_j} \mid a_S) a_{i_1} \cdots a_{i_{j-1}} a_{i_{j+1}} \cdots a_{i_u},$$

c'est un morphisme d'algèbres graduées commutatives. En fait, il est caractérisé par l'égalité $\delta_S(a) = \Delta(i_{X_{a_S}} \chi_a)$. Cet opérateur ne dépend pas du choix de la base orthonormale B (relativement à $(-\mid-)$). Remarquons que si $S \in \mathcal{S}_0$ alors $a_S = 0$ et donc $\delta_S \equiv 0$. Les propriétés suivantes découlent directement de la définition.

- $\delta_S(a) = 0$ si $a \in H^{0}(\mathbb{T})$, $\delta_S(a) = (a \mid a_S)$ si $a \in H^{1}(\mathbb{T})$,
- $\delta_S(a_{i_1} \cdots a_{i_u}) = 0$ si $\{a_{i_1}, \ldots, a_{i_u}\} \subset A_S^{\perp}$,
- $\delta_S \delta_S = 0$ et $\delta_S(a \cdot b) = \delta_S(a) \cdot b + (-1)^{u} a \cdot \delta_S(b)$, si $a \in H^{u}(\mathbb{T})$.

Définissons l'opérateur

$$\nabla_S : \Omega^*(\pi(M-\Sigma)) \otimes H^*(\mathbb{T}) \longrightarrow \Omega^*(\pi(M-\Sigma)) \otimes H^{*-1}(\mathbb{T})$$

par linéarité à partir de $\nabla_S(\eta \otimes a) = \eta \otimes \delta_S(a)$. C'est un morphisme d'algèbres graduées commutatives. Si $S \in \mathcal{S}_0$ alors $\nabla_S \equiv 0$. Si la base B contient a_1, disons $a_1 = a_S$, alors l'opérateur ∇_S s'écrit:

$$\nabla_S(\eta \otimes a) = \begin{cases} \eta \otimes a'' & \text{si } a = a_1 \cdot a'' \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{8}$$

On remarquera finalement la relation $\nabla_S \partial = \partial \nabla_S$.

5.3.2. Le complexe $\mathcal{N}_{\bar{r}}^{*,*}(M/\mathbb{T})$. Pour chaque $u \geq 0$, on posera $\mathcal{N}_{\bar{r}}^{*,u}(M/\mathbb{T})$, le sous-complexe différentiel de $\Omega_{\bar{r}}^*(M/\mathbb{T}) \otimes H^u(\mathbb{T})$ constitué par les éléments $\boldsymbol{\eta}$ vérifiant

$$\max\{\|\nabla_S \boldsymbol{\eta}\|_{\pi(S)}, \|\partial \nabla_S \boldsymbol{\eta}\|_{\pi(S)}\} \leq \bar{r}(\pi(S)) - 2,$$

pour tout $S \in \mathcal{S}$. Ici on a écrit $\|\boldsymbol{\xi}\|_{\pi(S)} = \max\{\|\xi_a\|_{\pi(S)}/a \in B_u\}$ pour tout $\boldsymbol{\xi} = \sum_{a \in B_u} \xi_a \otimes a$ appartenant à $\Omega_{\bar{r}}^*(M/\mathbb{T}) \otimes H^u(\mathbb{T})$. Remarquons que ce complexe ne dépend ni du choix de la base orthonormale B (relativement à $(- \mid -)$) ni de la bonne métrique μ.

La motivation pour l'introduction de ce complexe est le résultat suivant (voir aussi (9)).

Lemme 5.3.3. *Supposons que M ne contient qu'une strate singulière S, qui est dans $\mathcal{S}_1$. Considérons le complexe différentiel*

$$\mathcal{M}_{\bar{r}}^*(M/\mathbb{T}) = \{\eta \in \Omega_{\bar{r}-\bar{1}}^*(M/\mathbb{T}) \;/\; \textit{il existe } \xi \in \Omega^{*+1}(\pi(M-\Sigma)) \textit{ avec } \text{(i) } \|\xi\|_{\pi(S)} \leq \bar{r}(\pi(S)) \quad \textit{et} \quad \text{(ii) } \|d\xi + \eta \wedge e_{a_S}\| \leq \bar{r}(\pi(S)) \; \textit{pour tout } S \in \mathcal{S}\}.$$

Alors, l'inclusion $\Omega_{\bar{r}-\bar{2}}^*(M/\mathbb{T}) \hookrightarrow \mathcal{M}_{\bar{r}}^*(M/\mathbb{T})$ induit un isomorphisme en cohomologie.

Démonstration. Remarquons tout d'abord que $\Omega_{\bar{r}-\bar{2}}^*(M/\mathbb{T})$ est un sous-complexe de $\mathcal{M}_{\bar{r}}(M/\mathbb{T})$ car nous avons $\|e_{a_S}\|_{\pi(S)} \leq 2$. Nous procédons en plusieurs étapes.

• *Localisation du problème.* L'existence de partitions de l'unité constituées de fonctions contrôlées permet d'appliquer la technique habituelle de Mayer-Vietoris. Ainsi, le problème se réduit à montrer que pour toute carte $(V, \psi) \in \mathcal{B}_{\pi(S)}$, avec V ouvert contractile, l'inclusion $\Omega_{\bar{r}-\bar{2}}^*(\rho_S^{-1}(V)) \hookrightarrow \mathcal{M}_{\bar{r}}^*(\rho_S^{-1}(V))$ induit un isomorphisme en cohomologie. Dans la suite on identifiera $\rho_S^{-1}(V)$ avec $V \times c\mathbb{S}^{\ell_S}/\mathbb{T}_S$ par l'intermédiaire de ψ. Le degré pervers $\| - \|_{\pi(S)}$ est maintenant relatif à la projection canonique $pr_V : V \times \mathbb{S}^{\ell_S}/\mathbb{T}_S \times]0, \frac{1}{2}[\to V$.

La démonstration de la proposition se réduit à prouver que l'inclusion $\Omega_{\bar{r}-\bar{2}}^*(V \times c\mathbb{S}^{\ell_S}/\mathbb{T}_S) \hookrightarrow \mathcal{M}_{\bar{r}}^*(V \times c\mathbb{S}^{\ell_S}/\mathbb{T}_S)$ induit un isomorphisme en cohomologie.

• *Réduction de* $V \times c\mathbb{S}^{\ell s}/\mathbb{T}_S$. La restriction de la forme d'Euler e_{a_S} à $V \times \mathbb{S}^{\ell s}/\mathbb{T}_S \times]0, \frac{1}{2}[$ s'écrit sous la forme

$$e_{a_S} = Pr^* \epsilon_{a_S} + \varepsilon_{a_S};$$

où $Pr : V \times \mathbb{S}^{\ell s}/\mathbb{T}_S \times]0, \frac{1}{2}[\to \mathbb{S}^{\ell s}/\mathbb{T}_S$ est la projection canonique, $\epsilon_{a_S} \in \Omega^2(\mathbb{S}^{\ell s}/\mathbb{T}_S)$ est la forme d'Euler relative à (Φ^S, μ_S) et ε_{a_S} est une forme différentielle qui s'annule sur les fibres de pr_V (cf. § 4.4 (d)). Cette dernière condition équivaut à $\|\varepsilon_{a_S}\|_{\pi(S)} \leq 1$. Ainsi, $\mathcal{M}^*_{\bar{r}}(V \times c\mathbb{S}^{\ell s}/\mathbb{T}_s)$ est engendré par les éléments de $\Omega^*_{\bar{r}}(V \times c\mathbb{S}^{\ell s}/\mathbb{T}_s)$ vérifiant (i) et (ii) où on remplace e_{a_S} par $Pr^*\epsilon_{a_S}$. De la même façon, le complexe $\mathcal{M}^*_{\bar{r}}(c\mathbb{S}^{\ell s}/\mathbb{T}_S)$ est engendré par les éléments de $\Omega^*_{\bar{r}}(c\mathbb{S}^{\ell s}/\mathbb{T}_S)$ vérifiant (i) et (ii) où on remplace e_{a_S} par $pro^*\epsilon_{a_S}$. Ici $pro : \mathbb{S}^{\ell s}/\mathbb{T}_S \times]0, \frac{1}{2}[\to \mathbb{S}^{\ell s}/\mathbb{T}_S$ est la projection canonique.

La projection canonique $pr : V \times c\mathbb{S}^{\ell s}/\mathbb{T}_S \to c\mathbb{S}^{\ell s}/\mathbb{T}_S$ et l'inclusion $J : c\mathbb{S}^{\ell s}/\mathbb{T}_S \to V \times c\mathbb{S}^{\ell s}/\mathbb{T}_S$ définie par $J(\zeta) = (z_0, \zeta)$, où $z_0 \in V$ est un point base, préservent le degré pervers. En fait, elles induisent des quasi-isomorphismes $pr^* : \Omega^*_{\bar{r}}(c\mathbb{S}^{\ell s}/\mathbb{T}_S) \to \Omega^*_{\bar{r}}(V \times c\mathbb{S}^{\ell s}/\mathbb{T}_S)$ et $J^* : \Omega^*_{\bar{r}}(V \times c\mathbb{S}^{\ell s}/\mathbb{T}_S) \to \Omega^*_{\bar{r}}(c\mathbb{S}^{\ell s}/\mathbb{T}_S)$ (voir par exemple [2] et [9]). Plus exactement, J^*pr^* est l'identité sur $\Omega^*_{\bar{r}}(c\mathbb{S}^{\ell s}/\mathbb{T}_S)$ et pr^*J^* est homotope à l'identité de $\Omega^*_{\bar{r}}(V \times c\mathbb{S}^{\ell s}/\mathbb{T}_S)$. Un opérateur d'homotopie $H : \Omega^*_{\bar{r}}(V \times c\mathbb{S}^{\ell s}/\mathbb{T}_S) \to \Omega^{*-1}_{\bar{r}}(V \times c\mathbb{S}^{\ell s}/\mathbb{T}_S)$ est donné par $H\omega : \int_0^1 i_{\partial/\partial t} h^*\omega \wedge dt$ où $\omega \in \Omega^*_{\bar{r}}(V \times c\mathbb{S}^{\ell s}/\mathbb{T}_S)$, où $h : V \times c\mathbb{S}^{\ell s}/\mathbb{T}_S \times [0,1] \to V \times c\mathbb{S}^{\ell s}/\mathbb{T}_S$ est une homotopie définie par $h(z, \zeta, t) = (h_0(z, t), \zeta)$ où $h_0 : V \times [0,1] \to V$ est une contraction différentiable de V en x_0. L'opérateur H vérifie $dH\eta = Hd\eta + (-1)^i(\eta - pr^*J^*\eta)$ pour tout $\eta \in \Omega^i_{\bar{r}}(V \times c\mathbb{S}^{\ell s}/\mathbb{T}_S)$. Les relations

1. $Pr = pro \circ pr$, $pro = Pr \circ J$ et
2. $H(\eta \wedge Pr^*\epsilon_{a_S}) = H\eta \wedge Pr^*\epsilon_{a_S}$, pour chaque $\eta \in \Omega^*(V \times \mathbb{S}^{\ell s}/\mathbb{T}_S \times]0, 1[)$,

montrent que $pr^* : \mathcal{M}^*_{\bar{r}}(c\mathbb{S}^{\ell s}/\mathbb{T}_S) \to \mathcal{M}^*_{\bar{r}}(V \times c\mathbb{S}^{\ell s}/\mathbb{T}_S)$, $J^* : \mathcal{M}^*_{\bar{r}}(V \times c\mathbb{S}^{\ell s}/\mathbb{T}_S) \to \mathcal{M}^*_{\bar{r}}(c\mathbb{S}^{\ell s}/\mathbb{T}_S)$, et $H : \mathcal{M}^*_{\bar{r}}(V \times c\mathbb{S}^{\ell s}/\mathbb{T}_S) \to \mathcal{M}^{*-1}_{\bar{r}}(V \times c\mathbb{S}^{\ell s}/\mathbb{T}_S)$ sont des opérateurs bien définis. Ainsi, dans le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
\Omega^*_{\bar{r}-\bar{2}}(c\mathbb{S}^{\ell s}/\mathbb{T}_S) \arrow[r, "pr^*"] \arrow[d] & \Omega^*_{\bar{r}-\bar{2}}(V \times c\mathbb{S}^{\ell s}/\mathbb{T}_S) \arrow[d] \\
\mathcal{M}^*_{\bar{r}}(c\mathbb{S}^{\ell s}/\mathbb{T}_S) \arrow[r, "pr^*"] & \mathcal{M}^*_{\bar{r}}(V \times c\mathbb{S}^{\ell s}/\mathbb{T}_S)
\end{tikzcd}$$

les flèches horizontales sont des quasi-isomorphismes.

La démonstration se réduit à prouver que l'inclusion $\Omega^*_{\bar{r}-\bar{2}}(c\mathbb{S}^{\ell s}/\mathbb{T}_S) \hookrightarrow \mathcal{M}^*_{\bar{r}}(c\mathbb{S}^{\ell s}/\mathbb{T}_S)$ induit un isomorphisme en cohomologie.

• *Réduction de* $c\mathbb{S}^{\ell s}/\mathbb{T}_S$. Posons $h_1 :]0, 1[\times [0, 1] \to]0, 1[$, l'homotopie $h_1(r, t) = r(1 - t) + t/4$ qui ramène $]0, 1[$ à $\frac{1}{4}$; et donc, $\mathbb{S}^{\ell s}/\mathbb{T}_S \times]0, 1[$ sur $\mathbb{S}^{\ell s}/\mathbb{T}_S \times \{\frac{1}{4}\} \equiv \mathbb{S}^{\ell s}/\mathbb{T}_S$. Remarquons que dans $\mathbb{S}^{\ell s}/\mathbb{T}_S$, le degré pervers $\|\eta\|_{\pi(S)}$ de η devient tout simplement son degré $\deg(\eta)$. La procédure suivie dans le pas précédent, transforme la question '$\Omega^*_{\bar{r}-\bar{2}}(c\mathbb{S}^{\ell s}/\mathbb{T}_S) \hookrightarrow \mathcal{M}^*_{\bar{r}}(c\mathbb{S}^{\ell s}/\mathbb{T}_S)$ *est un quasi-isomorphisme*' en '$\mathcal{C}^*_1(\mathbb{S}^{\ell s}/\mathbb{T}_S) \hookrightarrow \mathcal{C}^*_2(\mathbb{S}^{\ell s}/\mathbb{T}_S)$ *est un quasi-isomorphisme*'. Ces deux complexes sont définis de la façon suivante.

1. $C_1^*(\mathbb{S}^{\ell s}/\mathbb{T}_S) = \bigoplus_{i=0}^{\bar{r}(\pi(S))-3} \Omega^i(\mathbb{S}^{\ell s}/\mathbb{T}_S) \oplus \{\Omega^{\bar{r}(\pi(S))-2}(\mathbb{S}^{\ell s}/\mathbb{T}_S) \cap d^{-1}(0)\}$.

2. $C_2^*(\mathbb{S}^{\ell s}/\mathbb{T}_S)$ est engendré par les éléments $\eta \in \bigoplus_{i=0}^{\bar{r}(\pi(S))-2} \Omega^i(\mathbb{S}^{\ell s}/\mathbb{T}_S) \oplus \{\Omega^{\bar{r}(\pi(S))-1}(\mathbb{S}^{\ell s}/\mathbb{T}_S \cap d^{-1}(0)\}$ pour lesquels il existe une forme différentielle $\xi \in \bigoplus_{i=0}^{\bar{r}(\pi(S))} \Omega^i(\mathbb{S}^{\ell s}/\mathbb{T}_S)$ telle que $d\xi + \eta \wedge \epsilon_{a_S}$ soit dans $\Omega^{\bar{r}(\pi(S))}(\mathbb{S}^{\ell s}/\mathbb{T}_S)$.

La démonstration de la proposition se réduit à prouver que l'inclusion $C_1^*(\mathbb{S}^{\ell s}/\mathbb{T}_S) \hookrightarrow C_2^*(\mathbb{S}^{\ell s}/\mathbb{T}_S)$ induit un isomorphisme en cohomologie.

• *L'inclusion $C_1^*(\mathbb{S}^{\ell s}/\mathbb{T}_S) \hookrightarrow C_2(\mathbb{S}^{\ell s}/\mathbb{T}_S)$ est un quasi-isomorphisme.* Remarquons les égalités suivantes.

1. $C_2^i(\mathbb{S}^{\ell s}/\mathbb{T}_S) = C_1^i(\mathbb{S}^{\ell s}/\mathbb{T}_S) = \Omega^i(\mathbb{S}^{\ell s}/\mathbb{T}_S)$, si $i \leq \bar{r}(\pi(S)) - 3$.
2. $C_2^i(\mathbb{S}^{\ell s}/\mathbb{T}_S) \cap d^{-1}(0) = C_1^i(\mathbb{S}^{\ell s}/\mathbb{T}_S) \cap d^{-1}(0) = \Omega^i(\mathbb{S}^{\ell s}/\mathbb{T}_S) \cap d^{-1}(0)$, si $i = \bar{r}(\pi(S)) - 2$.
3. $C_1^i(\mathbb{S}^{\ell s}/\mathbb{T}_S) = \{\eta \in \Omega^i(\mathbb{S}^{\ell s}/\mathbb{T}_S) \cap d^{-1}(0)$ / il existe $\xi \in \Omega^{i+1}(\mathbb{S}^{\ell s}/\mathbb{T}_S)$ vérifiant $d\xi + \eta \wedge \epsilon_{a_S} = 0\}$ et $C_1^i(\mathbb{S}^{\ell s}/\mathbb{T}_S) = \{0\}$, si $i = \bar{r}(\pi(S)) - 1$.
4. $C_2^i(\mathbb{S}^{\ell s}/\mathbb{T}_S) = C_1^i(\mathbb{S}^{\ell s}/\mathbb{T}_S) = 0$, si $i \geq \bar{r}(\pi(S))$.

Soit donc un cocycle $\eta \in \Omega^{\bar{r}(\pi(S))-1}(\mathbb{S}^{\ell s}/\mathbb{T}_S)$ pour lequel il existe $\xi \in \Omega^{\bar{r}(\pi(S))}(\mathbb{S}^{\ell s}/\mathbb{T}_S)$ vérifiant $d\xi + \eta \wedge \epsilon_{a_S} = 0$. Nous devons trouver $\gamma \in \Omega^{\bar{r}(\pi(S))-2}(\mathbb{S}^{\ell s}/\mathbb{T}_S)$ avec $d\gamma = \eta$, ce qui achevera la démonstration. L'action Φ^S est libre et $1 \leq \bar{r}(\pi(S)) \leq \dim(\mathbb{S}^{\ell s}/\mathbb{T}_S)$ (le cas $\bar{r}(\pi(S)) = 0$ étant évident); ainsi, par Gysin, l'application

$$\wedge[\epsilon_{a_S}] : H^{\bar{r}(\pi(S))-1}(\mathbb{S}^{\ell s}/\mathbb{T}_S) \longrightarrow H^{\bar{r}(\pi(S))+1}(\mathbb{S}^{\ell s}/\mathbb{T}_S)$$

est un monomorphisme (remarquons que $H^i(\mathbf{S}^\ell/G) = 0$ pour $0 < i < \ell$ si G est fini d'après [3, pag. 132]). Puisque $[\eta \wedge \epsilon_{a_S}] = 0$ on trouve le γ voulu. □

Nous prouvons maintenant que l'inclusion $\mathcal{N}_{\bar{r}}^{*,u}(M/\mathbb{T}) \hookrightarrow \operatorname{Im} \int_{\bar{r},u}$ est un quasi-isomorphisme.

Lemme 5.3.4. *Pour chaque $u \geq 0$ le complexe $\mathcal{N}_{\bar{r}}^{*,u}(M/\mathbb{T})$ est un sous-complexe de Im $\int_{\bar{r},u}$. Cette inclusion induit un isomorphisme en cohomologie.*

Démonstration. L'existence de partitions de l'unité constituées de fonctions contrôlées permet d'appliquer la technique habituelle de Mayer-Vietoris et de supposer que M ne possède qu'une strate singulière, disons S. Distinguons deux cas.

• $S \in \mathcal{S}_0$. L'opérateur ∇_S est l'opérateur 0 et ainsi $\mathcal{N}_{\bar{r}}^{*,u}(M/\mathbb{T}) = \Omega_{\bar{r}}^*(M/\mathbb{T}) \otimes H^u(\mathbb{T})$. D'autre part, si $\eta \otimes a \in \Omega_{\bar{r}}^*(M/\mathbb{T}) \otimes H^u(\mathbb{T})$ alors $\pi^*\eta \wedge \chi_a \in F^*I\Omega_{\bar{q}}^{*+u}(M)$ (cf. Proposition 4.6) et $\int_{\bar{r},u}(\pi^*\eta \wedge \chi_a) = \eta \otimes a$. Ceci donne Im $\int_{\bar{r},u} = \Omega_{\bar{r}}^*(M/\mathbb{T}) \otimes H^u(\mathbb{T})$, d'où le résultat.

• $S \in \mathcal{S}_1$. Puisque les complexes en jeu ne dépendent pas du choix de B nous choisissons une base orthonormale B de A avec $a_1 = a_S$. L'opérateur ∇_S est la projection

$$\eta_a \otimes a \longmapsto \begin{cases} \eta_a \otimes a'' & \text{si } a = a_1 \cdot a'' \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi,

$$\mathcal{N}_{\bar r}^{*,u}(M/\mathbb{T}) = \left\{ \sum_{a\in B_u} \eta_a \otimes a \in \Omega_{\bar r}^*(M/\mathbb{T}) \otimes H^u(\mathbb{T}) \Big/ \right.$$
$$\left. \max\{\|\eta_{a'}\|_{\pi(S)}, \|d\eta_{a'}\|_{\pi(S)}\} \le \bar r(\pi(S)) - 2 \text{ pour tout } a' \in B_u' \right\}.$$

D'autre part, l'égalité $\int_{\bar r,u} (\sum_{a\in B_u} \pi^*\eta_a \wedge \chi_a) = \sum_{a\in B_u} \eta_a \otimes a$ et la Proposition 4.7 impliquent:

$$\operatorname{Im} \int_{\bar r,u} = \left\{ \sum_{a\in B_u} \eta_a \otimes a \in \Omega_{\bar r}^*(M/\mathbb{T}) \otimes H^u(\mathbb{T}) \Big/ \right.$$
$$\text{il existe } \sum_{a''\in B_{u-1}''} \xi_{a''} \otimes a'' \in \Omega^*(\pi(M-\Sigma)) \otimes H^{u-1}(\mathbb{T}) \text{ avec}$$
$$1.\ \max\{\|\eta_{a'}\|_{\pi(S)}, \|d\eta_{a'}\|_{\pi(S)}\} \le \bar r(\pi(S)) - 1 \text{ pour tout } a' \in B_u',$$
$$2.\ \|\xi_{a''}\|_{\pi(S)} \le \bar r(\pi(S)) \text{ pour tout } a'' \in B_{u-1}'' \text{ et}$$
$$\left. 3.\ \|d\xi_{a''} + e_{a_1} \wedge \eta_{a_1\cdot a''}\|_{\pi(S)} \le \bar r(\pi(S)), \text{ pour tout } a'' \in B_{u-1}'' \right\}.$$

Ecrivons $\mathcal{H}'$ et $\mathcal{H}''$ les sous-espaces de $H^u(\mathbb{T})$ engendrés par B_u' et B_u'' respectivement. Alors,

$$\text{(9)} \qquad \begin{cases} \mathcal{N}_{\bar r}^{*,u}(M/\mathbb{T}) = \{\Omega_{\bar r-\bar 2}^*(M/\mathbb{T}) \otimes \mathcal{H}'\} \oplus \{\Omega_{\bar r}^*(M/\mathbb{T}) \otimes \mathcal{H}''\} \quad \text{et} \\ \operatorname{Im} \int_{\bar r,u} = \{\mathcal{M}_{\bar r}^*(M/\mathbb{T}) \otimes \mathcal{H}'\} \oplus \{\Omega_{\bar r}^*(M/\mathbb{T}) \otimes \mathcal{H}''\}. \end{cases}$$

Il suffit maintenant d'appliquer le Lemme 5.3.3. □

5.4. Calcul de ${}_{\bar r}E_2$. Pour déterminer le deuxième terme de la suite spectrale nous utilisons le produit pertensoriel $\Omega_{\bar r}^*(M/\mathbb{T}) \otimes_B H^u(\mathbb{T})$, qui est une approximation par le haut de $\mathcal{N}_{\bar r}^{*,u}(M/\mathbb{T})$ (voir Proposition 5.4.4). Et c'est une bonne approximation car la cohomologie $\mathcal{Q}_{\bar r}^{*,u}$ du quotient est calculée à partir de la cohomologie des strates singulières (cf. Lemme 5.4.2 et Lemme 5.4.3). Nous obtenons ainsi la suite exacte longue

$$\cdots \longrightarrow IH_{\bar r}^{v-1}(M/\mathbb{T}) \otimes_B H^u(\mathbb{T}) \longrightarrow \mathcal{Q}_{\bar r}^{v-1,u} \longrightarrow {}_{\bar r}E_2^{v,u} \longrightarrow$$
$$\longrightarrow IH_{\bar r}^{v}(M/\mathbb{T}) \otimes_B H^u(\mathbb{T}) \longrightarrow \cdots,$$

qui détermine ${}_{\bar r}E_2$.

Lemme 5.4.1. *Le complexe $\mathcal{N}_{\bar r}^{*,u}(M/\mathbb{T})$ est un sous-complex différentiel de $\Omega_{\bar r}^*(M/\mathbb{T}) \otimes_B H^u(\mathbb{T})$.*

Démonstration. Soit $\boldsymbol{\eta} = \sum_{a\in B_u} \eta_a \otimes a \in \mathcal{N}_{\bar r}^{*,u}(M/\mathbb{T})$. Il suffira de prouver que si $a = a_{i_1}\cdots a_{i_u} \in B_u$ et $S \in \mathcal{S}_1$, avec $A_S \subset \langle a_{i_1}\cdots a_{i_u}\rangle$, nous avons $\|\eta_a\|_{\pi(S)} \le \bar r(\pi(S)) - 2$. Par hypothèse, l'élément $\nabla_S \boldsymbol{\eta}$ s'écrit sous la forme $\sum_{c\in B_{u-1}} \gamma_c \otimes c$ avec $\|\gamma_c\|_{\pi(S)} \le \bar r(\pi(S)) - 2$; en fait, $\gamma_c = \sum_{j=1}^n (a_S \mid a_j)\eta_{a_j\cdot c}$.

Quitte à reordonner B, nous pouvons supposer $a = a_1 \cdots a_u$ avec $(a_S \mid a_1) \neq 0$. Posons $b = a_2 \cdots a_u$. Puisque $a_j \cdot b = 0$ pour $j \in \{2, \ldots, n\}$ et $(a_S \mid a_j) = 0$ pour $j \in \{u+1, \ldots, n\}$ (car $a_S \in \langle a_1 \cdots a_u \rangle$ et B orthonormale) nous avons $\gamma_b = (a_S \mid a_1) \eta_{a_1 \cdot b}$. D'où $\|\eta_a\|_{\pi(S)} \leq \bar{r}(\pi(S)) - 2$. □

Lemme 5.4.2. *Il existe un isomorphisme différentiel*

$$\frac{\Omega^*_{\bar{r}}(M/\mathbb{T}) \otimes_B H^u(\mathbb{T})}{\mathcal{N}^{*,u}_{\bar{r}}(M/\mathbb{T})} \cong \bigoplus_{S \in \mathcal{S}} \frac{\Omega^*_{\bar{r}}(\pi(\mathcal{T}_S))}{\Omega^*_{\bar{r}-2}(\pi(\mathcal{T}_S))} \otimes \delta_S(\langle a \in B_u / \bar{a}(\pi(S)) = 0 \rangle).$$

Démonstration. L'existence des partitions de l'unité constituées des fonctions contrôlées implique que la restriction des formes différentielles induit l'isomorphisme différentiel suivant

$$\frac{\Omega^*_{\bar{r}}(M/\mathbb{T}) \otimes_B H^u(\mathbb{T})}{\mathcal{N}^{*,u}_{\bar{r}}(M/\mathbb{T})} \cong \bigoplus_{S \in \mathcal{S}} \frac{\Omega^*_{\bar{r}}(\pi(\mathcal{T}_S)) \otimes_B H^u(\mathbb{T})}{\mathcal{N}^{*,u}_{\bar{r}}(\pi(\mathcal{T}_S))}.$$

Il suffit donc de construire, pour chaque $S \in \mathcal{S}$, un isomorphisme différentiel

$$\Gamma_{\bar{r},S} : \frac{\Omega^*_{\bar{r}}(\pi(\mathcal{T}_S)) \otimes_B H^u(\mathbb{T})}{\mathcal{N}^{*,u}_{\bar{r}}(\pi(\mathcal{T}_S))} \longrightarrow \frac{\Omega^*_{\bar{r}}(\pi(\mathcal{T}_S))}{\Omega^*_{\bar{r}-2}(\pi(\mathcal{T}_S))} \otimes \delta_S(\langle a \in B_u / \bar{a}(\pi(S)) = 0 \rangle).$$

Fixons donc $S \in \mathcal{S}$. Tout d'abord quelques notations. Pour chaque $v \geq 0$ on écrira:

$$B'_v = \{a \in B_v / \bar{a}(\pi(S)) = 0\} \qquad \text{et} \qquad B''_v = \{a \in B_v / \bar{a}(\pi(S)) = 2\}.$$

Ceci donne la décomposition $B_v = B'_v \cup B''_v$. Remarquons aussi que δ_S envoie le sous-espace vectoriel $\langle a \in B'_v \rangle$ dans lui-même. Alors on peut écrire:

$$\frac{\Omega^*_{\bar{r}}(\pi(\mathcal{T}_S)) \otimes_B H^u(\mathbb{T})}{\mathcal{N}^{*,u}_{\bar{r}}(\pi(\mathcal{T}_S))} = \frac{\Omega^*_{\bar{r}}(\pi(\mathcal{T}_S)) \otimes \langle a \in B'_u \rangle}{\{\boldsymbol{\eta} \in \Omega^*_{\bar{r}}(\pi(\mathcal{T}_S)) \otimes \langle a \in B'_u \rangle / \nabla_S \boldsymbol{\eta} \in \Omega^*_{\bar{r}-2}(\pi(\mathcal{T}_S)) \otimes \langle a \in B'_{u-1} \rangle\}}.$$

Nous définissons $\Gamma_{\bar{r},S}$ par linéarité à partir de

$$\Gamma_{\bar{r},S}[\![\eta \otimes a]\!] = [\![\eta]\!] \otimes \delta_S(a),$$

où $[\![-]\!]$ dénote classe d'équivalence. C'est un exercice d'algèbre linéaire de prouver que $\Gamma_{\bar{r},S}$ est un isomorphisme différentiel. □

La cohomologie du complexe précédent se calcule à l'aide de la cohomologie des strates singulières de $M/\mathbb{T}$.

Lemme 5.4.3. *Pour chaque $S \in \mathcal{S}_1$ nous avons*

$$H^*\left(\frac{\Omega^{\cdot}_{\bar{r}}(\pi(\mathcal{T}_S))}{\Omega^{\cdot}_{\bar{r}-2}(\pi(\mathcal{T}_S))}\right) \cong H^{*-2[\bar{r}(\pi(S))/2]}(S/\mathbb{T}),$$

où $[-]$ dénote la partie entière.

Démonstration. Notons e_{a_S} (resp. ϵ_{a_S}) la forme d'Euler associée à a_S et relative à (Φ, μ) (resp. (Φ^S, μ_S)). Désignons par n_S l'entier $[\bar{r}(\pi(S))/2]$. Posons $F : \Omega^{*-2n_S}(S/\mathbb{T}) \to (\Omega^*_{\bar{r}}(\pi(\mathcal{T}_S))/\Omega^*_{\bar{r}-\bar{2}}(\pi(\mathcal{T}_S)))$ l'application définie à partir de $F(\eta) = \rho_S^*\eta \wedge e_{a_S}^{n_S}$. Elle est bien définie car $\|\rho_S^*\eta \wedge e_{a_S}^{n_S}\|_{\pi(S)} =$ degré $\{e_{a_S}^{n_S}\} = 2n_S \leq \bar{r}(\pi(S))$. Nous allons prouver que F est un quasi-isomorphisme.

Par la technique habituelle de Mayer-Vietoris, le problème se réduit à prouver que

'la restriction $F : \Omega^{*-2n_S}(V) \longrightarrow \dfrac{\Omega^*_{\bar{r}}(\rho_S^{-1}(V))}{\Omega^*_{\bar{r}-\bar{2}}(\rho_S^{-1}(V))}$ est un quasi-isomorphisme',

où $(V, \psi) \in \mathcal{B}_{\pi(S)}$ avec $V \subset \pi(S)$ ouvert contractile. Identifions $\rho_S^{-1}(V)$ avec $V \times c\mathbb{S}^{\ell_S}/\mathbb{T}_S$ par l'intermédiaire de ψ. Le problème se réduit à montrer que

'l'opérateur $F_0 : \mathbb{R} \longrightarrow \dfrac{\Omega^*_{\bar{r}}(V \times c\mathbb{S}^{\ell_S}/\mathbb{T}_S)}{\Omega^*_{\bar{r}-\bar{2}}(V \times c\mathbb{S}^{\ell_S}/\mathbb{T}_S)}$, où $F_0(1) = [\![Pr^*\epsilon_{a_S}^{n_S}]\!]$, est un quasi-isomorphisme',

où $Pr : V \times \mathbb{S}^{\ell_S}/\mathbb{T}_S \times]0,1[\to \mathbb{S}^{\ell_S}/\mathbb{T}_S$ est la projection canonique. Dans la démonstration du Lemme 5.3.3 nous avons prouvé que la cohomologie du complexe quotient $(\Omega^*_{\bar{r}}(V \times c\mathbb{S}^{\ell}/\mathbb{T}_S)/\Omega^*_{\bar{r}-\bar{2}}(V \times c\mathbb{S}^{\ell_S}/\mathbb{T}_S))$ est isomorphe, par l'intermédiaire de Pr, à $H^{\bar{r}(\pi(S))}(\mathbb{S}^{\ell_S}/\mathbb{T}_S) \oplus H^{\bar{r}(\pi(S))-1}(\mathbb{S}^{\ell_S}/\mathbb{T}_S)$. La démonstration est terminée car la cohomologie $H^*(\mathbb{S}^{\ell_S}/\mathbb{T}_S)$ est engendrée par $\{1, \epsilon_{a_S}, \ldots, \epsilon_{a_S}^{(\ell_S-1)/2}\}$. $\square$

Le calcul de $\mathcal{Q}_{\bar{r}}^{*,u}$ est fait dans la proposition suivante. Nous écrivons r_S la dimension du plus petit sous-espace de A contenant A_S et engendré par un sous-ensemble de B, c'est-à-dire, $r_S = n - \#(B \cap A_S^\perp)$; en particulier, $r_S = 0$ si $S \in \mathcal{S}_0$.

Proposition 5.4.4. *Il existe un isomorphisme*[1]

$$H^*\left(\frac{\Omega^{\cdot}_{\bar{r}}(M/\mathbb{T}) \otimes_B H^u(\mathbb{T})}{\mathcal{N}_{\bar{r}}^{\cdot,u}(M/\mathbb{T})}\right) \cong \bigoplus_{S\in\mathcal{S}} \{H^{*-2[\bar{r}(\pi(S))/2]}(S/\mathbb{T})\}^{\binom{n-1}{n-u}-\binom{n-r_S}{n-u}}.$$

Démonstration. D'après les lemmes précédents il suffit de prouver l'égalité $\dim \delta_S(\langle a \in B_u' \rangle) = \binom{n-1}{n-u} - \binom{n-r_S}{n-u}$, pour toute strate $S \in \mathcal{S}_1$. Posons, pour simplifier les notations, $B \cap A_S^\perp = \{a_{r_S+1}, \ldots, a_n\}$. Tout élément de $\langle a \in B_u'' \rangle$ contient $a_1 \cdots a_{r_S}$, c'est-à-dire, $\langle a \in B_u'' \rangle = a_1 \cdots a_{r_S} \cdot \Lambda^{u-r_S}(a_{r_S+1}, \ldots, a_n)$ et donc $\delta_S(\langle a \in B_u'' \rangle) = \delta_S(a_1 \cdots a_{r_S}) \cdot \Lambda^{u-r_S}(a_{r_S+1}, \ldots, a_n)$. D'autre part, les éléments de $\langle a \in B_u' \rangle$, et donc ceux de $\delta_S(\langle a \in B_u'' \rangle)$, ne contiennent pas $a_1 \cdots a_{r_S}$. Ainsi $\delta_S(\langle a \in B_u' \rangle) \cap \delta_S(\langle a \in B_u'' \rangle) = 0$ et donc $\dim \delta_S(\langle a \in B_u' \rangle) = \dim \delta_S(\langle a \in B_u \rangle) - \dim \delta_S(\langle a \in B_u'' \rangle)$. Puisque on a trouvé $\dim \delta_S(\langle a \in B_u'' \rangle) = \binom{n-r_S}{u-r_S} = \binom{n-r_S}{n-u}$, il ne reste qu'à prouver $\dim \delta_S(\langle a \in B_u \rangle) = \binom{n-1}{n-u}$.

[1] On écrira $\{-\}^{\leq 0} = \{0\}$ et $\binom{a}{b} = 0$ si $b < 0$ ou $b > a$.

Considérons pour cela la famille $\{b_1 = a_1, b_2 = a_2 - ((a_S \mid a_2)/(a_S \mid a_1))a_1, \ldots, b_{r_S} = a_{r_S} - ((a_S \mid a_{r_S})/(a_S \mid a_1))\, a_1, b_{r_S+1} = a_{r_S+1}, \ldots, b_n = a_n\}$, qui est une base de A. Elle vérifie $\delta_S(b_1) \neq 0$ et $\delta_S(b_i) = 0$ pour $i \in \{2, \ldots, n\}$. Ainsi, $\dim \delta_S(\langle a \in B_u \rangle) = \dim \delta_S(\Lambda^u(b_1, \ldots, b_n)) = \dim b_1 \cdot \Lambda^{u-1}(b_2, \ldots, b_n) = \binom{n-1}{u-1} = \binom{n-1}{n-u}$. □

Nous donnons maintenant le principal résultat de ce travail.

Théorème 5.5. *Soit $\Phi : \mathbb{T} \times M \to M$ une action simple du tore $\mathbb{T}$ sur une variété M. Pour chaque perversité $\bar{r}$ sur $M/\mathbb{T}$ avec $\bar{0} \leq \bar{r} \leq \bar{z}$, il existe une suite spectrale $\{_{\bar{r}}E_m\}$ convergeant vers $H^*(M)$ telle que, si nous fixons une base B de l'algèbre de Lie de $\mathbb{T}$, le deuxième terme est déterminé par la suite exacte longue*

$$(10) \qquad \begin{cases} \cdots \longrightarrow IH_{\bar{r}}^{v-1}(M/\mathbb{T}) \otimes_B H^u(\mathbb{T}) \longrightarrow Q_{\bar{r}}^{v-1,u} \longrightarrow {_{\bar{r}}E_2^{v,u}} \longrightarrow \\ \qquad\qquad \longrightarrow IH_{\bar{r}}^{v}(M/\mathbb{T}) \otimes_B H^u(\mathbb{T}) \longrightarrow \cdots, \end{cases}$$

avec

$$Q_{\bar{r}}^{v,u} = \bigoplus_{S \in \mathcal{S}} \{H^{v-2[\bar{r}(\pi(S))/2]}(S/\mathbb{T})\}^{\binom{n-1}{n-u} - \binom{n-r_S}{n-u}}.$$

Si la base B est ona alors

$${_{\bar{r}}E_2^{*,*}} \cong IH_{\bar{r}}^*(M/\mathbb{T}) \otimes_B H^*(\mathbb{T}).$$

Démonstration. La suite spectrale $\{_{\bar{r}}E_m\}$ est construite dans la Section 5.1. Dans la Section 5.4 nous prouvons que le deuxième terme de cette suite spectrale est déterminé par la suite exacte longue (10). Finalement, si la base B est ona, on a $r_S \leq 1$ pour tout $S \in \mathcal{S}$ et donc ${_{\bar{r}}E_2^{*,*}} \cong IH_{\bar{r}}^*(M/\mathbb{T}) \otimes_B H^*(\mathbb{T})$. □

5.6. Remarques

(a) Pour $u \leq 0$ et $u \geq n$ nous avons $Q_{\bar{r}}^{*,u} = 0$ et ainsi ${_{\bar{r}}E_2^{*,u}} \cong IH_{\bar{r}}^*(M/\mathbb{T}) \otimes H^u(\mathbb{T})$, si $u \leq 0$, et ${_{\bar{r}}E_2^{*,u}} \cong IH_{\bar{r}-\bar{s}}^*(M/\mathbb{T}) \otimes H^u(\mathbb{T})$, si $u \geq n$, où

$$\bar{s}(\pi(S)) = \begin{cases} 2 & \text{si } S \in \mathcal{S}_1 \\ 0 & \text{si } S \in \mathcal{S}_0. \end{cases}$$

(b) Si la famille $\{A_S / S \in \mathcal{S}_1\}$ est libre alors nous savons que l'algèbre de Lie A possède une base ona et ainsi ${_{\bar{r}}E_2^{*,*}} \cong IH_{\bar{r}}^*(M/\mathbb{T}) \otimes_B H^*(\mathbb{T})$. Ceci est toujours le cas si le nombre de strates de $\mathcal{S}_1$ est inférieur ou égal à la dimension du tore.

(c) La suite spectrale $\{_{\bar{r}}E_m\}$ ne dépend pas du choix de la base B. Dans la suite exacte (10) les termes $IH_{\bar{r}}^*(M/\mathbb{T}) \otimes_B H^*(\mathbb{T})$ et $Q_{\bar{r}}^{*,*}$ dépendent de B.

(d) Pour λ-presque tout choix de B, cette base vérifie $r_S = n$ si $S \in \mathcal{S}_1$. Ainsi, si l'on fixe $u < n$, nous avons $\bar{a} = \bar{0}$ pour tout $a \in B_u$ (cf. § 3.3). Par conséquent, $IH_{\bar{r}}^*(M/\mathbb{T}) \otimes_B H^u(\mathbb{T}) = IH_{\bar{r}}^*(M/\mathbb{T}) \otimes H^u(\mathbb{T})$. Prenons $\bar{r} = \bar{0}$, d'après § 2.3 nous avons $IH_{\bar{0}}^*(M/\mathbb{T}) \cong H^*(M/\mathbb{T})$. La suite exacte (10) devient:

$$
\cdots \longrightarrow H^{v-1}(M/\mathbb{T}) \otimes H^u(\mathbb{T}) \longrightarrow \bigoplus_{S \in \mathcal{S}_1} \{H^{v-1}(S/\mathbb{T})\}^{\binom{n-1}{n-u}} \longrightarrow {}_{\bar{0}}E_2^{v,u}
$$
$$
\longrightarrow H^v(M/\mathbb{T}) \otimes H^u(\mathbb{T}) \longrightarrow \cdots .
$$

Nous voyons ainsi la différence entre le cas où Φ est libre (pour lequel $E_2^{v,u} \cong H^v(M/\mathbb{T}) \otimes H^u(\mathbb{T})$) est le cas où Φ est simple. Il faut néanmoins noter que pour ce choix de la base B le terme résiduel est le plus compliqué possible car il possède le nombre maximal de termes.

(e) Si l'action est libre, cette suite spectrale coïncide avec la suite spectrale de Leray-Serre car $\mathcal{S} = \emptyset$. Si le tore $\mathbb{T}$ est de dimension 1, toute base distinguée est ona et la suite spectrale dégénère en la suite exacte longue:

$$
\cdots \longrightarrow IH_{\bar{r}}^{v}(M/\mathbb{T}) \longrightarrow H^v(M) \longrightarrow
$$
$$
\longrightarrow IH_{\bar{r}-2}^{v-1}(M/\mathbb{T}) \xrightarrow{\wedge[e]} IH_{\bar{r}}^{v+1}(M/\mathbb{T}) \longrightarrow \cdots ,
$$

nous retrouvons ainsi la suite de Gysin de [7].

(f) Dans ce travail nous avons approximé le premier terme de la suite spectrale par le haut en utilisant l'inclusion $\mathcal{N}_{\bar{r}}^{*,u}(M/\mathbb{T}) \hookrightarrow \Omega_{\bar{r}}^{*}(M/\mathbb{T}) \otimes_B H^u(\mathbb{T})$. On aurait pu agir de façon duale en utilisant l'inclusion $\Omega_{\bar{r}}^{*}(M/\mathbb{T}) \otimes_{\boldsymbol{B}} H^u(\mathbb{T}) \hookrightarrow \mathcal{N}_{\bar{r}}^{*,u}(M/\mathbb{T})$, ce qui est une approximation par le bas. Dans ce cas, on peut montrer que le deuxième terme de la suite spectrale est déterminé par la suite exacte longue

$$
\cdots \longrightarrow IH_{\bar{r}}^{v}(M/\mathbb{T}) \otimes_{\boldsymbol{B}} H^u(\mathbb{T}) \longrightarrow {}_{\bar{r}}E_2^{v,u} \longrightarrow \mathcal{R}_{\bar{r}}^{v,u} \longrightarrow
$$
$$
\longrightarrow IH_{\bar{r}}^{v+1}(M/\mathbb{T}) \otimes_{\boldsymbol{B}} H^u(\mathbb{T}) \longrightarrow \cdots ,
$$

où $\mathcal{R}_{\bar{r}}^{v,u} = \bigoplus_{S \in \mathcal{S}} \{H^{v-2[\bar{r}(\pi(S))/2]}(S/\mathbb{T})\}^{\binom{n-1}{u} - \binom{n-r_S}{u}}$.

5.7. Exemple. Avec l'exemple qui suit nous voulons illustrer la suite exacte (10) qui détermine le deuxième terme ${}_{\bar{r}}E_2$ de la suite spectrale.

5.7.1. Description de l'action. Considérons l'action $\Psi : (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) \times \mathbb{C}^{n_1+n_2+2} \to \mathbb{C}^{n_1+n_2+2}$ définie par $(z_1, z_2) \cdot (v_1, \ldots, v_{n_1+1}, w_1, \ldots, w_{n_2+1}) = (z_1 \cdot v_1, \ldots, z_1 \cdot v_{n_1+1}, z_2 \cdot w_1, \ldots, z_1 \cdot w_{n_2+1})$, où $n_1 \geq 1$ et $n_2 \geq 1$. Cette action du tore $\mathbb{T} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ préserve la norme de $\mathbb{C}^{n_1+n_2+2}$, elle induit donc l'action $\Phi : \mathbb{T} \times \mathbb{S}^{2(n_1+n_2)+3} \to \mathbb{S}^{2(n_1+n_2)+3}$ sur la sphère unité. Nous écrirons $\mathbb{S}^{2(n_1+n_2)+3}$ comme le joint $\mathbb{S}^{2n_1+1} * \mathbb{S}^{2n_2+1}$, c'est-à-dire, le quotient

$$
\mathbb{S}^{2n_1+1} \times \mathbb{S}^{2n_2+1}
$$
$$
\times [-1,1] \Big/ {\scriptstyle \begin{array}{c} ((v_1,\ldots,v_{n_1+1}),(w_1,\ldots,w_{n_2+1}),-1) \sim ((v'_1,\ldots,v'_{n_1-1}),(w_1,\ldots,w_{n_2+1}),-1) \\ ((v_1,\ldots,v_{n_1+1}),(w_1,\ldots,w_{n_2+1}),1) \sim ((v_1,\ldots,v_{n_1+1}),(w'_1,\ldots,w'_{n_2+1}),1) \end{array}} .
$$

Sur le premier facteur (resp. le deuxième facteur) l'action de $\mathbb{T}$ se réduit à l'action de $\mathbb{S}^1 \times \{1\}$ (resp. $\{1\} \times \mathbb{S}^1$) sur $\mathbb{S}^{2n_1+1}$ (resp. $\mathbb{S}^{2n_2+1}$) par le produit de nombres complexes, c'est-à-dire, l'action de Hopf.

Dans $\mathbb{S}^{2(n_1+n_3)+3}$ nous trouvons deux strates singulières $S_1 = \mathbb{S}^{2n_1+1}$, $S_2 = \mathbb{S}^{2n_2+1}$ et la strate régulière $R = \mathbb{S}^{2n_1+1} \times \mathbb{S}^{2n_2+1} \times]-1,1[$. L'espace d'orbites est le joint $\mathbb{CP}^{n_1} * \mathbb{CP}^{n_2}$ et nous avons $\pi(S_1) = \mathbb{CP}^{n_1}$, $\pi(S_2) = \mathbb{CP}^{n_2}$ et $\pi(R) = \mathbb{CP}^{n_1} \times \mathbb{CP}^{n_1} \times]0,1[$, qui sont les strates de l'espace d'orbites.

5.7.2. Première perversité. Une perversité $\bar{r}$ sur $\mathbb{CP}^{n_1} * \mathbb{CP}^{n_2}$ s'identifie au couple d'entiers $(\bar{r}(\pi(S_1)), \bar{r}(\pi(S_2)))$. Nous considérons d'abord le cas $\bar{r} = (2,2)$ et calculons ${}_{(2,2)}E_2$.

Ecrivons $f :]-1,1[\to [0,1]$ une fonction différentiable antisymmétrique avec $f(x) = 1$ si $\frac{1}{4} \leq x \leq 1$. Posons e_1, e_2 les formes d'Euler canoniques de $\mathbb{CP}^{n_1}$ et $\mathbb{CP}^{n_2}$ respectivement. Nous écrivons aussi e_1, e_2 et f les formes différentielles induites dans le produit $\mathbb{CP}^{n_1} \times \mathbb{CP}^{n_2} \times]-1,1[$, partie régulière de $\mathbb{CP}^{n_1} * \mathbb{CP}^{n_2}$. Un calcul direct à l'aide de Mayer-Vietoris donne

$$IH^*_{(0,0)}(\mathbb{CP}^{n_1} * \mathbb{CP}^{n_2}) = \langle 1, [df \wedge e_1^{i_1} \wedge e_2^{i_2}]/1 \leq i_j \leq n_j, j = 1,2\rangle,$$

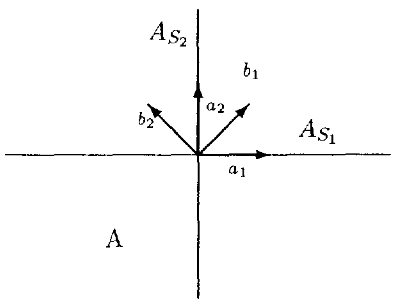
$$IH^*_{(2,0)}(\mathbb{CP}^{n_1} * \mathbb{CP}^{n_2}) = \langle 1, [df \wedge e_1^{i_1} \wedge e_2^{i_2}], [e_2]/1 \leq i_1 \leq n_1, 2 \leq i_2 \leq n_2\rangle,$$

$$IH^*_{(0,2)}(\mathbb{CP}^{n_1} * \mathbb{CP}^{n_2}) = \langle 1, [df \wedge e_1^{i_1} \wedge e_2^{i_2}], [e_1]/2 \leq i_1 \leq n_1, 1 \leq i_2 \leq n_2\rangle,$$

$$IH^*_{(2,2)}(\mathbb{CP}^{n_1} * \mathbb{CP}^{n_2}) = \langle 1, [df \wedge e_1^{i_1} \wedge e_2^{i_2}], [e_1], [e_2], [e_1 \wedge e_2]/2 \leq i_j \leq n_j, j = 1,2\rangle,$$

(cf. [5]). Ici, $\langle - \rangle$ dénote 'espace vectoriel engendré par'.

Nous choisissons deux bases orthonormales de $A = \boldsymbol{R}^2$ et calculons la suite exacte (10) qui détermine le deuxième terme ${}_{(2,2)}E_2$.



(i) $B_1 = \{a_1, a_2\}$. C'est une base ona, ainsi:

$$\begin{aligned} {}_{(2,2)}E_2^{*,*} &\cong IH^*_{(2,2)}(\mathbb{CP}^{n_1} * \mathbb{CP}^{n_2}) \otimes_{B_1} H^*(\mathbb{T}) \\ &= \{IH^*_{(2,2)}(\mathbb{CP}^{n_1} * \mathbb{CP}^{n_2}) \otimes \langle 1 \rangle\} \\ &\quad \oplus \{IH^*_{(0,2)}(\mathbb{CP}^{n_1} * \mathbb{CP}^{n_2}) \otimes \langle a_2 \rangle\} \\ &\quad \oplus \{IH^*_{(2,0)}(\mathbb{CP}^{n_1} * \mathbb{CP}^{n_2}) \otimes \langle a_1 \rangle\} \\ &\quad \oplus \{IH^*_{(0,0)}(\mathbb{CP}^{n_1} * \mathbb{CP}^{n_2}) \otimes \langle a_1 \cdot a_2 \rangle\}. \end{aligned}$$

(ii) $B_2 = \{b_1, b_2\}$. D'après la Remarque 5.7 (a) nous savons déjà que

$$
{}_{(2,2)}E_2^{*,0} = IH^*_{(2,2)}(\mathbb{CP}^{n_1} * \mathbb{CP}^{n_2}) \otimes H^0(\mathbb{T}) \qquad \text{et}
$$
$$
{}_{(2,2)}E_2^{*,2} = IH^*_{(0,0)}(\mathbb{CP}^{n_1} * \mathbb{CP}^{n_2}) \otimes H^2(\mathbb{T}).
$$

Posons $u = 1$. A partir de la suite exacte (10) on obtient

$$
{}_{(2,2)}E_2^{v,1} \cong \begin{cases} \{IH^v_{(2,2)}(\mathbb{CP}^{n_1} * \mathbb{CP}^{n_2}) \otimes H^1(\mathbb{T})\} \oplus \{H^{v-3}(\mathbb{CP}^{n_1}) \oplus H^{v-3}(\mathbb{CP}^{n_2})\} \\ \hfill v \neq 2,3,4,5 \\ \mathrm{Ker}\{\gamma : IH^v_{(2,2)}(\mathbb{CP}^{n_1} * \mathbb{CP}^{n_2}) \otimes H^1(\mathbb{T}) \to H^{v-2}(\mathbb{CP}^{n_1}) \\ \hfill \oplus H^{v-2}(\mathbb{CP}^{n_2})\} \qquad v = 2,4 \\ \mathrm{Coker}\{\gamma : IH^{v-1}_{(2,2)}(\mathbb{CP}^{n_1} * \mathbb{CP}^{n_2}) \otimes H^1(\mathbb{T}) \to H^{v-3}(\mathbb{CP}^{n_1}) \\ \hfill \oplus H^{v-3}(\mathbb{CP}^{n_2})\} \qquad v = 3,5. \end{cases}
$$

Ici, l'opérateur γ est donné par

$$
\begin{aligned}
\gamma([e_1] \otimes b_1) &= \gamma([e_1] \otimes b_2) = (0, \sqrt{2}),\\
\gamma([e_2] \otimes b_1) &= \gamma([e_2] \otimes b_2) = (\sqrt{2}, 0),\\
\gamma([e_1 \wedge e_2] \otimes b_1) &= \sqrt{2}(e_1 + e_2),\\
\gamma([e_1 \wedge e_2] \otimes b_2) &= \sqrt{2}(e_2 - e_1).
\end{aligned}
$$

Un calcul direct donne, comme on pouvait l'attendre, ${}_{(2,2)}E_2^{*,*} \cong IH^*_{(2,2)}(\mathbb{CP}^{n_1} * \mathbb{CP}^{n_2}) \otimes_{\mathcal{B}_1} H^*(\mathbb{T})$.

Cet exemple montre que la suite exacte (10) dépend de la base distinguée.

5.7.3. Deuxième perversité. Considérons la perversité $\bar{r} = (4,4)$, nous montrons que le deuxième terme de la suite spectrale $\{{}_{(4,4)}E_m\}$ est différent de celui de la suite spectrale $\{{}_{(2,2)}E_m\}$. Ceci prouve que la suite spectrale que nous construisons dans ce travail dépend du choix de la perversité (même si l'aboutissement est le même).

Un calcul direct à l'aide de Mayer-Vietoris donne

$$
\begin{aligned}
&IH^*_{(2,4)}(\mathbb{CP}^{n_1} * \mathbb{CP}^{n_2})\\
&\quad = \langle 1, [df \wedge e_1^{i_1} \wedge e_2^{i_2}], [e_1^{k_1} \wedge e_2^{k_2}] / 3 \leq i_1 \leq n_1, 2 \leq i_2 \leq n_2, 0 \leq k_1 \leq 2, 0 \leq k_2 \leq 1\rangle,\\
&IH^*_{(4,2)}(\mathbb{CP}^{n_1} * \mathbb{CP}^{n_2})\\
&\quad = \langle 1, [df \wedge e_1^{i_1} \wedge e_2^{i_2}], [e_1^{k_1} \wedge e_2^{k_2}] / 2 \leq i_1 \leq n_1, 3 \leq i_2 \leq n_2, 0 \leq k_1 \leq 1, 0 \leq k_2 \leq 2\rangle,\\
&IH^*_{(4,4)}(\mathbb{CP}^{n_1} * \mathbb{CP}^{n_2})\\
&\quad = \langle 1, [df \wedge e_1^{i_1} \wedge e_2^{i_2}], [e_1^{k_1} \wedge e_2^{k_2}] / 3 \leq i_j \leq n_j, 0 \leq k_j \leq 2, j = 1,2\rangle.
\end{aligned}
$$

Considérons la base ona $B_1 = \{a_1, a_2\}$. Ainsi:

$$
\begin{aligned}
{}_{(4,4)}E_2^{*,*} &\cong IH^*_{(4,4)}(\mathbb{CP}^{n_1} * \mathbb{CP}^{n_2}) \otimes_{B_1} H^*(\mathbb{T}) \\
&= \{IH^*_{(4,4)}(\mathbb{CP}^{n_1} * \mathbb{CP}^{n_2}) \otimes \langle 1 \rangle\} \\
&\quad \oplus \{IH^*_{(2,4)}(\mathbb{CP}^{n_1} * \mathbb{CP}^{n_2}) \otimes \langle a_2 \rangle\} \\
&\quad \oplus \{IH^*_{(4,2)}(\mathbb{CP}^{n_1} * \mathbb{CP}^{n_2}) \otimes \langle a_1 \rangle\} \\
&\quad \oplus \{IH^*_{(2,2)}(\mathbb{CP}^{n_1} * \mathbb{CP}^{n_2}) \otimes \langle a_1 \cdot a_2 \rangle\}.
\end{aligned}
$$

Nous arrivons à ${}_{(2,2)}E_2^{*,*} \not\cong {}_{(4,4)}E_2^{*,*}$ car $\dim {}_{(2,2)}E_2^{*,*} = 4n_1n_2 - 2(n_1+n_2) + 10 \neq 4n_1n_2 - 7(n_1+n_2) + 29 = \dim {}_{(4,4)}E_2^{*,*}$.

5.8. Comparaison des suites spectrales. Pour une même action $\Phi : \mathbb{T} \times M \to M$ nous n'avons pas construit une mais plusieurs suites spectrales convergeant vers $H^*(M)$; néanmoins, elles ne sont pas indépendantes. Posons $\bar{q}$ et $\bar{r}$ deux perversités sur $M/\mathbb{T}$ vérifiant les inégalités $\bar{0} \leq \bar{q} \leq \bar{r} \leq \bar{z}$. L'inclusion ι : $\Omega^*_{\bar{q}}(M) \to \Omega^*_{\bar{r}}(M)$, qui est un quasi-isomorphisme, préserve la filtration de § 5.1 et définit donc un morphisme de suites spectrales $\{\iota_m : {}_{\bar{q}}E_m \to {}_{\bar{r}}E_m\}_{m \geq 0}$. Nous décrivons dans ce paragraphe le deuxième terme de ce morphisme. Pour cela nous utilisons le résultat suivant, qui complète le Lemme 5.4.3.

Lemme 5.8.1. *Fixons $S \in \mathcal{S}$ et considérons ℓ un entier vérifiant $\ell \leq \ell_S - 1$. Alors*:

$$
H^*\left(\frac{\Omega^{\cdot}_{\bar{\ell}}(\pi(\mathcal{T}_S))}{\Omega^{\cdot}_{\overline{\ell-1}}(\pi(\mathcal{T}_S))}\right)
\cong \begin{cases} H^{*-\ell}(S/\mathbb{T}) & \textit{si } (S \in \mathcal{S}_0 \textit{ et } \ell = 0) \textit{ ou } (S \in \mathcal{S}_1 \textit{ et } 0 \leq \ell \textit{ pair}) \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}
$$

Démonstration. Distinguons plusieurs cas.

- $S \in \mathcal{S}_0$ et $\ell \neq 0$. La procédure suivie à § 5.3.3 montre que le complexe $(\Omega^*_{\bar{\ell}}(\pi(\mathcal{T}_S))/\Omega^*_{\overline{\ell-1}}(\pi(\mathcal{T}_S)))$ est acyclique si et seulement si le complexe

$$
\frac{\bigoplus_{i=0}^{\ell-1} \Omega^i(\mathbb{S}^{\ell_S}/\mathbb{T}_S) \oplus \{\Omega^\ell(\mathbb{S}^{\ell_S}/\mathbb{T}_S) \cap d^{-1}(0)\}}{\bigoplus_{i=0}^{\ell-2} \Omega^i(\mathbb{S}^{\ell_S}/\mathbb{T}_S) \oplus \{\Omega^{\ell-1}(\mathbb{S}^{\ell_S}/\mathbb{T}_S) \cap d^{-1}(0)\}}
$$

est acyclique. Ceci équivaut à la nullité de $H^\ell(\mathbb{S}^{\ell_S}/\mathbb{T}_S)$, ce qui provient des inégalités $1 \leq \ell \leq \ell_S - 1$ et de [3, pag. 132].

- $S \in \mathcal{S}_0$ et $\ell = 0$. Le complexe quotient est réduit à $\Omega^*_{\bar{0}}(\pi(\mathcal{T}_S)) = \rho_S^* \Omega^*(S/\mathbb{T})$, d'où le résultat.
- $S \in \mathcal{S}_1$ et ℓ impair ou $\ell < 0$. On raisonne comme dans le premier cas et on tient compte de l'égalité $H^\ell(\mathbb{S}^{\ell_S}/\mathbb{T}_S) = 0$ si ℓ est impair ou $\ell < 0$.
- $S \in \mathcal{S}_1$ et $0 \leq \ell$ pair. D'après le cas précédent nous avons $H^*(\Omega^{\cdot}_{\bar{\ell}}(\pi(\mathcal{T}_S))/\Omega^{\cdot}_{\overline{\ell-1}}(\pi(\mathcal{T}_S))) \cong H^*(\Omega^{\cdot}_{\bar{\ell}}(\pi(\mathcal{T}_S))/\Omega^{\cdot}_{\overline{\ell-2}}(\pi(\mathcal{T}_S)))$.

Maintenant il suffit d'appliquer le Lemme 5.4.3. □

Théorème 5.8.2. *Soient $\bar{q}$ et $\bar{r}$ deux perversités sur $M/\mathbb{T}$ avec $\bar{0} \leq \bar{q} \leq \bar{r} \leq \bar{z}$ et $[\bar{r}(\pi(S))/2] - [\bar{q}(\pi(S))/2] \leq 1$. Alors, il existe une suite exacte longue*

$$\cdots \longrightarrow {}_{\bar q}E_2^{v,*} \xrightarrow{\iota_2} {}_{\bar r}E_2^{v,*} \longrightarrow \mathcal{P}^{v,*}_{\bar q,\bar r} \longrightarrow {}_{\bar q}E_2^{v+1,*} \xrightarrow{\iota_2} {}_{\bar r}E_2^{v+1,*} \longrightarrow \cdots,$$

avec

$$\mathcal{P}^{*,u}_{\bar q,\bar r} = \bigoplus_S \{\{H^{*-2[\bar r(\pi(S))/2]}(S/\mathbb{T})\}^{\binom{n-1}{u}} \oplus \{H^{*+2-2[\bar r(\pi(S))/2]}(S/\mathbb{T})\}^{\binom{n-1}{u-1}}\},$$

où la somme est étendue à $\{S \in \mathcal{S}_1 / [\bar r(\pi(S))/2] - [\bar q(\pi(S))/2] = 1\}$.

Démonstration. L'existence de partitions de l'unité constituées de fonctions contrôlées implique que la restriction des formes différentielles induit l'isomorphisme différentiel suivant

$$\frac{\mathcal{N}^{*,u}_{\bar r}(M/\mathbb{T})}{\mathcal{N}^{*,u}_{\bar q}(M/\mathbb{T})} \cong \bigoplus_{S\in\mathcal{S}} \frac{\mathcal{N}^{*,u}_{\bar r}(\pi(\mathcal{T}_S))}{\mathcal{N}^{*,u}_{\bar q}(\pi(\mathcal{T}_S))}.$$

Considérons $S \in \mathcal{S}$ et dinstinguons 2 cas pour étudier la cohomologie du complexe quotient $(\mathcal{N}^{*,u}_{\bar r}(\pi(\mathcal{T}_S))/\mathcal{N}^{*,u}_{\bar q}(\pi(\mathcal{T}_S)))$.

- $S \in \mathcal{S}_0$. Nous avons $\mathcal{N}^{*,u}_{\bar r}(\pi(\mathcal{T}_S)) = \Omega^*_{\bar r}(\pi(\mathcal{T}_S)) \otimes H^u(\mathbb{T})$ et $\mathcal{N}^{*,u}_{\bar q}(\pi(\mathcal{T}_S)) = \Omega^*_{\bar q}(\pi(\mathcal{T}_S)) \otimes H^u(\mathbb{T})$. Puisque $1 \le \bar r(\pi(S)) \le \ell_S - 1$ nous avons d'après le lemme précédent que le complexe $(\Omega^*_{\bar r}(\pi(\mathcal{T}_S))/\Omega^*_{\bar q}(\pi(\mathcal{T}_S)))$ est acyclique. Ainsi, le quotient $(\mathcal{N}^{*,u}_{\bar r}(\pi(\mathcal{T}_S))/\mathcal{N}^{*,u}_{\bar q}(\pi(\mathcal{T}_S)))$ est lui aissi acyclique.
- $S \in \mathcal{S}_1$. Puisque les complexes en jeu ne dépendent pas de la base, choisissons une base B orthonormale (relativement à $(-\mid-)$) de façon que a_S soit a_1. Ainsi, nous avons l'égalité

$$\begin{aligned}\mathcal{N}^{*,u}_{\bar r}(\pi(\mathcal{T}_S)) =& \{\Omega^*_{\bar r}(\pi(\mathcal{T}_S)) \otimes \Lambda^u(a_2,\dots,a_n)\}\\ &\oplus \{\Omega^*_{\bar r-\bar 2}(\pi(\mathcal{T}_S)) \otimes a_1 \cdot \Lambda^{u-1}(a_2,\dots,a_n)\}\end{aligned}$$

et l'égalité

$$\begin{aligned}\mathcal{N}^{*,u}_{\bar q}(\pi(\mathcal{T}_S)) =& \{\Omega^*_{\bar q}(\pi(\mathcal{T}_S)) \otimes \Lambda^u(a_2,\dots,a_n)\}\\ &\oplus \{\Omega^*_{\bar q-\bar 2}(\pi(\mathcal{T}_S)) \otimes a_1 \cdot \Lambda^{u-1}(a_2,\dots,a_n)\}.\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\frac{\mathcal{N}^{*,u}_{\bar r}(\pi(\mathcal{T}_S))}{\mathcal{N}^{*,u}_{\bar q}(\pi(\mathcal{T}_S))} \cong& \left\{\frac{\Omega^*_{\bar r}(\pi(\mathcal{T}_S))}{\Omega^*_{\bar q}(\pi(\mathcal{T}_S))} \otimes \Lambda^u(a_2,\dots,a_n)\right\}\\ &\oplus \left\{\frac{\Omega^*_{\bar r-\bar 2}(\pi(\mathcal{T}_S))}{\Omega^*_{\bar q-\bar 2}(\pi(\mathcal{T}_S))} \otimes a_1 \cdot \Lambda^{u-1}(a_2,\dots,a_n)\right\}.\end{aligned}$$

D'après le lemme précédent nous avons $H^*(\mathcal{N}^{*,u}_{\bar r}(\pi(\mathcal{T}_S))/\mathcal{N}^{*,u}_{\bar q}(\pi(\mathcal{T}_S))) \cong \mathcal{P}^{v,*}_{\bar q,\bar r}$; d'où le résultat. □

5.8.3. Exemple. Considérons l'action décrite dans §5.7. Les perversités $\bar q = (2,2)$ et $\bar r = (4,4)$ vérifient les conditions du théorème précédent, nous trouvons ainsi la suite exacte longue

$$\begin{aligned}\cdots \longrightarrow {}_{(2,2)}E_2^{v,*} \xrightarrow{\iota_2} {}_{(4,4)}E_2^{v,*} \longrightarrow \mathcal{P}^{v,*}_{(2,2),(4,4)} \longrightarrow {}_{(2,2)}E_2^{v+1,*} \longrightarrow\\ \xrightarrow{\iota_2} {}_{(4,4)}E_2^{v+1,*} \longrightarrow \cdots,\end{aligned}$$

où

$$\mathcal{P}^{*,u}_{(2,2),(4,4)} \cong \begin{cases} H^{*-4}(\mathbb{CP}^{n_1}) \oplus H^{*-4}(\mathbb{CP}^{n_2}) & \text{si } u = 0 \\ \{H^{*-4}(\mathbb{CP}^{n_1}) \oplus H^{*-4}(\mathbb{CP}^{n_2})\} \oplus \{H^{*-2}(\mathbb{CP}^{n_1}) \oplus H^{*-2}(\mathbb{CP}^{n_2})\} & \\ & \text{si } u = 1 \\ H^{*-2}(\mathbb{CP}^{n_1}) \oplus H^{*-2}(\mathbb{CP}^{n_2}) & \text{si } u = 2. \end{cases}$$

5.9. Annulation des classes d'Euler. Si l'action Φ est libre, l'annulation des classes d'Euler $\{[e_a] \in H^2(M/\mathbb{T})/a \in A\}$ équivaut à l'existence d'un feuilletage transverse aux orbites. Nous montrons dans la suite que, dans le cas simple, l'annulation des classes d'Euler $\{[e_a] \in IH^2_{\bar{2}}(M/\mathbb{T})/a \in A\}$ possède aussi une interprétation géométrique.

Un feuilletage singulier $\mathcal{F}$ sur M [10] est *transverse* à Φ si pour tout point x de $M - \Sigma$ la feuille de $\mathcal{F}$ et l'orbite de Φ passant par x sont transverses.

Théorème 5.9.1. *Soit $\Phi : \mathbb{T} \times M \to M$ une action simple du tore $\mathbb{T}$ sur une variété M. Les deux assertions suivantes sont équivalentes:*

(a) *Les classes d'Euler $\{[e_a] \in IH^2_{\bar{2}}(M/\mathbb{T})/a \in A\}$ s'annulent.*

(b) *Il existe sur M un feuilletage singulier $\mathcal{F}$ transverse à Φ.*

Démonstration. Remarquons tout d'abord que, d'après § 4.5, la première condition ne dépend pas de la bonne métrique choisie.

(a) $\Rightarrow$ (b). Pour chaque $S \in \mathcal{S}$, la voisinage tubulaire $\mathcal{T}_S$ s'identifie naturellement avec $E_S \times [0,1[/\sim$ où $E_S = r_S^{-1}(\frac{1}{2})$ et $(x,0) \sim (x',0)$ si $\tau_S(x) = \tau_S(x')$. Posons $\hat{M}$ la variété à bord obtenue à partir de M en remplaçant $E_S \times [0,1[$ par $\hat{\mathcal{T}}_S$. Elle est naturellement munie d'une action libre $\hat{\Phi}$ de $\mathbb{T}$; nous pouvons ainsi construire une application différentiable équivariante $\mathcal{L} : \hat{M} \to M$ qui envoie difféomorphiquement $\hat{M} - \mathcal{L}^{-1}(\Sigma)$ sur $M - \Sigma$. Les classes d'Euler de M sont donc envoyées par $\mathcal{L}$ sur les classes d'Euler de $\hat{M}$; qui sont donc nulles. Par conséquent il existe sur $\hat{M}$ un feuilletage régulier $\hat{\mathcal{F}}$ transverse aux orbites de $\hat{\Phi}$. On vérifie aisément que la distribution $\mathcal{L}_*(T\hat{\mathcal{F}})$ est localement de type fini, elle définit donc un feuilletage singulier (cf. [10, pag. 185–186]), qui est par construction transverse aux orbites de Φ.

(b) $\Rightarrow$ (a). Pour des raisons de degré, nous avons $IH^2_{\bar{2}}(M) = H^2(M - \Sigma)$ et les classes d'Euler de Φ correspondent avec celles de la restriction de Φ à $M - \Sigma$, où l'action est libre. Ainsi, puisque dans $M - \Sigma$ le feuilletage $\mathcal{F}$ est transverse à Φ, nous avons que les classes d'Euler sont nulles. □

5.9.2. Remarques

Dans les conditions du théorème précédent:

(i) Les seules strates singulières qui peuvent apparaître sont celles qui vérifient $\dim \mathbb{T}_S = 0$ ou bien celles qui vérifient $\ell_S = 1$. L'espace d'orbites $M/\mathbb{T}$ est une variété de Satake à bord, qui est la réunion des strates S avec $\ell_S = 1$.

(ii) La suite spectrale dégénère et $H^*(M) = IH^*_{\bar{0}}(M/\mathbb{T}) \otimes_B H^u(\mathbb{T})$ pour toute base B de A. Rappelons que cette cohomologie s'écrit en termes des cohomologies relatives $\{H^*(M/\mathbb{T}, C)/C$ composante connexe du bord de $M/\mathbb{T}\}$.

REFERENCES

[1] Bott, R. et L. Tu – Differential forms in Algebraic Topology. Graduate Text in Mathematics, Springer-Verlag, New York (1982).
[2] Brasselet, J.P., G. Hector et M. Saralegi – Théorème de De Rham pour les variétés stratifiées. Ann. Global Anal. Geom. **9**, 211–243 (1991).
[3] Bredon, G. – Introduction to compact transformation groups. Pure and Appl. Math., Academic Press, New York and London (1972).
[4] Brylinsky, J.L. – Equivariant intersection cohomology. Contemporary Math. **132**, 5–32 (1992).
[5] Cohen, D.C., M. Goresky et L. Ji – On the Küneth formula for intersection cohomology. Trans. Amer. Math. Soc. **333**, 63–69 (1992).
[6] Greub, W., S. Halperin et. R. Vanstone – Connections, curvature, and cohomology. Pure and Appl. Math., vol. II, Academic Press, New York and London (1972).
[7] Hector, G. et M. Saralegi – Intersection homology of $\mathbb{S}^1$-actions. Trans. Amer. Math. Soc. **338**, 263–288 (1993).
[8] MacPherson, R. – Intersection homology and perverse sheaves. Colloquium Lectures, Annual Meeting of the AMS, San Francisco, June 1991.
[9] Saralegi, M. – Homological properties of stratified spaces. Illinois J. Math. **38**, 47–70 (1994).
[10] Sussmann, H.J. – Orbits of families of vector fields and integrability of distributions. Trans. Amer. Math. Soc. **180**, 171–188 (1973).
[11] Thom, R. – Ensembles et morphismes strafifiés. Bull. Amer. Math. Soc. **75**, 240–284 (1969).
[12] Verona, A. – Stratified mappings – Structure and Triangulability. Lect. Notes in Math. **1102**, Springer-Verlag (1984).