C. R. Acad. Sci. Paris, t. 314, Série I, p. 847-850, 1992

Topologie/*Topology*

Variétés homologiques et homologie d'intersection

Jean-Paul BRASSELET et Martin SARALEGI

Résumé — Dans cette Note, nous montrons que toute pseudo-variété stratifiée A vérifiant :
(*a*) les groupes d'homologie d'intersection $IH_*^{\bar{p}}(A)$ sont indépendants de la perversité ample $\bar{p}$;
(*b*) chaque strate S admet un voisinage tubulaire U_S dont la monodromie homologique est triviale, est une variété homologique. Ceci généralise un résultat de King, où la condition (*b*) demandait la trivialité des voisinages U_S.

Homology manifolds and intersection homology

Abstract — *In this Note, we prove that each stratified pseudomanifold* A *satisfying:*
(*a*) *the intersection homology groups* $IH_*^{\bar{p}}(A)$ *are isomorphic for each loose perversity* $\bar{p}$;
(*b*) *each stratum* S *posseses a tubular neighborhood* U_S, *whose homological monodromy is trivial, is a homology manifold. This generalizes a result of King, where the triviality of the* U_S *themselves was required.*

INTRODUCTION. — Les groupes d'homologie d'intersection d'une pseudo-variété normale qui est une variété homologique sont indépendants de la perversité choisie. En introduisant l'homologie d'intersection Goresky et MacPherson ont conjecturé le résultat suivant :

CONJECTURE. — *Si* A *est une pseudo-variété stratifiée normale telle que, pour toutes perversités* $\bar{p} \leq \bar{q}$, *les applications naturelles* $IH_*^{\bar{p}}(A) \rightarrow IH_*^{\bar{q}}(A)$ *sont des isomorphismes, alors* A *est une variété homologique.*

King a montré que la conjecture n'est pas vérifiée pour les perversités naturellement introduites par Goresky et MacPherson mais qu'elle l'est en considérant une famille plus large de perversités, les perversités amples (*loose perversities*), et en se restreignant à la famille des pseudo-variétés dont les strates possèdent un voisinage tubulaire trivial.

Le but de ce travail est d'élargir la catégorie des pseudo-variétés pour lesquelles la conjecture est réalisée. Nous remplaçons la condition de trivialité topologique de King [4] par une condition plus faible de trivialité homologique : les voisinages tubulaires des strates n'ont pas de monodromie homologique (on dira que la pseudo-variété est sans monodromie, *voir* la définition précise ci-dessous en 2.2). Cette condition est plus naturelle étant donné le caractère homologique de la conjecture. Elle est satisfaite, en particulier pour les *untwisted normal pseudomanifolds* de [4], les espaces stratifiés de [6], l'espace d'orbites de l'action d'un groupe de Lie compact, l'espace des feuilles d'un feuilletage riemannien singulier compact de [5], les pseudo-variétés stratifiées normales où les strates sont simplement connexes, ...

Le résultat principal de cette Note s'énonce ainsi :

THÉORÈME. — *Soit* A *une pseudo-variété stratifiée normale sans monodromie. La pseudo-variété* A *est une variété homologique si et seulement si, pour tout couple de perversités* $\bar{p} \leq \bar{q}$, *les applications naturelles* $IH_*^{\bar{p}}(A) \rightarrow IH_*^{\bar{q}}(A)$ *sont des isomorphismes.*

Toutes les homologies considérées dans ce travail sont à coefficients dans un anneau commutatif unitaire R.

Note présentée par René THOM.

0764-4442/92/03140847 $ 2.00

1. RAPPELS SUR L'HOMOLOGIE D'INTERSECTION. — Nous fixons les notations utilisées par la suite ([2], [3], [4]).

1.0. Une pseudo-variété stratifiée A est une pseudo-variété munie d'une filtration en sous-espaces fermés :

$$A=A_n\supset A_{n-1}=A_{n-2}\supset \ldots \supset A_1\supset A_0\supset A_{-1}=\emptyset$$

tels que $A-A_{n-2}$ soit dense dans A, chaque A_i-A_{i-1} soit vide ou réunion de variétés lisses connexes de dimension i (les strates), et tout point x de A_i-A_{i-1} admette un **voisinage distingué** $\Omega_x\subset A$ homéomorphe à $B^i\times c\,L_x$, produit d'une boule $B^i\subset \mathbf{R}^i$ par le cône sur le « link » L_x. Le link est une pseudo-variété compacte de dimension réelle $n-i-1$ indépendante du point x de la strate $S\subset A_i-A_{i-1}$; on le note L_S; il est filtré en :

$$L_S=L_{n-i-1}\supset L_{n-i-3}\supset \ldots \supset L_0\supset L_{-1}=\emptyset;$$

de plus l'homéomorphisme précédent préserve les stratifications, c'est-à-dire envoie homéomorphiquement $\Omega_x\cap X_j$ sur $B^i\times c\,L_{j-i-1}$, pour tout entier j, $i+1\leqq j\leqq n$.

1.1 Une **perversité ample** est une suite d'entiers $(p_2, \ldots, p_n)$ vérifiant $0\leqq p_k\leqq k-2$ pour tout k. Étant donné un entier m, $0\leqq m\leqq n$, on dit que deux perversités amples $\bar p\leqq \bar q$ sont m-consécutives si on a, pour tout entier $i\neq m$, $p_i=q_i$ et $q_m=p_m+1$.

1.2. Soit A une pseudo-variété stratifiée de dimension n. On notera $m(A)$ l'entier tel que $A_{n-m(A)}$ soit la plus petite strate non vide de A.

Pour chaque perversité ample $\bar p$ on notera $IC_*^{\bar p}(A)$ le complexe des chaînes d'intersection (à supports compacts) à coefficients dans R et $IH_*^{\bar p}(A)$ l'homologie d'intersection de A. Si $\bar q$ est une perversité ample telle que $\bar p\leqq \bar q$, on a une inclusion naturelle $IC_*^{\bar p}(A)\subsetneq IC_*^{\bar q}(A)$. Comme dans [4], nous poserons $IC_*^{\bar q/\bar p}(A)=IC_*^{\bar q}(A)/IC_*^{\bar p}(A)$ et nous noterons $IH^{\bar q/\bar p}(A)$ l'homologie associée. L'application naturelle $IH_*^{\bar p}(A)\to IH_*^{\bar q}(A)$ est un isomorphisme si et seulement si $IH_*^{\bar q/\bar p}(A)=0$.

Remarquons que $IH_*^{\bar q/\bar p}(A)$ est nul si $p_i=q_i$ pour tout entier i tel que $A_{n-i}\neq A_{n-i-1}$; d'autre part, si $\bar p$ et $\bar q$ sont deux perversités $m(A)$-consécutives, alors $IH_*^{\bar q/\bar p}(A)=IH_*^{\bar q/\bar p}(U)$ pour tout ouvert U contenant $A_{n-m(A)}$.

2. PSEUDO-VARIÉTÉS STRATIFIÉES SANS MONODROMIE. — Les pseudo-variétés stratifiées considérées ici sont caractérisées par trois propriétés que l'on développe dans ce paragraphe : elles sont normales, chaque strate possède un voisinage tubulaire et la monodromie homologique de ce voisinage est triviale.

2.1. Soit S une strate de A (composante connexe de A_i-A_{i-1}). Un voisinage $U_S\subset A$ de S est un voisinage tubulaire de S s'il existe une retraction $\varphi_S: U_S\to S$ qui est une fibration localement triviale de fibre $c\,L_S$, cône sur le link de S, et dont le groupe structural est le groupe $\mathrm{Aut}(L_S)$ des automorphismes de L_S (homéomorphismes préservant la stratification de L_S). Un **ensemble stratifié** est la donnée d'une pseudo-variété stratifiée A et d'une famille de voisinages tubulaires $\{U_S\,|\,S \text{ strate de } A\}$ vérifiant les conditions de compatibilité définies par Thom [7].

2.2. Considérons la fibration localement triviale de fibre $IH_*^{\bar p}(c\,L_S)$ associée à la fibration φ_S. Notons $\mu_S^{\bar p}:\pi_1(S)\to \mathrm{Aut}(IH_*^{\bar p}(c\,L_S))$ la monodromie de ce fibré (ici Aut désigne le groupe d'automorphismes correspondant). Remarquons que, si le voisinage tubulaire est le produit $S\times c\,L_S$, alors la monodromie est triviale, c'est-à-dire est l'application constante; la réciproque est fausse.

DÉFINITION. — Une pseudo-variété stratifiée sans monodromie est une pseudo-variété stratifiée normale A munie d'une structure d'ensemble stratifié et dont la monodromie $\mu_S^{\bar{p}}$ des voisinages tubulaires est triviale, ceci pour toute strate S de A et pour toute perversité ample $\bar{p}$. Remarquons que si A est une pseudo-variété stratifiée sans monodromie et si U est ouvert dans A, alors U est une pseudo-variété sans monodromie. De même, chaque link L_S est une pseudo-variété stratifiée sans monodromie. Les exemples cités dans l'introduction sont des exemples de variétés stratifiées sans monodromie.

3. CALCUL DE $IH_*^{\bar{q}/\bar{p}}(A)$. — La démonstration du résultat principal de cette Note est basée sur le calcul de $IH_*^{\bar{q}/\bar{p}}(A)$ pour deux perversités $m(A)$-consécutives $\bar{p} \leqq \bar{q}$.

3.1. Soit $\mathscr{S}$ la famille des composantes connexes de $A_{n-m(A)}$; fixons pour chaque strate $S \in \mathscr{S}$ un voisinage tubulaire U_S tel que $U_S \cap U_{S'} = \varnothing$ si $S \neq S'$. Notons $\mathscr{V}_S = \{V_\alpha\}$ un « bon recouvrement » de S (toute intersection finie est contractible). La réunion des $\mathscr{V}_S$ est un bon recouvrement $\mathscr{V}$ de $A_{n-m(A)}$. Définissons le complexe $C_*(\mathscr{V}_S, IC_*^{\bar{q}/\bar{p}})$ par

$$C_i(\mathscr{V}_S, IC_j^{\bar{q}/\bar{p}}) = \bigoplus_{\alpha_0 < \ldots < \alpha_i} IC_j^{\bar{q}/\bar{p}}(\varphi_S^{-1}(V_{\alpha_0} \cap \ldots \cap V_{\alpha_i})).$$

Notons δ la différentielle de Čech habituelle, $\bar{\partial}$ la différentielle de $IC_*^{\bar{q}/\bar{p}}(A)$ et posons $D = \delta + (-1)^i \bar{\partial}$. En procédant comme dans [1], p. 197, l'étude du complexe différentiel bifiltré $C_*(\mathscr{V}, IC_*^{\bar{q}/\bar{p}}) = \bigoplus_{S \in \mathscr{S}} C_*(\mathscr{V}_S, IC_*^{\bar{q}/\bar{p}})$ permet de montrer :

3.2. PROPOSITION. — *La suite spectrale associée au complexe double* $C_*(\mathscr{V}, IC_*^{\bar{q}/\bar{p}})$ *converge vers* $IH_*^{\bar{q}/\bar{p}}(\bigcup_{S \in \mathscr{S}} U_S)$ *et son second terme est* $E_{i,j}^2 = \bigoplus_{S \in \mathscr{S}} H_i(S) \otimes IH_j^{\bar{q}/\bar{p}}(c\,L_S)$.

3.3. Le calcul de l'homologie d'intersection d'un cône (*voir* [3]) et la suite exacte longue de [4], p. 231, montrent que l'on a :

$$IH_j^{\bar{q}/\bar{p}}(c\,L_S) = \begin{cases} IH_{j-1}^{\bar{p}}(L_S) & \text{si } j = m(A) - 1 - p_{m(A)}, \\ 0 & \text{si } j \neq m(A) - 1 - p_{m(A)}. \end{cases}$$

Par conséquent, si $U = \bigcup_{S \in \mathscr{S}} U_S$, il vient

$$IH_*^{\bar{q}/\bar{p}}(U) \cong \bigoplus_{S \in \mathscr{S}} H_{*-m(A)-1-p_{m(A)}}(S) \otimes IH_{m(A)-2-p_{m(A)}}^{\bar{p}}(L_S).$$

D'autre part, on montre que

$$IH_*^{\bar{q}/\bar{p}}(A) = IH_*^{\bar{q}/\bar{p}}(U)$$

en utilisant la suite exacte longue associée au recouvrement $(U, A_{n-m(A)})$ de A et le fait que, pour tout sous-espace stratifié X de A disjoint de $A_{n-m(A)}$, on a $IH_*^{\bar{p}}(X) = IH_*^{\bar{q}}(X)$, donc $IH_*^{\bar{q}/\bar{p}}(X) = 0$. On obtient alors

$$IH_*^{\bar{q}/\bar{p}}(A) \cong \bigoplus_{S \in \mathscr{S}} H_{*-m(A)-1-p_{m(A)}}(S) \otimes IH_{m(A)-2-p_{m(A)}}^{\bar{p}}(L_S).$$

On en déduit que, pour deux perversités $m(A)$-consécutives $\bar{p} \leqq \bar{q}$, la nullité de $IH_*^{\bar{q}/\bar{p}}(A)$ est équivalente à celle de tous les groupes $IH_{m(A)-2-p_{m(A)}}^{\bar{p}}(L_S)$, pour $S \in \mathscr{S}$.

4. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME. — Si A est une variété homologique, alors les groupes d'homologie sont les mêmes pour toutes les perversités (y compris amples), comme montré dans [4]. Montrons que la réciproque est vraie sous les hypothèses du théorème. On suppose donc que A est une pseudo-variété stratifiée dont les groupes d'homologie d'intersection sont indépendants de la perversité ample $\bar{p}$ et telle que chaque strate S admet un voisinage tubulaire U_S dont la monodromie homologique est triviale. Nous

procéderons par récurrence sur l'entier $m(\mathrm{A})$. Si $m(\mathrm{A})=0$, la pseudo-variété stratifiée A est, en fait, une variété. Supposons le résultat vérifié pour toute pseudo-variété sans monodromie B telle que $m(\mathrm{B})<m(\mathrm{A})$. Pour prouver que A est une variété homologique il suffit de prouver que $\mathrm{U}=\bigcup_{\mathrm{S}\in\mathscr{S}} \mathrm{U_S}$ et $\mathrm{A}-\mathrm{A}_{n-m}$ (où $m=m(\mathrm{A})$) sont des variétés homologiques.

• U est une variété homologique : fixons $\bar{r}=(r_2, \ldots, r_{m-1})$ une perversité ample et considérons pour tout $\beta\in\{0, \ldots, m-3\}$ les perversités m-consécutives : $\bar{p}=(r_2, \ldots, r_{m-1}, \beta, 0, \ldots, 0)$ et $\bar{q}=(r_2, \ldots, r_{m-1}, \beta+1, 0, \ldots, 0)$. D'après 3.3, appliqué aux perversités $\bar{p}$ et $\bar{q}$, nous avons $\mathrm{IH}_j^{\bar{r}}(\mathrm{L_S})=0$ pour tout $\mathrm{S}\in\mathscr{S}$ et tout $j\in\{1, \ldots, m-2\}$. La normalité des $\mathrm{L_S}$ implique $\mathrm{IH}_0^{\bar{r}}(\mathrm{L_S})=\mathrm{IH}_{m-1}^{\bar{r}}(\mathrm{L_S})=\mathrm{R}$. Puisque $m(\mathrm{L_S})<m$ l'hypothèse de récurrence permet d'affirmer que chaque link $\mathrm{L_S}$ est une sphère homologique. Par conséquent, chaque $\mathrm{U_S}$ est une variété homologique; il en est de même de U.

• $\mathrm{A}-\mathrm{A}_{n-m}$ est une variété homologique : en effet, la suite exacte longue associée à la paire (A, U) (*cf.* [4], p. 231) et la relation $\mathrm{IH}_*^{\bar{q}/\bar{p}}(\mathrm{A})=\mathrm{IH}_*^{\bar{q}/\bar{p}}(\mathrm{U})$ montrent que $\mathrm{IH}_*^{\bar{q}/\bar{p}}(\mathrm{A}, \mathrm{U})=0$ pour tout couple $\bar{p}\leqq\bar{q}$ de perversités amples. Par excision, nous trouvons $\mathrm{IH}_*^{\bar{q}/\bar{p}}(\mathrm{A}-\mathrm{A}_{n-m}, \mathrm{U}-\mathrm{A}_{n-m})=0$. D'autre part, la suite exacte longue associée à la paire $(\mathrm{A}-\mathrm{A}_{n-m}, \mathrm{U}-\mathrm{A}_{n-m})$ et la relation $\mathrm{IH}_*^{\bar{q}/\bar{p}}(\mathrm{U}-\mathrm{A}_{n-m})=0$ (car $\mathrm{U}-\mathrm{A}_{n-m}$ est une variété homologique) montrent $\mathrm{IH}_*^{\bar{q}/\bar{p}}(\mathrm{A}-\mathrm{A}_{n-m})=0$. Finalement, puisque $m(\mathrm{A}-\mathrm{A}_{n-m})<m$, l'hypothèse de récurrence permet d'en conclure que $\mathrm{A}-\mathrm{A}_{n-m}$ est une variété homologique.

Le second auteur remercie le Département de Mathématiques de l'Université d'Illinois à Urbana-Champaign pour son hospitalité pendant la réalisation de ce travail.

M. S. : Allocation de recherche du D.G.I.C.Y.T.-Espagne.

Note remise le 18 novembre 1991, acceptée après révision le 11 février 1992.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] R. Bott et L. Tu, *Differential forms in Algebraic Topology*, Graduate Text in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1982.

[2] J.-P. Brasselet, Homologie d'intersection; définitions singulière et simpliciale, *École polytechnique, Journées singulières*, 1984/1985.

[3] M. Goresky et R. MacPherson, Intersection cohomology theory, *Topology*, 19, 1980, p. 135-162.

[4] H. King, Intersection homology and homology manifolds, *Topology*, 21, 1982, p. 229-234.

[5] P. Molino, *Feuilletages riemanniens*, Progress in Mathematics, Birkhäuser, Boston, 1988.

[6] N. Nagase, $\mathscr{L}^2$-cohomology and intersection homology of stratified spaces, *Duke Math. J.*, 50, 1983, p. 329-368.

[7] R. Thom, Ensembles et morphismes stratifiés, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 75, 1969, p. 240-284.

J.-P. B. : *S.D.I. au C.N.R.S.* 6361, *Singularités en Géométrie et Topologie, C.I.R.M. Luminy*, Case n° 916, 13288 *Marseille Cedex* 9;

M. S. : *Department of Matematics, University of Illinois at Urbana-Champaign, Urbana, IL* 61801, *U.S.A.*