Ann. Global Anal. Geom.
Vol. 9, No. 3 (1991), 211–243

Théorème de De Rham pour les Variétés Stratifiées

J. P. BRASSELET, G. HECTOR et M. SARALEGI

Introduction

Pour une variété différentiable A l'isomorphisme de De Rham:

$$H^*_{DR}(A) \to H^*(A)$$

est classiquement réalisé par le morphisme d'intégration:

$$\omega \to \left[c \to \int_c \omega\right].$$

Dans le cas d'une variété singulière A munie d'une stratification de Thom-Mather, Verona a établi un isomorphisme entre la cohomologie du complexe des formes différentielles »contrôlées« sur A et la cohomologie singulière de A.

Les premières généralisations, dans le cadre de l'homologie d'intersection, ont été fournies par J. Cheeger, M. Goresky et R. MacPherson en montrant que, dans le cas où A admet des singularités isolées de type conique, le morphisme d'intégration réalise un isomorphisme de dualité entre la cohomologie des formes différentielles de type $\mathscr{L}^2$ sur la partie lisse de A et l'homologie d'intersection de A. Depuis, de nombreux auteurs ont généralisé ce résultat, dans des cas divers, en construisant, explicitement ou non, l'isomorphisme précédent.

On considère ici le cas d'une préstratification abstraite munie d'une structure de pseudovariété stratifiée. Pour un tel objet A et pour une perversité $\bar{p}$, on se propose de montrer comment le morphisme d'intégration réalise explicitement un isomorphisme de dualité entre la cohomologie d'un complexe de formes différentielles permises et l'homologie d'intersection.

Plus précisément, Goresky et MacPherson ont défini un complexe $\Omega^*_{\bar{q}}(A)$ de formes différentielles satisfaisant certaines conditions de contrôle relativement à la perversité $\bar{q}$, complementaire de $\bar{p}$, ceci au voisinage des strates d'une stratification de Thom-Mather de A. Ce complexe engendre un complexe de faisceaux $\Omega^{\cdot}_{\bar{q}}$ satisfaisant les axiomes des faisceaux pervers, relativement à la perversité $\bar{q}$, et dont l'hypercohomologie est l'homologie d'intersection de A, relativement à la perversité $\bar{q}$.

D'autre part considérons le complexe des chaînes singulières d'intersection: $SC^{\bar{p}}_*(A)$, défini par King. Le complexe dual Hom $(SC^{\bar{p}}_*(A), \mathbf{R})$ engendre un complexe de faisceaux satisfaisant également les axiomes des faisceaux pervers, relativement à la perversité $\bar{q}$.

Les résultats de Goresky et MacPherson, Brylinski, King permettent de montrer que les complexes $\Omega^*_{\bar{q}}(A)$ et Hom $(SC^{\bar{p}}_*(A), \mathbf{R})$ sont quasi-isomorphes. L'objet de ce travail est de montrer que ce quasi-isomorphisme est explicitement réalisé par un morphisme d'intégration.

En fait, l'intégrale d'une forme différentielle de $\Omega^*_{\bar q}(A)$ sur un simplexe de $SC^{\bar p}_*(A)$ n'est pas toujours définie. On a recours ici:

- d'une part, au «déplissage» de A en une variété lisse $\tilde A$ munie d'une projection $\pi\colon \tilde A \to A$ et dont la restriction à la partie lisse de A est un revêtement.
- d'autre part à des sous-complexes $RC^{\bar p}_*(A)$ de $SC^{\bar p}_*(A)$ et $K^*_{\bar q}(A)$ de $\Omega^*_{\bar q}(A)$, constitués respectivement des chaînes d'intersection et des formes différentielles qui se relèvent convenablement dans $\tilde A$.

Sur les relevés des formes et des chaînes, le morphisme d'intégration:

$$\textstyle\int\colon K^*_{\bar q}(A) \to \mathrm{Hom}\,(RC^{\bar p}_*(A), \mathbf{R})$$

est bien défini. On a alors un diagramme

$$\begin{tikzcd} K^*_{\bar q}(A) \arrow[r, "\int"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}\,(RC^{\bar p}_*(A), \mathbf{R}) \\ \Omega^*_{\bar q}(A) & \mathrm{Hom}\,(SC^{\bar p}_*(A), \mathbf{R}) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

dans lequel les flèches verticales sont induites par inclusion. Les calculs locaux caractéristiques de l'homologie d'intersection montrent que les complexes de faisceaux correspondants satisfont les axiomes des faisceaux pervers et que le diagramme précédent est constitué de quasi-isomorphismes. Le résultat principal s'énonce comme suit:

Théorème de De Rham. *Soient A une préstratification abstraite, et $(\bar p, \bar q)$ deux perversités complementaires; le morphisme d'intégration induit un isomorphisme entre la cohomologie du complexe $\Omega^*_{\bar q}(A)$ des formes différentielles d'intersection et la cohomologie d'intersection* $IH^*_{\bar p}(A, \mathbf{R})$.

Dans le chapitre A on rappelle les notions de préstratification abstraite et d'espace stratifié, on introduit les techniques de déplissage relativement à la stratification et à la structure simpliciale.

Le chapitre B est consacré à la construction des complexes $SC^{\bar p}_*(A)$ et $\Omega^*_{\bar q}(A)$, on introduit la notion de relèvement dans chacun de ces complexes, ce qui définit les sous-complexes $RC^{\bar p}_*(A)$ et $K^*_{\bar q}(A)$, constitués respectivement des chaînes et des formes différentielles relevables.

Les calculs locaux, caractéristiques de l'homologie d'intersection, sont faits dans le chapitre C. Dans le chapitre D, on montre que l'intégration est bien définie pour les formes et les chaînes relevables, on montre aussi la formule de Stokes. Les calculs du chapitre C impliquent que l'hypercohomologie des complexes de faisceaux associés à chacun des complexes précédents est l'homologie d'intersection de A; on en déduit le théorème de De Rham.

La thèse de M. Saralegi est le «noyau dur» de ce travail qui a été développé suivant deux directions différentes mais complémentaires: techniques à la Mayer-Vietoris

(Hector-Saralegi) d'une part et techniques faisceautiques (Brasselet) d'autre part. Cette rédaction est à la convergence des deux points de vue. Les auteurs remercient C. Sabbah, D. Lehmann et B. Cenkl pour les conversations fructueuses qu'ils ont eues avec eux à ce sujet.

Tout au long de ce travail on écrira «différentiable» au lieu «de classe C^∞» et toutes les variétés seront supposées paracompactes.

CHAPITRE A
Geométrie des Espaces Stratifiés

Le cadre de ce travail est celui des espaces stratifiés: préstratifications abstraites (cf. [T], [M]) qui sont aussi des pseudovariétés stratifiées (cf. [GM1]). Nous rappelons dans ce chapitre les définitions et propriétés principales de ces deux objets. Nous introduisons aussi la notion de «déplissage», concept qui est à la base du morphisme que nous construisons entre les homologies d'intersection singulière et différentielle.

§ I. Espaces Stratifiés

Pour les préstratifications abstraites on a choisi une définition a priori plus riche que la définition habituelle, mais qui lui est en fait équivalente d'après [V2].

1. Definitions [V2, page 3]. Une paire (A, Γ), avec $\Gamma = \{\mathcal{S}, \tau\}$, est une *préstratification abstraite* si:

(PA i) A est un espace topologique métrisable, localement compact, admettant une base dénombrable d'ouverts;

(PA ii) $\mathcal{S}$ est une partition localement finie de A en ensembles localement fermés, appelés *strates*, qui sont des variétés différentiables; la partition vérifiant:

$X, Y \in \mathcal{S}$ et $X \cap \bar{Y} \neq \emptyset$ implique $X \subset \bar{Y}$;

(PA iii) τ est une famille des *données de contrôle* $\{T_X, \pi_X, \varrho_X\}_{X \in \mathcal{S}}$ où T_X est un voisinage ouvert de X dans A, π_X est une rétraction continue de T_X sur X et $\varrho_X \colon T_X \to [0, \infty[$ est une application continue telle que $X = \varrho_X^{-1}(0)$. De plus, si l'intersection $T_X \cap Y$ est non vide, alors l'application $(\pi_X, \varrho_X) \colon T_X \cap Y \to X \times]0, +\infty[$ est une submersion différentiable propre.

(PA iv) Pour $X, Y, Z \in \mathcal{S}$ les relations suivantes sond vérifiées:
$\pi_X(\pi_Y(a)) = \pi_X(a)$, $\varrho_X(\pi_Y(a)) = \varrho_X(a)$,
dès que $a \in T_X \cap T_Y \cap Z$ et $\pi_Y(a) \in T_X \cap Y$,

(PA v) Pour tous, $X, Y \in \mathcal{S}$ on a les équivalences:
$X \cap \bar{Y} \neq \emptyset$ si et seulement si $T_X \cap Y \neq \emptyset$,
$T_X \cap T_Y \neq \emptyset$ si et seulement si $X \subset \bar{Y}, X = Y$ ou $Y \subset \bar{X}$.

1.1. Un sous-ensemble localement fermé $B \subset A$ est dit *saturé* si la restriction de Γ à B définit une structure de préstratification abstraite sur B et si pour toute strate $X \in \mathscr{S}$, avec $B \cap X \neq \emptyset$, on a:

$$\pi_X^{-1}(B \cap X) = B \cap T_X . \tag{1.1.1}$$

Pour toute strate $X \in \mathscr{S}$ et tout ouvert $U \subset X$ les ouverts $\pi_X^{-1}(U)$, T_X et $A \setminus \bar{X}$ sont saturés, ainsi que les ensembles $S_X = \varrho_X^{-1}(1)$.

1.2. La *profondeur d'une strate X de A*, notée $\operatorname{prof}_A(X)$, est le plus grand entier p pour lequel il existe une suite de strates distinctes $X_0 < X_1 < \ldots < X_p = X$, où $X_i < X_{i+1}$ signifie $X_i \subset \bar{X}_{i+1}$. Une strate de profondeur zéro sera dite *minimale*, c'est toujours un fermé de A.

La profondeur de A est: $\operatorname{prof}(A) = \sup \{\operatorname{prof}_A(X) \mid X \in \mathscr{S}\}$. Cette profondeur est nulle si et seulement si les strates de A sont ses composantes connexes. Dans ce cas A est une variété, mais bien entendu la réciproque est fausse.

1.3. Un ensemble saturé B est *uniformément saturé* si, pour toute paire de strates X et Y de A rencontrant B, on a:

$$\operatorname{prof}_A(X) \setminus \operatorname{prof}_A(Y) = \operatorname{prof}_B(B \cap X) \setminus \operatorname{prof}_B(B \cap Y) .$$

Les exemples de (1.1), sauf éventuellement $A \setminus \bar{X}$, sont uniformément saturés.

1.4. Pour toute variété différentiable M le produit $M \times A$ est muni de façon canonique d'une structure de préstratification abstraite dont les strates sont $\{M \times X \mid X \in \mathscr{S}\}$ et dont les données de contrôle sont définies de façon analogue.

Soient $cA = A \times [0, +\infty[/A \times \{0\}$ *le cône ouvert* de A et $*$ son sommet (c'est-à-dire la classe de $A \times \{0\}$). Si A est compact, on considérera sur cA la structure de préstratification abstraite canoniquement définie à partir de celle de A dont l'ensemble des strates est $\{X \times]0, \infty[\mid X \in \mathscr{S}\} \cup \{*\}$. On remarquera qu'on a l'égalité $\operatorname{prof}(cA) = \operatorname{prof}(A) + 1$.

2. Definition. Soient $\{A, \Gamma\}$ et $\{A', \Gamma'\}$ deux préstratifications abstraites. Un homéomorphisme $f\colon A \to A'$ est un *isomorphisme de préstratifications abstraites* (on dira *isomorphisme*) si:

(a) f envoie différentiablement les strates de $\mathscr{S}$ sur les strates de $\mathscr{S}'$,

(b) $\pi_{f(X)} \circ f = f \circ \pi_X$ et $\varrho_X = \varrho_{f(X)} \circ f$, pour tout $X \in \mathscr{S}$.

On désignera par $\operatorname{Aut}(A, \Gamma)$ le groupe des automorphismes de (A, Γ).

3. Remarque. Dans [V2, page 16] on montre que pour toute préstratification abstraite (A, Γ) il existe une famille de préstratifications abstraites $(L_X, \Gamma_X = \{\mathscr{S}_X, \tau_X\})$, indexée par $X \in \mathscr{S}$, telle que, quitte à reparamétrer les données de contrôle, la préstratification abstraite (A, Γ) vérifie la condition supplémentaire:

(PA vi) pour toute strate $X \in \mathscr{S}$ la restriction $\pi_X\colon T_X \to X$ est un fibré localement trivial de fibre cL_X qui possède un atlas trivialisant $\mathscr{U}_X = \{(\varphi, U)\}$ tel que:

(a) la trivialisation $\varphi\colon \pi_X^{-1}(U) \to U \times cL_X$ est un isomorphisme. (cf. (1.1) et (1.4));

(b) les fonctions de transition de $\mathscr{U}_X$ prennent leurs valeurs dans Aut (L_X, Γ_X), i.e., pour tous (φ, U), $(\psi, V) \in \mathscr{U}_X$ il existe $f: U \cap V \to$ Aut (L_X, Γ_X) telle que $\psi\varphi^{-1}(x, [y, r]) = (x, [f(x)(y), r])$, pour tout $x \in U \cap V$ et tout $[y, r] \in cL_X$.

On remarquera que chaque préstratification abstraite (L_X, Γ_X) vérifie à son tour (PA vi).

4. Remarque. Sur A on a la filtration naturelle $\emptyset = A_{-1} \subset A_0 \subset \ldots \subset A_j \subset \ldots$, où A_j est la réunion des strates X de dimension $\leqq j$. L'espace A est une pseudovariété stratifiée (cf. [GM1]) si:

(PA vii) il existe un entier n tel que $A = A_n$, $A_{n-1} = A_{n-2}$ et $A \setminus A_{n-1}$ est un ouvert dense de A.

Pour résumer on introduit la notion suivante:

5. Définition. Un *espace stratifié* est une paire (A, Γ) vérifiant les conditions (i)–(vii). C'est donc une préstratification abstraite dont la stratification définit également sur A une structure de pseudovariété stratifiée.

Tout ouvert saturé d'un espace stratifié est à son tour un espace stratifié. D'après (PA vi(a)) chaque S_X et chaque L_X est un espace stratifié. Remarquons finalement que tout isomorphisme entre deux espaces stratifiés est un isomorphisme de pseudovariétés stratifiées au sens de [GM1].

Fixons pour la suite un espace stratifié (A, Γ) de dimension n.

6. Description de la structure stratifiée de T_X. La structure d'espace stratifié de T_X est décrite à l'aide de la notion de fibré stratifié, que nous introduisons maintenant:

6.1. Soit D un espace stratifié et $\alpha: D \to M$ une fibration localement triviale de fibre L, sur une variété différentiable M. Nous dirons que α est un *fibré stratifié* s'il existe une structure stratifiée Γ_L sur L et un atlas $\mathscr{U} = \{(\varphi, U)\}$ de α vérifiant:

(a) $\alpha^{-1}(U)$ est un ouvert plein de D,

(b) chaque trivialisation $\varphi: \alpha^{-1}(U) \to U \times L$ est un isomorphisme (cf. 2).

Remarquons que les fonctions de transition de $\mathscr{U}$ prennent leurs valeurs dans Aut (L, Γ_L). Les principaux exemples de fibrés stratifiés sont $\pi_X: T_X \to X$ et $\pi_X: S_X \to X$, pour X strate de A.

6.2. Le *«mapping cylindre»* de α est l'espace quotient $D \times [0, \infty[/\sim$ où $(d, 0) \sim (d', 0)$ si $\alpha(d) = \alpha(d')$. Cet espace hérite de D une structure d'espace stratifié dont les strates sont $\{Y \times]0, \infty]$ avec Y strate de $D\} \cup \{M\}$ et dont les données de contrôle sont définies naturellement à partir de celles de D. On observera que l'espace stratifié $(D \times [0, \infty[/\sim) \setminus M$ est l'espace stratifié produit $D \times]0, \infty[$.

6.3. Fixons une strate X de A. Le «mapping cylindre» $S_X \times [0, \infty[/\sim$ du fibré stratifié $\pi_X: S_X \to X$ est isomorphe à T_X. Un isomorphisme est donné par l'application $F_X: S_X \times [0, \infty[/\sim \to T_X$ qui, à chaque classe $[c, t]$ associe $\varphi^{-1}(x, [y, t])$, où $(\varphi, U) \in \mathscr{U}_x$ et $\varphi(c) = (x, [y, 1]) \in U \times cL_X$ (cf. (PA vi)).

Remarquons que l'espace stratifié $T_X \setminus X$ est isomorphe à $S_X \times]0, \infty[$ (cf. (1.4)).

6.4. Remarque. Si $f: A \to A'$ est un isomorphisme entre deux espaces stratifiés alors, pour toute strate $X \in \mathscr{S}$, on a la relation $fF_x[c, t] = F_{f(x)}[f(c), t]$, pour tout point $[c, t]$ de $S_X[0, \infty[/\sim$. Cette remarque se trouve à la base de (II-(3.2)).

§ II. Déplissage d'un Espace Stratifié

Le déplissage de (A, Γ) est une procédure qui consiste à remplacer chaque strate minimale X par S_X. En itérant un nombre suffisant de fois cette opération on arrive à une variété $\tilde{A}$, appelée *le déplissage* de (A, Γ). Cette variété est le «double» de la résolution des singularités de Verona [V2, page 75]. Le point de vue adopté ici est justifié par le fait qu'il permet d'éviter l'introduction d'espaces stratifiés à bords et à coins.

1. Déplissage élémentaire. Si prof $(A) \neq 0$ on désignera par $\mathscr{S}_0$ l'ensemble des strates minimales de A et on désignera par $\hat{A}$ la somme amalgamée de deux copies de $A \setminus \bigcup_{X \in \mathscr{S}_0} X$ et d'une copie de $\bigcup_{X \in \mathscr{S}_0} (S_X \times \mathbf{R})$ le long des F_X, c'est-à-dire, $\hat{A}$ est obtenu comme quotient de l'espace

$$\left[A \setminus \bigcup_{X \in \mathscr{S}_0} X\right] \times \{-1, 1\} \cup \left[\bigcup_{X \in \mathscr{S}_0} (S_X \times \mathbf{R})\right] \tag{1.1}$$

par la relation d'équivalence R:

$$(z, j)\, R\, (c, t) \text{ si } |t| = jt \quad \text{et} \quad z = F_X[c, |t|]\,, \quad \text{pour} \quad X \in \mathscr{S}_0\,. \tag{1.2}$$

On a la projection naturelle $\theta: \hat{A} \to A$ définie par:

$$\theta(u) = \begin{cases} z & \text{si} \quad u = (z, j) \in \left[A \setminus \bigcup_{X \in \mathscr{S}_0} X\right] \times \{-1, 1\}\,, \\ F_X[c, |t|] & \text{si} \quad u = (c, t) \in S_X \times \mathbf{R}, X \in \mathscr{S}_0\,. \end{cases}$$

On dira que $\theta: \hat{A} \to A$ est le *déplissage élémentaire* de (A, Γ).

2. Remarques.

i) L'espace $\hat{A} \setminus \bigcup_{X \in \mathscr{S}_0} \theta^{-1}(X)$ possède deux composantes connexes et la restriction de θ à chacune d'entre elles est un homéomorphisme sur $A \setminus \bigcup_{X \in \mathscr{S}_0} X$.

ii) Pour chaque $X \in \mathscr{S}_0$, l'image réciproque $\theta^{-1}(X) = S_X \times \{0\}$ admet $S_X \times \mathbf{R}$ comme voisinage dans $\hat{A}$. La restriction de θ à $S_X \times \{0\}$ coïncide avec π_X, c'est-à-dire, $\theta(y, 0) = \pi_X(y)$ pour tout $y \in S_X$.

iii) Pour toute strate $Y \notin \mathscr{S}_0$, le sous-ensemble de $\hat{A}$:

$$\mathscr{Y} = Y \times \{-1, 1\} \cup \left[\bigcup_{X \in \mathscr{S}_0} ((S_X \cap Y) \times \mathbf{R})\right] \Big/ R$$

est une variété différentiable. Elle continent $\theta^{-1}(Y) = Y \times \{-1, 1\}$ et la restriction de θ à $\theta^{-1}(Y)$ est un revêtement différentiable trivial à deux feuillets.

3. Structure stratifiée de $\hat{A}$. La famille $\hat{\mathscr{S}} = \{\mathscr{Y} \mid Y \in \mathscr{S} \setminus \mathscr{S}_0\}$ est une stratification de $\hat{A}$ et l'espace $\hat{A}$ hérite de A une structure d'espace stratifié $(\hat{A}, \hat{\Gamma})$ qui est décrite par la proposition suivante, dont la démonstration découle des remarques précédentes.

3.1. Proposition. *L'espace $\hat{A}$ possède une unique structure d'espace stratifié $\hat{\Gamma} = \{\hat{\mathscr{S}}; \hat{\tau}\}$ vérifiant:*

(a) $(A \setminus \bigcup_{X \in \mathscr{S}_0} X) \times \{-1, 1\}$ et $S_X \times \mathbf{R}$, *pour* $X \in \mathscr{S}_0$, *sont des ouverts saturés de* $\hat{A}$.

(b) *la restriction de θ à chaque composante connexe de* $(A \setminus \bigcup_{X \in \mathscr{S}_0} X) \times \{-1, 1\}$ *est un isomorphisme,*

(c) *la restriction de $\hat{\Gamma}$* à $S_X \times \mathbf{R}$ *coïncide avec la structure stratifiée produit de S_X par* $\mathbf{R}$ (cf, I-(1.4)),

(d) $\operatorname{prof}(\hat{A}) = \operatorname{prof}(A) - 1$.

Cette construction se comporte bien par rapport aux isomorphismes.

3.2. Proposition. *Si $f: A \to A'$ est un isomorphisme entre deux espaces stratifiés alors il existe un isomorphisme $\hat{f}: \hat{A} \to \hat{A}'$ vérifiant $\theta'\hat{f} = f\theta$.*

Démonstration. Remarquons tout d'abord que $\mathscr{S}'_0$ est précisément $\{f(X) \mid X \in \mathscr{S}_0\}$. Soit $\hat{f}: \hat{A} \to \hat{A}'$ définie par:

$$\hat{f}(u) = \begin{cases} (f(z), j) & \text{si} \quad u = (z, j) \in \left[A \setminus \bigcup_{X \in \mathscr{S}_0} X \right] \times \{-1, 1\}, \\ (f(c), t) & \text{si} \quad u = (c, t) \in S_X \times \mathbf{R}, X \in \mathscr{S}_0 . \end{cases} \tag{3.2.1}$$

La relation (I-(6.4)) montre que $\hat{f}$ est bien définie et que l'on a: $\theta'\hat{f} = f\theta$. L'application $\hat{f}$ est un isomorphisme d'après (3.1).

3.3. Convention. Remarquons que cet isomorphisme n'est pas unique: on en obtiendrait un autre en échangeant le rôle des deux feuillets de $\left[A \setminus \bigcup_{X \in \mathscr{S}_0} X \right] \times \{-1, 1\}$. Pour éviter ceci, on supposera toujours que $\hat{f}$ est définie comme dans (3.2.1).

3.4. Remarque. Soit $B \subset A$ un sous-ensemble uniformément saturé qui rencontre les strates de $\mathscr{S}_0$. La famille de strates minimales de B est: $\{B \cap X \neq \emptyset \mid X \in \mathscr{S}_0\}$. L'écriture (1.1) montre que $\hat{B}$ s'identifie à $\theta^{-1}(B)$ et la restriction de θ à $\theta^{-1}(B) = \hat{B}$ est le déplissage de B.

D'autre part, comme la mesure de la profondeur d'une strate peut être faite localement (cf. I-PA v) on a l'égalité $\operatorname{prof}_{\hat{B}} (\hat{B} \cap Y) = \operatorname{prof}_B (B \cap Y)$, pour $Y \in \mathscr{S}$, avec $Y \cap B \neq \emptyset$ (cf. (3.1(b))). Ceci montre que $\hat{B}$ est aussi uniformément saturé.

4. Itération du déplissage élémentaire: déplissage. Le processus de déplissage élémentaire «supprime» les strates minimales de A ce qui implique que $\operatorname{prof}(\hat{A}) = \operatorname{prof}(A) - 1$. Si

$\hat{A}$ possède une partie singulière non vide (i.e. prof $(\hat{A}) \neq 0$) on itère le déplissage élémentaire. Après avoir réalisé cette opération un nombre de fois égale à prof (A) on obtient un espace stratifié de profondeur zéro. C'est donc une variété différentiable, que l'on notera $\tilde{A}$.

Par composition des déplissages élémentaires successifs on arrive à une application $\pi\colon \tilde{A} \to A$, appelée *déplissage* de (A, Γ). La restriction de π à $\tilde{A} \setminus \pi^{-1}(\Sigma)$ est, d'après (3.1(b)) un revêtement trivial à $2^{\text{prof}\,(A)}$-feuillets. Les automorphismes de ce revêtement s'étendent en difféomorphismes de $\tilde{A}$ (cf. (3.2)). L'adhérence de chacune des composantes connexes de $\tilde{A} \setminus \pi^{-1}(\Sigma)$ coïncide avec la résolution des singularités de [V2]. Pour la cohérence des notations on posera $\tilde{A} = A$ et $\pi \equiv$ identité, si prof $(A) = 0$.

Nous terminons ce paragraphe avec les propriétés suivantes du déplissage, qui seront nécessaires pour la suite.

4.1. Les déplissages des espaces stratifiés $M \times A$ et cA (cf. I-(1.4)) sont respectivement

$$\pi_1\colon M \times \tilde{A} \to M \times A\,, \qquad \pi_1(x, \tilde{a}) = (x, \pi(\tilde{a}))\,,$$

$$\pi_2\colon \tilde{A} \times \mathbf{R} \to cA\,, \qquad \pi_2(\tilde{a}, t) = [\pi(\tilde{a}), t]\,.$$

4.2. Tout isomorphisme $f\colon A \to A'$ se relève en un difféomorphisme $\tilde{f}\colon \tilde{A} \to \tilde{A}'$ vérifiant $\pi'\tilde{f} = f\pi$ (cf. (3.2)). Avec la convention (3.3) ce difféomorphisme est unique; le groupe Aut (A, Γ) est donc un sous-groupe du groupe des difféomorphismes Diff $(\tilde{A})$ de $\tilde{A}$.

Comme conséquence de (3.1(a)) et de (3.4) on obtient:

4.3. Proposition. *Soit $B \subset A$ un ouvert uniformément saturé connexe. Pour chaque composante connexe C de $\pi^{-1}(B)$ il existe un plongement $f\colon \tilde{B} \to \tilde{A}$ faisant commuter le diagramme:*

$$\begin{tikzcd}
\tilde{B} \arrow[r, hook, "f"] \arrow[d, "\text{déplissage de } B"'] & \tilde{A} \arrow[d, "\pi"] \\
B \arrow[r, hook] & A
\end{tikzcd}$$

et tel que $f(\tilde{B}) = C$.

Si pour toute strate $X \in \mathscr{S}$ on a l'égalité $\text{prof}_B\,(B \cap X) = \text{prof}_A\,(X)$ alors f est un difféomorphisme de $\tilde{B}$ sur $\pi^{-1}(B)$.

4.4. Proposition. *Soit $L \hookrightarrow D \xrightarrow{\alpha} M$ un fibré stratifié. La composée de α avec le déplissage $\pi_D\colon \tilde{D} \to D$ est un fibré différentiable localement trivial dont la fibre est le déplissage $\tilde{L}$ de L.*

Demonstration. Remarquons tout d'abord que la structure locale produit de D permet d'écrire l'égalité $\text{prof}_B\,(B \cap X) = \text{prof}_D\,(X)$ pour toute strate X de D et tout ensemble $B = \alpha^{-1}(U)$, où $U \subset M$ est un ouvert.

Montrons que la composée $\beta = \alpha \circ \pi_D$ est le fibré associé à l'inclusion Aut (L, Γ_L) $\subset$ Diff $(\tilde{L})$. Observons pour cela que pour toute carte $(\varphi, U) \in \mathscr{U}$ (cf. I-(6.1)) il existe un difféomorphisme $\tilde{\varphi}$ faisant commuter le diagramme suivant (cf. (4.2), (4.3)):

$$\begin{array}{ccc} \beta^{-1}(U) & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & U \times \tilde{L} \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_D} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_1} \\ \alpha^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi} & U \times L \end{array} \qquad \text{(cf. (4.1))}$$

§ III. Déplissage Simplicial

Pour pouvoir «relever» les chaînes d'intersection on aura besoin de considérer des structures d'espaces stratifiés sur les complexes simpliciaux; celles-ci seront d'une part plus simples parce que linéaires, d'autre part plus complexes parce que à bords et à coins. On va donc décrire dans ce paragraphe une procédure de déplissage spécifique, appelée déplissage simplicial. Elle coïncide avec la résolution de singularités de [V2]. Pour le déplissage des espaces stratifiés on aurait pu procéder comme dans le cas simplicial, mais cela aurait eu l'inconvénient d'introduire des espaces stratifiés à bords et à coins.

Par exemple, si $\Delta = A * B$ est le simplexe linéaire standard considéré comme joint de deux faces A et B, le déplissage simplicial de Δ est le prisme $\bar{c}A \times B$, où $\bar{c}A$ est le cône fermé $A \times [0, 1]/_{A \times \{0\}}$. Remarquons que le déplissage simplicial augmente d'une unité le nombre de faces de codimension un.

Plus généralement on définit le déplissage simplicial le long d'une famille de faces:

1. Définitions. Soit Δ le simplexe standard.

i) Une famille $(\Delta_0, \ldots, \Delta_p)$ de faces est une *décomposition de* Δ si on peut écrire $\Delta = \Delta_0 * \ldots * \Delta_p$, c'est-à-dire si

$$\Delta = \{t_0x_0 + (1-t_0)t_1x_1 + \ldots + (1-t_0)\ldots(1-t_{p-1})\,x_p \mid t_0, \ldots, t_{p-1} \in [0, 1],\ x_i \in \Delta_i,\ i = 0, \ldots, p\}.$$

ii) Soit $\tilde{\Delta}$ le polyèdre $\bar{c}\Delta_0 \times \ldots \times \bar{c}\Delta_{p-1} \times \Delta_p$. L'application $\mu\colon \tilde{\Delta} \to \Delta$ définie par

$$\mu([x_0, t_0], \ldots, [x_{p-1}, t_{p-1}], x_p) = t_0x_0 + (1-t_0)\,t_1x_1 + \ldots + (1-t_0)\ldots(1-t_{p-1})\,x_p\,,$$

est appelée *déplissage simplicial de Δ le long de* $(\Delta_0, \ldots, \Delta_p)$.

L'application μ est bien définie et c'est un difféomorphisme de l'intérieur de $\tilde{\Delta}$ sur l'intérieur de Δ.

Nous décrivons dans la suite l'effet du déplissage simplicial sur les simplexes de Δ.

2. Déplissage d'une face. Si C est une face de Δ, avec $C_i = C \cap \Delta_i \neq \emptyset$ pour $i \in \{0, \ldots, p\}$, on aura $C = C_0 * \ldots * C_p$ et le déplissage simplicial de C le long de $(C_0, \ldots, C_p)$ est la restriction de $\mu\colon \tilde{\Delta} \to \Delta$ à $\tilde{C}$.

Le cas général se complique du fait que la position relative de C et des $(\Delta_0 \dots \Delta_p)$ s'exprime à l'aide des subdivisions des Δ_i et non plus des faces des Δ_i.

3. Déplissage d'un élément d'une subdivision. Soit C un élément d'une subdivision linéaire de Δ. On extrait de $(0, 1, \dots, p)$ la sous-suite maximale $(i_0, \dots, i_q)$ vérifiant:

$$\emptyset \underset{\neq}{\subset} C^0 \underset{\neq}{\subset} C^1 \underset{\neq}{\subset} \dots \underset{\neq}{\subset} C^{q-1} \underset{\neq}{\subset} C^q = C$$

où $C^j = C \cap (\Delta_0 * \dots * \Delta_{i_j}) \underset{\neq}{\supset} C \cap (\Delta_0 * \dots * \Delta_{i_j - 1})$. Pour chaque $j \in \{0, \dots, q\}$ on note C_j la face de C^j opposée à C^{j-1} et on obtient:

$$C^j = C^{j-1} * C_j = C_0 * \dots * C_j \quad (\text{ici } C^{-1} = \emptyset)$$

que l'on appelle *décomposition induite de* C. Dans le cas précédent on a $(i_0, \dots, i_q) = (0, \dots, p)$ et $C_j = C \cap \Delta_j$ pour chaque j.

Le déplissage simplicial $\mu_C \colon \tilde{C} \to C$ est alors relié au déplissage simplicial $\mu \colon \tilde{\Delta} \to \Delta$ par la proposition suivante dont la démonstration longue et technique se trouve dans l'appendice. Rappelons d'abord qu'une application définie sur un polyèdre $P \subset \mathbf{R}^N$ est *différentiable* si elle est la restriction d'une application différentiable définie sur un ouvert de $\mathbf{R}^N$ contenant P.

4. Proposition. *Soit C un simplexe d'une subdivision linéaire de Δ. Il existe une application différentiable $h \colon \tilde{C} \to \tilde{\Delta}$ telle que $\mu \circ h = \mu_C$.*

5. Déplissage du bord. Passons à la description du bord $\partial\tilde{\Delta}$ et pour cela considérons une face F de $\tilde{\Delta}$ de codimension un et $C = \mu(F)$. Ces faces sont de trois types:

(a.1) $F = \bar{c}\Delta_0 \times \dots \times \bar{c}\Delta_{i-1} \times \bar{c}F_i \times \bar{c}\Delta_{i+1} \times \dots \times \bar{c}\Delta_{p-1} \times \Delta_p$, où F_i est une face de codimension un de Δ_i (convention: $\bar{c}\emptyset$ = point),

(a.2) $F = \bar{c}\Delta_0 \times \dots \times \bar{c}\Delta_{p-1} \times F_p$, où F_p est une face de codimension un de Δ_p,

(b) $F = \bar{c}\Delta_0 \times \dots \times \bar{c}\Delta_{i-1} \times (\Delta_i \times \{1\}) \times \bar{c}\Delta_{i+1} \times \dots \times \bar{c}\Delta_{p-1} \times \Delta_p$.

Lorsque F parcourt les faces de type (a.1) et (a.2) on vérifie aisément que C parcourt les faces de codimension un de Δ. Pour le troisième cas on obtient que C est la face $\Delta_0 * \dots * \Delta_i$. La restriction de μ à F est donnée, suivant les cas, par:

(a.1) et (a.2) le déplissage simplicial de C le long de la décomposition induite,

(b) la composée de la projection naturelle de F sur $\bar{c}\Delta_0 \times \dots \times \bar{c}\Delta_{i-1} \times \Delta_i$ avec le déplissage simplicial de C le long de la décomposition induite.

Remarquons que dans les deux premiers cas la restriction de μ à l'intérieur de F est un difféomorphisme et dans le troisième cas c'est une submersion non-injective.

5.1. Considérons sur $\tilde{\Delta}$ l'orientation qui fait de μ un morphisme préservant l'orientation (comme μ est un difféomorphisme en restriction à l'intérieur de $\tilde{\Delta}$, c'est toujours possible !). Nous écrivons donc les bords $\partial\tilde{\Delta}$ et $\partial\Delta$ en tenant compte de l'orientation induite.

D'après les observations précédentes, on a la relation

$$\partial\tilde{\Delta} = \widetilde{\partial\Delta} + \delta\tilde{\Delta}\,, \tag{5.1.1}$$

où $\widetilde{\partial\Delta}$ est la chaîne constituée par les déplissages simpliciaux des faces de Δ et $\delta\tilde{\Delta}$ est la chaîne orientée formée par les faces de $\tilde{\Delta}$ de type (b). On remarquera en particulier que le déplissage simplicial du bord $\partial\Delta$ ne coïncide pas avec le bord du déplissage simplicial de Δ.

CHAPITRE B
Complexes et Faisceaux

Nous présentons dans ce chapitre les faisceaux *Hom* ($SC_{\cdot}^{\bar{p}}$, $\mathbf{R}$) et $\Omega_{\bar{q}}^{\cdot}$ engendrés respectivement par *Hom* ($SC_{*}^{\bar{p}}$, $\mathbf{R}$), complexe des cochaînes d'intersection singulières [K], et par $\Omega_{\bar{q}}^{*}$, complexe des formes différentielles d'intersection [Bry]. D'autre part nous introduisons les faisceaux *Hom* ($RC_{\cdot}^{\bar{p}}$ $\mathbf{R}$) et $K_{\bar{q}}^{\cdot}$, constitués par les éléments releveables. Ce sont ces faisceaux qui permettront de montrer que l'intégration des formes sur les simplexes induit un isomorphisme entre l'homologie d'intersection et la cohomlogie du complexe $\Omega_{\bar{q}}^{*}$.

Fixons pour la suite un espace stratifié A de dimension n et soient $\bar{p}$ et $\bar{q}$ deux perversités complémentaires (cf. [GM1]). L'anneau des coefficients sera toujours $\mathbf{R}$.

§ I. Faisceau des Cochaînes d'Intersection Singulières *Hom* ($SC_{\cdot}^{\bar{p}}$, $\mathbf{R}$)

Le point de vue singulier de l'homologie d'intersection, que nous développons maintenant, a été introduit dans [K] (voir aussi [Bra 1]).

1. Définitions. Un simplexe singulier $\sigma\colon \Delta \to A$, de dimension i, est *$\bar{p}$-permis* si pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$ l'image réciproque $\sigma^{-1}(A_{n-k} \setminus A_{n-k-1})$ est contenue dans le $(i - k + p_k)$-squelette de Δ. Remarquons que tout simplexe singulier obtenu par subdivision linéaire de Δ est aussi $\bar{p}$-permis. Une chaîne singulière finie est *$\bar{p}$-permise* si elle est somme de simplexes $\bar{p}$-permis. Deux chaînes $\bar{p}$-permises seront identifiées si l'une est obtenue à partir de l'autre par subdivision linéaire de Δ.

Pour chaque ouvert $U \subset A$, *le complexe des chaînes d'intersection singulières* $SC_{*}^{\bar{p}}(U)$, est le complexe des chaînes $\bar{p}$-permises de U dont les bords sont aussi $\bar{p}$-permis.

Le *préfaisceau des i-cochaînes d'intersection singulières* de A est le préfaisceau sur A qui, à chaque ouvert U de A, associe l'espace Hom ($SC_{i}^{\bar{p}}(U)$, $\mathbf{R}$). On désignera ce préfaisceau par *Hom* ($SC_{i}^{\bar{p}}$, $\mathbf{R}$).

2. Proposition. *Le complexe des préfaisceaux Hom* ($SC_{\cdot}^{\bar{p}}$, $\mathbf{R}$) *est un complexe de faisceaux flasques.*

Demonstration. Pour vérifier que *Hom* $(SC_*^{\bar{p}}, \mathbf{R})$ est un complexe des faisceaux, fixons un recouvrement ouvert $\{U_\alpha \mid \alpha \in I\}$ de A. Comme dans [K], la suite

$$\ldots \to \bigoplus_{\alpha_0 < \alpha_1} SC_*^{\bar{p}}(U_{\alpha_0} \cap U_{\alpha_1}) \to \bigoplus_{\alpha \in I} SC_*^{\bar{p}}(U_\alpha) \to SC_*^{\bar{p}}(A) \to 0\,, \tag{2.1}$$

induite par restriction, est exacte. Par dualité, la suite

$$0 \to \mathrm{Hom}\,(SC_*^{\bar{p}}(A), \mathbf{R}) \to \prod_{\alpha \in I} \mathrm{Hom}\,(SC_*^{\bar{p}}(U_\alpha), \mathbf{R})$$
$$\to \prod_{\alpha_0 < \alpha_1} \mathrm{Hom}\,(SC_*^{\bar{p}}(U_{\alpha_0} \cap U_{\alpha_1}), \mathbf{R}) \to \ldots$$

est exacte. Ceci établit les axiomes (F 1) et (F 2) de Godement [Go, p. 109]. Le complexe des préfaisceaux *Hom* $(SC_*^{\bar{p}}, \mathbf{R})$ est donc un complexe de faisceaux. Ceux-ci sont flasques car pour tout ouvert U de A le morphisme $SC_*^{\bar{p}}(U) \to SC_*^{\bar{p}}(A)$ est injectif, et donc

$$\mathrm{Hom}\,(SC_*^{\bar{p}}(A), \mathbf{R}) \to \mathrm{Hom}\,(SC_*^{\bar{p}}(U), \mathbf{R})$$

est surjectif.

§ II. Faisceau des Cochaînes d'Intersection Singulières Relevables *Hom* $(RC_*^{\bar{p}}, \mathbf{R})$

Nous introduisons maintenant la notion de «relevabilité» des chaînes singulières. C'est cette propriété qui permettra d'établir la formule de Stokes au chapitre D. La relevabilité des chaînes s'exprime à l'aide du déplissage et du déplissage simplicial, précédemment introduits.

1. Définitions. On dit qu'un simplexe singulier $\sigma\colon \Delta \to A$ est *relevable* si on a:

a) $\sigma^{-1}(A_k)$ est une face de Δ, pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$,

b) il existe un déplissage simplicial $\mu\colon \tilde{\Delta} \to \Delta$ et une application différentiable $\tilde{\sigma}\colon \tilde{\Delta} \to \tilde{A}$ tels que $\pi \circ \tilde{\sigma} = \sigma \circ \mu$.

Une chaîne $\bar{p}$-permise est *relevable* si elle est somme de simplexes relevables. Deux chaînes relevables seront identifiées si l'une est obtenue à partir de l'autre par subdivision linéaire de Δ.

Pour chaque ouvert $U \subset A$, le *complexe des chaînes d'intersection singulières relevables* $RC_*^{\bar{p}}(U)$, est le complexe des chaînes relevables à support dans U dont les bords sont aussi relevables.

Le *préfaisceau des i-cochaînes d'intersection singulières relevables* de A est le préfaisceau sur A qui, à tout ouvert U de A, associe l'espace $\mathrm{Hom}\,(RC_i^{\bar{p}}(U), \mathbf{R})$. On désignera ce préfaisceau par *Hom* $(RC_i^{\bar{p}}, \mathbf{R})$.

2. Remarques.

a) La condition (1 a)) établit, pour toute face C de A, l'existence d'une strate X de A contenant l'image par σ de l'intérieur de C.

b) Tout simplexe singulier obtenu à partir de σ par une subdivision linéaire de Δ est relevable (cf. A.III-4); en particulier toute face de σ est relevable. Par conséquent, toute subdivision linéaire d'une chaîne relevable est relevable.
Cette dernière remarque montre que l'argument des chaînes $\mathcal{U}$-petites est valable aussi pour $RC_*^{\bar{p}}$; la formule (I-(2.1)) est donc vraie si l'on se restreint aux chaînes relevables. Comme dans (I-2) on montre:

3. Proposition. *Le complexe des préfaisceaux Hom* ($RC_*^{\bar{p}}$, $\mathbf{R}$) *est un complexe de faisceaux flasques.*

§ III. Faisceau des Formes Differentielles d'Intersection $\Omega_{\bar{q}}^{\cdot}$

Les formes différentielles d'intersection ont été introduites par Goresky-MacPherson et décrites pour la première fois dans [Bry].

1. Rappels: Filtration de Cartan. Soit M une variété différentiable qui est l'espace total d'une fibration différentiable $\pi: M \to B$ où B est une variété différentiable.

Pour $k \geqq 0$, $F_k\,\Omega_M^*$ est le sous-complexe de Ω_M^*, complexe de de Rham de M, constitué par les formes différentielles ω telles que ω et $d\omega$ satisfont à:

(P_k) Si $\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_k$ sont des champs de vecteurs sur M, tangents aux fibres de π, alors $i(\zeta_o) \circ \ldots \circ i(\zeta_k)\,(\omega) = 0$.

Cette filtration est la *filtration de Cartan* (cf. [Bry]). On remarquera que si $\alpha \in F_k\,\Omega_M^*$ et $\beta \in F_l\,\Omega_M^*$ alors:

$$\alpha \wedge \beta \in F_{k+l}\,\Omega_M^* \quad \text{et} \quad \alpha + \beta \in F_{\max(k,l)}\,\Omega_M^* . \tag{1.1}$$

2. Définitions. Les ouverts de la forme $\pi_X^{-1}(V) \cap \varrho_X^{-1}([0, \varepsilon[)$, où $X \in \mathcal{S}$, V est un ouvert de X et $\varepsilon > 0$, seront appelés *ouverts distingués*. Remarquons que l'intersection de deux ouverts distingués est encore un ouvert distingué (PA iv)). Pour chaque ouvert distingué W on notera $F_*\,\Omega_{W\setminus\Sigma}^*$ la filtration de Cartan de la fibration $\pi_X: W \setminus \Sigma \to \pi_X(W \setminus \Sigma)$.

Soit U un ouvert de A. Une *forme différentielle* de $U \setminus \Sigma$ est *d'intersection*, pour la perversité $\bar{q}$, si tout point de A possède un voisinage distingué W tel que la restriction de ω à $W \setminus \Sigma$ soit dans $F_{q_k}\,\Omega_{W\setminus\Sigma}^*$. On notera $\Omega_{\bar{q}}^*(U)$ le *complexe des formes d'intersection* de U. Remarquons que le complexe $\Omega_{\bar{t}}^*(A)$, $\bar{t}$ perversité maximale coïncide à un passage aux germes près, avec le complexe des formes contrôlées sur A de Verona (cf. [V1]).

Le *faisceau des i-formes d'intersection de A* est le faisceau qui, à chaque ouvert U de A, *associe l'espace* $\Omega_{\bar{q}}^i(U)$. On le désignera par $\Omega_{\bar{q}}^i$.

3. Les faisceaux $\Omega_{\bar{q}}^{\cdot}$ sont fins. La démonstration de cette assertion est basée sur la notion de fonction contrôlée. Une *fonction* $f: A \to \mathbf{R}$ est *contrôlée* si pour toute strate X de A on a:

i) la restriction de f à X est différentiable,

ii) il existe $\varepsilon > 0$ tel que la restriction de f aux fibres de $\Pi_X: \varrho_X^{-1}([0, \varepsilon[) \to X$ est constante.

La fonction f est nécessairement continue, sa restriction à $A \setminus \Sigma$ est un élément de $\Omega^0_{\bar{o}}(A)$.

3.1. Proposition. *Le complexe des faisceaux $\Omega^{\cdot}_{\bar{p}}$ est un complexe de faisceaux fins.*

Démonstration. Remarquons tout d'abord que si $f: A \to \mathbf{R}$ est une fonction contrôlée et si $\omega \in \Omega^*_{\bar{q}}(U)$, où U est un ouvert de A, alors $f\omega$ est aussi un élément de $\Omega^*_{\bar{q}}(U)$ (cf. (1.1)). La proposition découle maintenant d'un résultat de Verona, qui assure que, pour tout recouvrement ouvert de A, il existe une partition de l'unité subordonnée constituée de fonctions contrôlées (cf. [V2, p. 8]).

§ IV. Faisceau des Formes Différentielles d'Intersection Relevables $K^{\cdot}_{\bar{q}}$

Nous terminons ce chapitre en introduisant la notion de relevabilité des formes différentielles d'intersection.

1. Définitions. Une forme différentielle ω définie sur un ouvert U de $A \setminus \Sigma$ est *relevable* s'il existe $\tilde{\omega}$, forme différentielle sur $\pi^{-1}(U)$, qui coïncide avec $\pi^*\omega$ sur $\pi^{-1}(U \setminus \Sigma)$. Par densité, si la forme $\tilde{\omega}$ existe, elle est unique.

Si ω et η sont deux formes relevables alors les formes $\mathrm{d}\omega$, $\omega \wedge \eta$ et $\omega + \eta$ sont aussi relevables et on vérifie les relations:

$$\widetilde{\mathrm{d}\omega} = \mathrm{d}\tilde{\omega}\,, \qquad \widetilde{\omega \wedge \eta} = \tilde{\omega} \wedge \tilde{\eta} \quad \text{et} \quad \widetilde{\omega + \eta} = \tilde{\omega} + \tilde{\eta}\,.$$

On notera $\mathrm{K}^*_{\bar{q}}(U)$ le *complexe des formes d'intersection relevables* de U. Le *faisceau des i-formes d'intersection relevables de A* est le faisceau qui, à chaque ouvert U de A, associe l'espace $\mathrm{K}^i_{\bar{q}}(U)$. On le désignera par $\mathrm{K}^{\mathrm{i}}_{\bar{q}}$.

2. Les faisceaux $\mathrm{K}^i_{\bar{q}}$ sont fins. On a le lemme préliminaire suivant:

2.1. Lemme. *Pour toute fonction contrôlée $f: A \to \mathbf{R}$ il existe une application $\tilde{f}: \tilde{A} \to \mathbf{R}$ différentiable, vérifiant $\tilde{f} = f \circ \pi$.*

Démonstration. Il suffira de construire une fonction contrôlée $\hat{f}: \hat{A} \to \mathbf{R}$ vérifiant $\hat{f} = f \circ \theta$. Pour cela, d'après (A II-3.1), on peut se restreindre à un voisinage de chaque strate $X \in \mathscr{S}_0$. Fixons une telle strate X et remarquons qu'il existe $\varepsilon > 0$ et une fonction différentiable $g: X \to \mathbf{R}$, tels que la restriction $f: \varrho_X^{-1}([0, \varepsilon[) \to \mathbf{R}$ s'écrit: $f(F_X([c, |t|])) = g(\pi_X(c))$ (A II-1). Ceci permet de définir $\hat{f}: S_X \times]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbf{R}$ par $\hat{f}(c, t) = g(\pi_X(c))$. Les conditions (PA iii) et (PA iv) montrent que $\hat{f}$ est contrôlée.

2.2. Proposition. *Le complexe des faisceaux $\mathrm{K}^{\cdot}_{\bar{q}}$ est un complexe de faisceaux fins.*

Démonstration. D'après le lemme précédent, si $f: A \to \mathbf{R}$ est une fonction contrôlée et si $\omega \in \mathrm{K}^*_{\bar{q}}(U)$, U ouvert de A, alors $f\omega \in \mathrm{K}^*_{\bar{q}}(U)$. Il suffit maintenant de procéder comme dans (III-(3.1)).

Remarquons pour terminer ce chapitre que, puisque les isomorphismes d'espaces stratifiés préservent les données de contrôle et les déplissages (cf. A II-(4.2)), ils induisent des isomorphismes au niveau des complexes $SC_*^{\bar p}$, $RC_*^{\bar p}$, $\Omega_{\bar q}^*$ et $K_{\bar q}^*$.

CHAPITRE C
Calculs Locaux

Nous effectuons dans ce chapitre les calculs locaux spécifiques à l'homologie d'intersection pour les complexes $SC_*^{\bar p}$, $RC_*^{\bar p}$, $\Omega_{\bar q}^*$, et $K_{\bar q}^*$. Ce sont ces calculs qui permettront de montrer dans le chapitre suivant que les faisceaux Hom $(SC_\cdot^{\bar p}, \mathbf{R})$, Hom $(RC_\cdot^{\bar p}, \mathbf{R})$, $\Omega_{\bar q}^\cdot$, et $K_{\bar q}^\cdot$ sont quasi-isomorphes.

Notations. Dans ce chapitre I sera un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$. Sur le produit $I \times A$ on considérera la structure d'espace stratifié décrite en (A I-(1.4)). L'application $pr: I \times A \to A$ est la projection canonique. On fixera $t_0 \in I$ et on notera $J: A \to I \times A$ l'application définie par $J(a) = (t_0, a)$.

De même, pour A compact, on munira cA de la structure d'espace stratifié décrite en (A I-(1.4)), puis $t_0 \in]0, \infty[$ étant fixé, on notera $\bar J: A \to cA$ l'application définie par $\bar J(a) = [a, t_0]$.

Dans les sections II et III on considérera, sauf mention du contraire, que $pr: I \times (A \setminus \Sigma) \to A \setminus \Sigma$ et $J: A \setminus \Sigma \to I \times (A \setminus \Sigma)$ sont les restrictions respectives de pr et J (et donc de $\bar J$).

§ I. Calculs Locaux pour $SC_*^{\bar p}$

Dans [K] on montre que J et $\bar J$ induisent les isomorphismes suivants:

1. Proposition. $H_*(SC^{\bar p}(I \times A)) \cong H_*(SC^{\bar p}(A))$.

2. Proposition.

$$H_i(SC_*^{\bar p}(cA)) \cong \begin{cases} H_i(SC_*^{\bar p}(A)) & \text{si} \quad i \leqq n-1-p_{n+1} \\ 0 & \text{si} \quad i \geqq n - p_{n+1} \end{cases}.$$

§ II. Calculs Locaux pour $RC_*^{\bar p}$

1. Calcul de $H_*(RC^{\bar p}(I \times A))$. Nous montrons que l'homologie de $RC_*^{\bar p}(I \times A)$ est isomorphe à celle de $RC_*^{\bar p}(A)$. Nous utilisons pour cela le fait qu'il existe une retraction de $I \times A$ sur A preservant la structure stratifiée.

1.1 Lemme. *Les opérateurs induits* $pr_*: RC_*^{\bar p}(I \times A) \to RC_*^{\bar p}(A)$ *et* $J_*: RC_*^{\bar p}(A) \to RC_*^{\bar p}(I \times A)$ *sont bien définis.*

Démonstration. Etant donné que les deux situations sont semblables on se contentera de traiter le cas de la projection. Dans [K] on montre que $pr_*\colon SC_*^{\bar p}(I\times A)\to SC_*^{\bar p}(A)$ est bien défini. Il suffira donc de montrer que si $\varphi\colon \Delta\to I\times A$ est un simplexe relevable, il en est de même pour $pr\varphi\colon \Delta\to A$.

Or puisque $(I\times A)_{n+1-k} = I\times A_{n-k}$ on peut écrire:

$$(pr\varphi)^{-1}(A_{n-k}) = \varphi^{-1}((I\times A)_{n+1-k}), \tag{1.1.1}$$

qui est une face de Δ.

Soient $\mu\colon\tilde\Delta\to\Delta$ le déplissage simplicial et $\tilde\varphi\colon\tilde\Delta\to\widetilde{I\times A}$ l'application différentiable qui font de φ un simplexe relevable. Le fait que $pr\varphi$ est relevable découle du diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccccc}
\tilde\Delta & \xrightarrow{\tilde\varphi} & \widetilde{I\times A} = I\times\tilde A & \xrightarrow{\tilde{pr}} & \tilde A\\
{\scriptstyle\mu}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi_1} & & \downarrow{\scriptstyle\pi}\\
\Delta & \xrightarrow{\varphi} & I\times A & \xrightarrow{pr} & A
\end{array}$$

où $\tilde{pr}$ est la projection canonique et π_1 est défini comme en (A II-(4.1)).

La composée pr_*J_* est égale à l'identité de $RC_*^{\bar p}(A)$; l'étape suivante consiste à construire une homotopie entre $J_*\,pr_*$ et l'identité de $RC_*^{\bar p}(I\times A)$. Pour cela nous avons besoin de deux lemmes techniques.

1.2. Lemme. *Soit Δ le simplexe standard, l'application:*

$$\alpha\colon \bar c(\Delta\times[0,1])\to\bar c\Delta\times[0,1]\times[0,1] \quad \textit{avec} \quad \alpha[(x,s),t] = ([x,t],ts,t)$$

est différentiable.

Démonstration. Si $i=\dim\Delta$ les polyèdres $\bar c(\Delta\times[0,1])$ et $\bar c\Delta$ sont inclus naturellement dans $(\mathbf{R}^i\times\mathbf{R})\times\mathbf{R}$ et $\mathbf{R}^i\times\mathbf{R}$ respectivement, par:

$$j_1\colon\bar c(\Delta\times[0,1])\to\mathbf{R}^i\times\mathbf{R}\times\mathbf{R} \quad\text{avec}\quad j_1([x,s],t) = (tx,ts,z),$$

$$j_2\colon\bar c\Delta\to\mathbf{R}^i\times\mathbf{R}\quad\text{avec}\quad j_2([x,t]) = (tx,t).$$

L'application α est la restriction de: $\gamma\colon\mathbf{R}^i\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}^i\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}$, définie par $\gamma(u,r,t) = (u,t,r,t)$, qui est une application différentiable.

1.3. Lemme. *Soient $\varphi\colon\Delta\to I\times A$ un simplexe relevable de dimension i et $\{\sigma_0,\ldots,\sigma_i\}$ les sommets de Δ. Soit $E\subset\Delta\times[0,1]$ le simplexe linéaire engendré par $\{(\sigma_0,0),\ldots,(\sigma_j,0),(\sigma_j,1),\ldots,(\sigma_i,1)\}$ pour un certain $j\in\{0,\ldots,i\}$. Alors l'application:*

$$\psi\colon E\to I\times A \quad \textit{avec}\quad \psi(x,t) = (f(pr_1\varphi(x),t),pr\varphi(x)),$$

où $f\colon I\times[0,1]\to I$ est une contraction différentiable et $pr_1\colon I\times A\to I$ est la projection canonique, est un simplexe relevable.

De plus si φ est $\bar p$-permis alors il en sera de même pour ψ.

Démonstration. Observons, tout d'abord, que pour toute face C de Δ, l'ensemble $(C \times [0, 1]) \cap E$ est une face de E.

a) D'après (II-(1.1.1)) la condition $\psi(x, t) \in (I \times A)_{n+1-k}$ équivaut à $pr\varphi(x) \in A_{n-k}$ et donc à $\varphi(x) \in (I \times A)_{n+1-k}$. Ainsi:

$$\psi^{-1}((I \times A)_{n+1-k}) = (\varphi^{-1}((I \times A)_{n+1-k}) \times [0, 1]) \cap E\,, \tag{1.3.1}$$

et c'est une face de E.

b) Considérons le diagramme:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\Delta} & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & \widetilde{I \times A} \\ {\scriptstyle\mu}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi_1} \\ \Delta & \xrightarrow{\varphi} & I \times A \end{array}$$

qui fait de φ un simplexe relevable. Soit $(\Delta_0, \ldots, \Delta_p)$ la décomposition de Δ relative à μ.

Sur E nous avons la décomposition induite $(E_0, \ldots, E_p) = ((\Delta_0 \times [0, 1]) \cap E, \ldots, (\Delta_p \times [0, 1]) \cap E)$ qui donne lieu à un déplissage simplicial que l'on notera $\mu_E \colon \tilde{E} \to E$. Il associe à chaque point $\tilde{e} = ([(x_0, s_0), t_0], \ldots, [(x_{p-1}, s_{p-1}), t_{p-1}], (x_p, s_p))$ de $\tilde{E}$ le point $(\mu([x_0, t_0], \ldots, [x_{p-1}, t_{p-1}], x_p), t_0 s_0 + (1 - t_0) t_1 s_1 + \ldots + (1 - t_0) \ldots (1 - t_{p-1}) s_p)$ de $\Delta \times [0, 1]$.

Passons à la construction de $\tilde{\psi} \colon \tilde{E} \to I \times A$. Pour cela considérons le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{E} & \xrightarrow{\eta} & \tilde{\Delta} \times [0, 1] & \xrightarrow{\tilde{\beta}} & I \times A = I \times \tilde{A} \\ {\scriptstyle\mu_E}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\mu \times \text{identité}} & & \downarrow{\scriptstyle\pi_1} \\ \psi \colon E & \xrightarrow{\iota} & \Delta \times [0, 1] & \xrightarrow{\beta} & I \times A \end{array}$$

où:

- ι est l'inclusion,
- $\beta(x, t) = (f(pr_1\varphi(x), t), pr\varphi(x))$,
- η associe à chaque $\tilde{e} \in \tilde{E}$ le point:

$$([x_0, t_0], \ldots, [x_{p-1}, t_{p-1}], x_p, t_0 s_0 + (1 - t_0) t_1 s_1 + \ldots \\ + (1 - t_0) \ldots (1 - t_{p-1}) s_p)\,,$$

- $\tilde{\beta}(\tilde{x}, t) = f(\widetilde{pr}_1\tilde{\varphi}(\tilde{x}), t), \widetilde{pr}\tilde{\varphi}(\tilde{x}))$, où $\widetilde{pr} \colon I \times \tilde{A} \to \tilde{A}$ et $\widetilde{pr}_1 \colon I \times \tilde{A} \to I$ sont les projections canoniques.

L'application $\tilde{\beta}$ est différentiable par construction et η l'est grâce à (1.2). Par conséquent, l'application $\tilde{\psi} = \tilde{\beta}\eta$ est différentiable.

Supposons pour terminer que φ est $\bar{p}$-permis. D'après (1.3.1) nous pouvons écrire:

$$\begin{aligned} \dim \psi^{-1}((I \times A)_{n+1-k} \setminus (I \times A)_{n-k}) &\leqq \dim \varphi^{-1}((I \times A)_{n+1-k} \setminus (I \times A)_{n-k}) + 1 \\ &\leqq \dim \Delta + 1 - k + p_k\,, \end{aligned}$$

et donc ψ est un simplexe $\bar{p}$-permis.

1.4. Proposition. *L'application J induit un isomorphisme* $\mathrm{H}_*(\mathrm{RC}^{\bar{p}}(I \times A)) \cong \mathrm{H}_*(\mathrm{RC}^{\bar{p}}(A))$.

Démonstration. Il suffira de construire un opérateur d'homotopie $H\colon \mathrm{RC}^{\bar{p}}_*(I \times A) \to \mathrm{RC}^{\bar{p}}_{*-1}(I \times A)$ entre $J_* pr_*$ et l'identité de $\mathrm{RC}^{\bar{p}}_*(I \times A)$.

On le définit pour chaque simplexe relevable et $\bar{p}$-permis $\varphi\colon \Delta \to I \times A$ par:

$$H(\varphi) = \sum_{j=0}^{\dim \Delta} (-1)^j \psi_j , \tag{1.4.1}$$

où ψ_j est défini comme dans (1.3) pour $\{(\sigma_0, 0), \ldots, (\sigma_j, 0), (\sigma_j, 1), \ldots, (\sigma_i, 1)\}$; puis on l'étend par linéarité à $\mathrm{RC}^{\bar{p}}_*(I \times A)$. D'après (1.3) chaque ψ_j est un simplexe relevable $\bar{p}$-permis. On prouve facilement la relation:

$$\partial H(\varphi) = \varphi - J_* pr_* \varphi - H(\partial\varphi) .$$

Ceci montre que H est bien défini et que c'est l'opérateur d'homotopic cherché.

2. Calcul de $\mathrm{H}_*(\mathrm{RC}^{\bar{p}}(\mathrm{c}A))$. supposons A compact. Nous établissons dans cette section la relation entre $\mathrm{H}_*(\mathrm{RC}^{\bar{p}}(\mathrm{c}A))$ et $\mathrm{H}_*(\mathrm{RC}^{\bar{p}}(A))$.

2.1. Considérons un simplexe relevable $\varphi\colon \Delta \to \mathrm{c}A$. Soient $(\Delta_0, \ldots, \Delta_p)$ une décomposition de Δ, $\mu\colon \tilde{\Delta} \to \Delta$ le déplissage simplicial et $\tilde{\varphi}\colon \tilde{\Delta} \to \mathrm{c}\tilde{A}$ l'application différentiable qui font de φ un simplexe relevable.

Nous construisons le «cône» de φ et nous montrons que c'est également un simplexe relevable. Identifions pour cela le simplexe standard E de dimension $i + 1$ avec le cône $\bar{\mathrm{c}}\Delta$, où i est la dimension de Δ. Le *cône* de φ est le simplexe singulier $\mathrm{c}\varphi\colon E \to \mathrm{c}A$ défini par:

$$\mathrm{c}\varphi[x, t] = [\pi \widetilde{pr}\tilde{\varphi}(\tilde{x}), t\, \widetilde{pr}_1 \tilde{\varphi}(x)] , \tag{2.1.1}$$

où $\widetilde{pr}\colon \tilde{A} \times \mathbf{R} \to \tilde{A}$ et $\widetilde{pr}_1\colon \tilde{A} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sont les projections canoniques et $\tilde{x} \in \mu^{-1}(x)$.

Cette application est bien défine car l'égalité:

$$[\pi \widetilde{pr}\tilde{\varphi}(\tilde{x}), t\, \widetilde{pr}_1 \tilde{\varphi}(\tilde{x})] = [\pi \widetilde{pr}\tilde{\varphi}(\tilde{y}), t\, \widetilde{pr}_1 \tilde{\varphi}(\tilde{y})]$$

équivaut à:

$$[\pi \widetilde{pr}\tilde{\varphi}(\tilde{x}), \widetilde{pr}_1 \tilde{\varphi}(\tilde{x})] = [\pi \widetilde{pr}\, \tilde{\varphi}(\tilde{y}), \widetilde{pr}_1 \tilde{\varphi}(\tilde{y})] \quad \text{ou} \quad t = 0 ,$$

c'est-à-dire à:

$$\varphi\mu(\tilde{x}) = \varphi\mu(\tilde{y}) \quad \text{ou} \quad t = 0 .$$

2.2. Lemme. *Le cône* $\mathrm{c}\varphi$ *est un simplexe relevable. De plus, si* φ *est* $\bar{p}$*-permis et* $i \geqq n - p_{p+1}$ *alors* $\mathrm{c}\varphi$ *est aussi* $\bar{p}$*-permis.*

Démonstration. a) En procédant de façon analogue à (1.3a)) on trouve la relation:

$$(\mathrm{c}\varphi)^{-1}((\mathrm{c}A)_{n+1-k}) = \bar{\mathrm{c}}\varphi^{-1}((\mathrm{c}A)_{n+1-k}) , \qquad k \in \{0, \ldots, n + 1\} ,$$

(ici $\bar{\mathrm{c}}\emptyset = \{\text{sommet de } \bar{\mathrm{c}}\Delta\}$) qui est donc une face de $\bar{\mathrm{c}}\Delta$.

b) Considérons $(\{\text{sommet de } \bar{\mathrm{c}}\Delta\}, \Delta_0, \ldots, \Delta_p)$ qui est une décomposition de E. Le déplissage simplicial correspondant est donné par:

$$\mu_E\colon \tilde{E} = [0, 1] \times \tilde{\Delta} \to E \quad \text{avec} \quad \mu_E(t, \tilde{x}) = [\mu(\tilde{x}), t] ,$$

où on a identifiè $\bar{c}$ {sommet de $\bar{c}\Delta$} avec [0, 1]. Définissons $\widetilde{c\varphi}\colon \tilde{E} \to \widetilde{cA} = \tilde{A} \times \mathbf{R}$ par:

$$\widetilde{c\varphi}(t, \tilde{x}) = (\widetilde{pr}\,\tilde{\varphi}(\tilde{x}), t\,\widetilde{pr}_1\tilde{\varphi}(\tilde{x}))\,,$$

qui est une application différentiable car φ l'est. Remarquons enfin que le diagramme:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{E} & \xrightarrow{\widetilde{c\varphi}} & \widetilde{cA} \\ {\scriptstyle \mu_E}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_2} \\ E & \xrightarrow{c\varphi} & cA \end{array}$$

est commutatif, ce qui montre que le cône $c\varphi$ est relevable.

Supposons pour terminer que φ est aussi un simplexe $\bar{p}$-permis. Pour montrer que le cône $c\varphi$ est $\bar{p}$-permis il suffit de montrer qui si $(c\varphi)^{-1}((cA)_{n+1-k} \setminus (cA)_{n-k})$ est non vide alors:

$$\dim\,(c\varphi)^{-1}\,((cA)_{n+1-k}) \leqq i + 1 - k + p_k\,. \tag{2.2.1}$$

Or, si $k \in \{0, \ldots, n\}$ ou si $k = n + 1$ et $\varphi^{-1}((cA)_0) \neq \emptyset$, on trouve la relation:

$$\dim\,(c\varphi)^{-1}\,((cA)_{n+1-k}) = \dim \varphi^{-1}((cA)_{n+1-k}) + 1\,.$$

Par conséquent (2.2.1) découle du fait que φ est permis.

Il reste le cas où: $k = n + 1$ et $\varphi^{-1}((cA)_0) = \emptyset$. Alors l'image réciproque $(c\varphi)^{-1}\,((cA)_0)$ est justement le sommet de $\bar{c}\Delta$ et (2.2.1) découle de l'hypothèse $i \geqq n - p_{n+1}$.

2.3 Proposition. *L'application $\bar{J}$ induit l'isomorphisme:*

$$\mathrm{H}_i(\mathrm{RC}_*^{\bar{p}}(cA)) \cong \begin{cases} \mathrm{H}_i(\mathrm{RC}_*^{\bar{p}}(A)) & si \quad i \leqq n - 1 - p_{n+1} \\ 0 & si \quad i \geqq n - p_{n+1} \end{cases}.$$

Démonstration. Pour tout simplexe $\bar{p}$-permis φ, de dimension i, on a la relation:

$$\dim \varphi^{-1}(\{\text{sommet de } cA\}) \leqq i - (n + 1) + p_{n+1}\,.$$

Ainsi, si $i \leqq n - p_{n+1}$, l'image $\varphi(\Delta)$ ne rencontre pas le sommet de cA et est incluse dans $A \times]0, \infty[$. Par conséquent les espaces $\mathrm{RC}_i^{\bar{p}}(cA)$ et $\mathrm{RC}_i^{\bar{p}}(A \times]0, \infty[)$ coïncident (les espaces stratifiés cA − {sommet} et $A \times]0, \infty[$ sont égaux!). On obtient ainsi la première partie de l'énoncé (cf. (1.4)).

Pour le cas $i \geqq n - p_{n+1}$ prenons $\eta = \sum_{j \in \mathcal{J}} \alpha_j \varphi_j$ un cycle de $\mathrm{RC}_i^{\bar{p}}(cA)$ et montrons que la chaîne $c\eta = \sum_{j \in \mathcal{J}} \alpha_j\, c\varphi_j$ est un élément de $\mathrm{RC}_{i+1}^{\bar{p}}(cA)$. D'après (2.2) la chaîne $c\eta$ est constituée par des simplexes relevables et $\bar{p}$-permis. Finalement la relation $\partial c\eta = \eta$ ($i \geqq 1$!) montre que $c\eta$ est un élément de $\mathrm{RC}_{i+1}^{\bar{p}}(cA)$ et que la classe de η dans $\mathrm{H}_i(\mathrm{RC}_*^{\bar{p}}(cA))$ est nulle.

§ III. Calculs Locaux pour $\Omega_{\bar{q}}^{*}$

1. Calcul de $\mathrm{H}^{*}(\Omega_{\bar{q}}(I \times A))$. En procédant de façon tout à fait analogue au cas régulier, on montre que la cohomologie de $\Omega_{\bar{q}}^{*}(I \times A)$ est isomorphe à celle de $\Omega_{\bar{q}}^{*}(A)$.

1.1. Lemme. *Les applications induites* $pr^{*}: \Omega_{\bar{q}}^{*}(A) \to \Omega_{\bar{q}}^{*}(I \times A)$ *et* $J^{*}: \Omega_{\bar{q}}^{*}(I \times A) \to \Omega_{\bar{q}}^{*}(A)$ *sont bien définies.*

Démonstration. Toute strate de $I \times A$ est de la forme $I \times X$, où X est une strate de A. Remarquons aussi que l'on a l'égalité $T_{I \times X} = I \times T_X$ et que $\pi_{I \times X}$ est (identité de I) $\times\, \pi_X$. Ainsi, un vecteur (u, v) de $T_{I \times X}$ est tangent aux fibres de $\pi_{I \times X}$ si et seulement si $u = 0$ et v est tangent aux fibres de π_X. Le résultat découle maintenant des égalités: $pr_{*}(0, v) = v$ et $J_{*}(v) = (0, v)$.

Pour $\omega \in \Omega_{\bar{q}}^{*}(I \times A)$, on pose $H\omega = \int_{t_0}^{-} \omega$; c'est un élément de $\Omega^{*-1}(I \times (A \setminus \Sigma))$.

1.2. Lemme. *L'opérateur* $H: \Omega_{\bar{q}}^{*}(I \times A) \to \Omega_{\bar{q}}^{*-1}(I \times A)$ *est bien défini et vérifie*:

$$\mathrm{d}H\,\omega - H\,\mathrm{d}\omega = (-1)^{i-1}\,(\omega - pr^{*}J^{*}\omega)\,, \tag{1.2.1}$$

pour tout $\omega \in \Omega_{\bar{q}}^{i}(I \times A)$.

Démonstration. Pour montrer que H est bien défini nous procédons par récurrence sur i. Soit donc $\omega \in \Omega_{\bar{q}}^{i}(I \times A)$; si $H\,\mathrm{d}\omega$ appartient à $\Omega_{\bar{q}}^{i}(I \times A)$, le résultat découle des égalités:

- $H\omega(0, v) = \int_{t_0}^{-} \omega(0, v)\,,$
- $\mathrm{d}H\,\omega(0, v) = H\,\mathrm{d}\omega(0, v) + (-1)^{i-1}\,(\omega(0, v) - (pr^{*}J^{*}\omega)\,(0, v))\,,$

où v est un vecteur de $A \setminus \Sigma$. L'égalité (1.2.1) elle est démontrée dans [BT, page 34].

1.3. Proposition. *L'application J induit l'isomorphisme*: $\mathrm{H}^{*}(\Omega_{\bar{q}}(I \times A)) \cong \mathrm{H}^{*}(\Omega_{\bar{q}}(A))$.

Démonstration. Il suffit de remarquer que $J^{*}pr^{*}$ est l'identité de $\Omega_{\bar{q}}^{*}(A)$ et que H est une homotopie entre $pr^{*}J^{*}$ et l'identité de $\Omega_{\bar{q}}^{*}(I \times A)$.

2. Calcul de $\mathrm{H}_{*}(\Omega_{\bar{q}}(\mathrm{c}A))$. Supposons A compact; nous établissons dans cette section la relation entre $\mathrm{H}^{*}(\Omega_{\bar{q}}(\mathrm{c}A))$ et $\mathrm{H}^{*}(\Omega_{\bar{q}}(A))$.

2.1. Remarquons que l'espace stratifié $\mathrm{c}A \setminus \{\text{sommet}\}$ est justement le produit $A \times]0, \infty[$. Nous pouvons donc affirmer qu'une forme $\omega \in \Omega^{i}((A \setminus \Sigma) \times]0, \infty[)$ est dans $\Omega_{\bar{q}}^{i}(\mathrm{c}A)$ si et seulement si:

$$\omega \in \Omega_{\bar{q}}^{i}(A \times]0, \infty[) \quad \text{et il existe } \varepsilon > 0 \text{ tel que}$$

$$\omega = 0 \quad \text{sur} \quad (A \setminus \Sigma) \times]0, \varepsilon[\quad \text{si} \quad i > q_{n+1}\,, \quad \text{et}$$

$$\mathrm{d}\omega = 0 \quad \text{sur} \quad (A \setminus \Sigma) \times]0, \varepsilon[\quad \text{si} \quad i = q_{n+1}\,.$$

2.2. Proposition. *L'application J induit l'isomorphisme*:

$$\mathrm{H}^{i}(\Omega_{\bar{q}}^{*}(\mathrm{c}A)) \cong \begin{cases} \mathrm{H}^{i}(\Omega_{\bar{q}}^{*}(A)) & \text{si} \quad i \leqq q_{n+1} \\ 0 & \text{si} \quad i > q_{n+1} \end{cases}.$$

Démonstration. D'après (2.1) on a: $\Omega^i_{\bar q}(cA) = \Omega^i_{\bar q}(A\times]0,\infty[)$, si $i < q_{n+1}$, et $\Omega^i_{\bar q}(cA) \cap d^{-1}\{0\} = \Omega^i_{\bar q}(A\times]0,\infty[) \cap d^{-1}\{0\}$, si $i = q_{n+1}$. Il suffit d'appliquer (1.3) pour avoir la proposition pour $i \leqq q_{n+1}$.

Fixons $i > q_{n+1}$ et prenons ω un cycle de $\Omega^i_{\bar q}(cA)$. Fixons $t_0 \in]0,\varepsilon[$, où ε est donné par (2.1). Ainsi $J^*\omega = 0$ et, d'après (1.2.1), on peut écrire: $dH\omega = \omega$. Il suffit de montrer que $H\omega$ est dans $\Omega^*_{\bar q}(cA)$. Ceci découle de (1.2) et du fait que $H\omega = \int^-_{t_0} \omega$ s'annule sur $A\times]0,\varepsilon[$.

§ IV. Calculs Locaux pour $K^*_{\bar q}$

1. Calcul de $H^*(K_{\bar q}(I\times A))$. Nous montrons que la cohomologie de $K^*_{\bar q}(I\times A)$ est isomorphe à celle de $K^*_{\bar q}(A)$. La procédure est parallèle à celle de (III-1).

1.1. Le déplissage de $I\times A$ est l'application (cf. A II-(4.1)):

$$\pi_1 : I\times\tilde A \to I\times A \quad \text{avec} \quad \pi_1(t,\tilde a) = (t,\pi(\tilde a)).$$

La commutavité des diagrammes

$$\begin{array}{ccccc} I\times\tilde A & \xrightarrow{\tilde{pr}} & \tilde A & \xrightarrow{\tilde J} & I\times\tilde A \\ {\scriptstyle\pi_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi} & & \downarrow{\scriptstyle\pi_1} \\ I\times A & \xrightarrow{pr} & A & \xrightarrow{J} & I\times A \end{array}$$

où $pr(t,\tilde a) = \tilde a$ et $\tilde J(\tilde a) = (t_0,\tilde a)$, montre que les applications $pr^*: K^*_{\bar q}(A) \to K^*_{\bar q}(I\times A)$ et $J^*: K^*_{\bar q}(I\times A) \to K^*_{\bar q}(A)$ sont bien définies.

D'autre part, pour chaque forme $\omega \in K^*_{\bar q}(I\times A)$ la forme

$$\widetilde{H\omega} = \int^-_{t_0} \tilde\omega$$

est dans $\Omega^*(I\times\tilde A)$. Dans l'ouvert $I\times(\tilde A \setminus \pi^{-1}(\Sigma))$ on a l'égalité:

$$\pi_1^* \int^-_{t_0} \omega = \int^-_{t_0} \pi_1^*\omega = \int^-_{t_0} \tilde\omega = \widetilde{H\omega}.$$

Par conséquent, l'opérateur $H: K^*_{\bar q}(I\times A) \to K^{*-1}_{\bar q}(I\times A)$ est bien défini.

Ces considérations et la proposition (III-(1.3)) montrent:

1.2. Proposition. *L'application J induit l'isomorphisme:* $H^*(K_{\bar q}(I\times A)) \cong H^*(K_{\bar q}(A))$.

2. Calcul de $H^*(K_{\bar q}(cA))$. Supposons A compact et établissons la relation entre $H^*(K_{\bar q}(cA))$ et $H^*(K_{\bar q}(A))$. Nous commençons par mettre en evidence la relation entre $K^*_{\bar q}(cA)$ et $K^*_{\bar q}(A\times]0,\infty[)$. Celle-ci n'est pas immediate à partir de (III-(2.1)) car les déplissages de cA et de $A\times]0,\infty[$ ne coïncident pas (ce sont $\tilde A\times\mathbf{R}$ et $\tilde A\times]0,\infty[$ respectivement). Nous utiliserons le déplissage élémentaire $\theta: A\times\mathbf{R} \to cA$, défini par $\theta(a,t) = [a,|t|]$; le déplissage de $A\times\mathbf{R}$ est $\tilde A\times\mathbf{R}$.

2.1. Lemme. *Pour toute forme $\omega \in \mathrm{K}_{\bar q}^*(\mathrm{c}A)$ il existe $\hat\omega \in \mathrm{K}_{\bar q}^*(A \times \mathbf{R})$ telle que $\theta^*\omega$ et $\hat\omega$ coïncident sur $(A \setminus \Sigma) \times (\mathbf{R} \setminus \{0\})$.*

Démonstration. Considérons le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd}
(\tilde A \setminus \pi^{-1}(\Sigma)) \times \mathbf{R} \arrow[dd, shift right, "\pi_1"'] & (\tilde A \setminus \pi^{-1}(\Sigma)) \times (\mathbf{R} \setminus \{0\}) \arrow[l, "k"'] \arrow[d, "\pi_2"] \\
 & (A \setminus \Sigma) \times]0, \infty[\arrow[dl, "j_+"'] \\
(A \setminus \Sigma) \times \mathbf{R} \arrow[uu, shift right, "\sigma \times \iota"'] & (A \setminus \Sigma) \times]-\infty, 0[\arrow[l, "j_-"']
\end{tikzcd}$$

où σ est une section différentiable de $\pi: \tilde A \setminus \pi^{-1}(\Sigma) \to A \setminus \Sigma$, π_1 et π_2 sont définis comme en (A II-4), j_+, j_-, et k sont les inclusions et ι est l'identité de $\mathbf{R}$.

Posons $\hat\omega = (\sigma \times \iota)^* \tilde\omega$; c'est un élément de $\Omega^*((A \setminus \Sigma) \times \mathbf{R})$, qui vérifie les propriétés suivantes:

- $\hat\omega$ est relevable: sur $(\tilde A \setminus \pi^{-1}(\Sigma)) \times \mathbf{R}$ on peut écrire $\pi_1^*\hat\omega = ((\sigma \times \iota)\,\pi_1)^*\,\tilde\omega = \tilde\omega$;
- $\theta^*\omega = \hat\omega$ sur $(A \setminus \Sigma) \times (\mathbf{R} \setminus \{0\})$: Sur cet ouvert nous avons $\hat\omega = (\sigma \times \iota)^*\,\pi_2^*\omega = ((\sigma \times \iota)\,\pi_2)^*\,\omega = \theta^*\omega$;
- $\hat\omega \in \Omega_{\bar q}^*(A \times \mathbf{R})$: Il suffira de montrer que les formes $j_+^*\omega$ et $j_-^*\omega$ sont dans $\Omega_{\bar q}^*(A \times]0, \infty[)$ et $\Omega_{\bar q}^*(A \times]-\infty, 0[)$ respectivement. Pour la première on a $j_+^*\hat\omega = (\theta j_+)^*\,\omega = \omega$, qui est dans $\Omega_{\bar q}^*(A \times]0, \infty[)$. Pour la deuxième on a $j_-^*\hat\omega = (\theta j_-)^*\,\omega$. Or θj_- est la restriction de: $g: A \times]-\infty, 0[\to A \times]0, \infty[$ avec $g(x, t) = (x, -t)$, qui est un isomorphisme d'espaces stratifiés. Ainsi $(\theta j_-)^*\,\omega$ est un élément de $\Omega_{\bar q}^*(A \times]-\infty, 0[)$.

Soit toujours $g: A \times \mathbf{R} \to A \times \mathbf{R}$ l'isomorphisme d'espaces stratifiés, défini par $g(a, t) = (a, -t)$.

2.2. Lemme. *L'opérateur $R: \mathrm{K}_{\bar q}^*(\mathrm{c}A)) \to \mathrm{K}_{\bar q}^*(A \times \mathbf{R})$ défini par $R(\omega) = \hat\omega$ est un isomorphisme différentiel sur l'ensemble des formes $\eta \in \mathrm{K}_{\bar q}^i(A \times \mathbf{R})$ pour lesquelles il existe $\varepsilon > 0$ vérifiant:*

1) $\eta = 0$ *sur* $(A \setminus \Sigma) \times]-\varepsilon, \varepsilon[$ *si* $i > q_{n+1}$,
2) $\mathrm{d}\eta = 0$ *sur* $(A \setminus \Sigma) \times]-\varepsilon, \varepsilon[$ *si* $i = q_{n+1}$,
3) η *est paire, i.e.,* $g^*\eta = \eta$.

Démonstration. Soit $\omega \in \mathrm{K}_{\bar q}^*(\mathrm{c}A)$, d'après le lemme précédent la forme $R(\omega)$ est dans $\mathrm{K}_{\bar q}^*(A \times \mathbf{R})$. Pour 1) et 2) il suffit d'appliquer (III-(2.1)). Puisque $\theta g = \theta$, la condition 3) est verifiée.

Soit $\eta \in \mathrm{K}_{\bar q}^i(A \times \mathbf{R})$ verifiant 1), 2) et 3) et posons $R^{-1}(\eta) = j_+^*\eta$ la restriction de η à $(A \setminus \Sigma) \times]0, \infty[$; c'est un élément de $\Omega_{\bar q}^i(A \times]0, \infty[)$. D'après 1) et 2) la forme $R^{-1}(\eta)$ est en fait dans $\Omega_{\bar q}^i(\mathrm{c}A)$. Sur l'ouvert $(\tilde A \setminus \pi^{-1}(\Sigma)) \times (\mathbf{R} \setminus \{0\})$ on a:

$$\pi_2^* R^{-1}(\eta) = (j_+\pi_2)^*\,\eta = (\pi_1 k)^*\,\eta = k^*\tilde\eta\,,$$

la forme $R^{-1}(\eta)$ est donc relevable; par conséquent elle est dans $\mathrm{K}_{\bar q}^i(\mathrm{c}A)$.

Pour terminer remarquons que R est différentiel et que pour tout ω et pour tout η dans les conditions précédentes on a:

- $R^{-1}R(\omega) = (\theta j_+)^* \omega = \omega$ sur $(A \setminus \Sigma) \times]0, \infty[$ et
- $RR^{-1}(\eta) = (j_+\theta)^* \eta = \begin{cases} \eta & \text{sur } (A \setminus \Sigma) \times]0, \infty[\\ g^*\eta & \text{sur } (A \setminus \Sigma) \times]-\infty, 0[\end{cases}$; d'après 3) on a $RR^{-1}(\eta) = \eta$ sur $(A \setminus \Sigma) \times (\mathbf{R} \setminus \{0\})$ et, par densité, sur $(A \setminus \Sigma) \times \mathbf{R}$.

Par conséquent R est un isomorphisme différentiel.

2.3. Proposition. *L'application J induit l'isomorphisme:*

$$\mathrm{H}^i(\mathrm{K}^*_{\bar{q}}(cA)) \cong \begin{cases} \mathrm{H}^i(\mathrm{K}^*_{\bar{q}}(A)) & si \quad i \leqq q_{n+1}, \\ 0 & si \quad i > q_{n+1}. \end{cases}$$

Démonstration. Calculons la cohomologie du complexe $C^* = \{\eta \in \mathrm{K}^*_{\bar{q}}(A \times \mathbf{R})$ vérifiant 1), 2) et 3)$\}$. Considérons pour cela les applications $J_0: A \setminus \Sigma \to (A \setminus \Sigma) \times \mathbf{R}$ et $Pr: (A \setminus \Sigma) \times \mathbf{R} \to A \setminus \Sigma$ définies par $J_0(a) = (a, 0)$ et $Pr(a, t) = a$. Elles induisent les opérateurs: $J_0^*: C^* \to \mathrm{K}^*_{\bar{q}}(A)$ et $Pr^*: \mathrm{K}^*_{\bar{q}}(A) \to \mathrm{K}^*_{\bar{q}}(A \times \mathbf{R})$. Remarquons que pour $i < q_{n+1}$ on a $Pr^*: (\mathrm{K}^i_{\bar{q}}(A)) \subset C^i$ et pour $i = q_{n+1}$ on a $Pr^*(\mathrm{K}^i_{\bar{q}}(A) \cap d^{-1}\{0\}) \subset C^i$.

Soit ω une forme de C^*. Elle s'écrit sous la forme $\omega = \alpha + \beta \wedge \mathrm{d}t$ où les formes α et β ne contiennent pas le terme $\mathrm{d}t$. La parité de ω implique que β est impaire, et ainsi la forme:

$$H\eta = \int_0^- \omega = \int_0^- \beta \wedge \mathrm{d}t$$

est paire. L'opérateur $H: C^* \to C^{*-1}$ est donc bien défini. D'après (III-(1.2)) on arrive à l'égalité:

$$\mathrm{d}H\eta - H\,\mathrm{d}\eta = (-1)^{i-1}(\eta - Pr^*J_0^*\eta),$$

pour toute forme $\eta \in C^i$.

Pour $i \leqq q_{n+1}$ la relation précédente montre que la projection Pr induit un isomorphisme entre $\mathrm{H}^i\mathrm{K}^*_{\bar{q}}(A))$ et $H^i(C^*)$. Par construction (cf. (2.2)) la projection $pr: (A \setminus \Sigma) \times]0, \infty[\to A \setminus \Sigma$ induit un isomorphisme entre $\mathrm{H}^i(\mathrm{K}^*_{\bar{q}}(A))$ et $\mathrm{H}^i(\mathrm{K}^*_{\bar{q}}(cA))$. On termine cette première partie en remarquant que la composée prJ est l'identité sur $A \setminus \Sigma$.

Pour $i > q_{n+1}$ on raisonne comme dans (III-(2.2)) à partir de (2.3.1).

CHAPITRE D
Théorème de De Rham

Dans ce chapitre on introduit l'opérateur d'intégration des formes différentielles relevables sur les chaînes relevables et nous montrons que cet opérateur est différentiel. Nous aurons ainsi construit des morphismes au niveau des complexes de cochaînes:

$$\Omega^*_{\bar{q}}(A) \leftarrow \mathrm{K}^*_{\bar{q}}(A) \to \mathrm{Hom}\,(\mathrm{RC}^{\bar{p}}_*(A), \mathbf{R}) \leftarrow \mathrm{Hom}\,(\mathrm{SC}^{\bar{p}}_*(A), \mathbf{R})$$

et au niveau des complexes de faisceaux:

$$\Omega^{\cdot}_{\bar q} \leftarrow \mathrm{K}^{\cdot}_{\bar q} \rightarrow \mathit{Hom}\,(\mathrm{RC}^{\bar p}_{\cdot}, \mathbf{R}) \leftarrow \mathit{Hom}\,(\mathrm{SC}^{\bar p}_{\cdot}, \mathbf{R})\,.$$

Les résultats du chapitre précédent permettent de montrer que ces derniers sont des quasi-isomorphismes. On en déduit que les précédents le sont aussi, d'où le théorème de De Rham que nous nous proposons d'établir.

§ I. Intégration

Nous définissons l'intégration $\int\colon \mathrm{K}^*_{\bar q}(A) \to \mathrm{Hom}\,(\mathrm{RC}^{\bar p}_*(A), \mathbf{R})$ et nous montrons que $\int$ est un opérateur différentiel.

1.1. Dans la suite, pour tout simplexe relevable $\varphi\colon \Delta \to A$, on écrira $\mu\colon \tilde\Delta \to \Delta$ un déplissage simplicial et $\tilde\varphi\colon \tilde\Delta \to \tilde A$ une application différentiable, qui font de φ un simplexe relevable (cf. B II-1). Les intérieurs de Δ et de $\tilde\Delta$ seront désignés respéctivement par $i(\Delta)$ et $i(\tilde\Delta)$. Rappelons que la restriction $\mu\colon i(\tilde\Delta) \to i(\Delta)$ est un difféomorphisme (cf. A III-1).

D'après (B II-2) le simplexe φ envoie $i(\Delta)$ dans une strate de A. Si φ est $\bar p$-permis cette strate est nécessairement $A \setminus \Sigma(p_k \leqq k - 2, \text{si } k \in \{2, \ldots, n\})$. En outre, la condition $\pi\tilde\varphi = \varphi\mu$ implique que la restriction $\varphi\colon i(\Delta) \to A \setminus \Sigma$ est une application différentiable.

1.2. Lemme. *Soient $\omega \in \mathrm{K}^*_{\bar q}(A)$ et $\varphi\colon \Delta \to A$ un simplexe relevable avec $\varphi(i(\Delta)) \subset A \setminus \Sigma$. Alors l'intégrale*

$$\int_{i(\Delta)} \varphi^*\omega$$

est finie.

Démonstration. Comme $\mu\colon i(\tilde\Delta) \to i(\Delta)$ est un difféomorphisme nous pouvons écrire:

$$\int_{i(\Delta)} \varphi^*\omega = \int_{i(\tilde\Delta)} \mu^*\varphi^*\omega = \int_{i(\tilde\Delta)} \tilde\varphi^*\pi^*\omega\,.$$

Or les deux formes $\pi^*\omega$ et $\tilde\omega$ coïncident sur $\tilde\varphi(i(\tilde\Delta))$ (cf. B IV-1). Par ailleurs, $\tilde\omega$ est une forme globale sur $\tilde A$, donc puisque $\tilde\varphi\colon \tilde\Delta \to A$ est différentiable, l'intégrale précédente s'écrit:

$$\int_{i(\tilde\Delta)} \tilde\varphi^*\tilde\omega = \int_{\tilde\Delta} \tilde\varphi^*\tilde\omega\,,$$

qui est finie car $\tilde\Delta$ est compact.

Ces considérations donnent un sens à la définition de l'intégration qui suit.

1.3. Définition. Pour toute forme $\omega \in \mathrm{K}^*_{\bar q}(A)$ et toute chaîne $c = \sum_{j=1}^{m} r_j\varphi_j \in \mathrm{RC}^{\bar p}_*(A)$ on pose:

$$\int_c \omega = \sum_{j=1}^{m} r_j \int_{i(\Delta)} \varphi_j^*\omega\,,$$

qui est donc un nombre réel bien défini. Ceci induit un morphisme d'intégration, au niveau des complexes de cochaînes:

$$\int : K^*_{\bar{q}}(A) \to \mathrm{Hom}\,(RC^{\bar{p}}_*(A), \mathbf{R}),$$

et au niveau des complexes de faisceaux:

$$\int : K^{\cdot}_{\bar{q}} \to \mathit{Hom}\,(RC^{\bar{p}}_{\cdot}, \mathbf{R}).$$

Pour montrer que l'opérateur $\int$ ainsi défini est différentiel nous devons préciser le comportement des formes de $K^*_{\bar{q}}(A)$ dans les faces supplémentaires qui apparaissent dans le déplissage simplicial.

Soient $\varphi: \Delta \to A$ un simplexe relevable, F une face de $\tilde{\Delta}$ de type (b) (cf. A III-5) et $C = \mu(F)$ une face de Δ.

1.4. Lemme. *Le simplexe φ envoie différentiablement l'intérieur de C dans une strate X de A.*

Démonstration. D'après (B II-2) il existe une strate X de A contenant $\varphi(i(C))$. Distinguons deux cas.

1) $X = A \setminus \Sigma$. On aura le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} i(F) & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & \tilde{A} \setminus \pi^{-1}(\Sigma) \\ \mu \downarrow & & \downarrow \pi \\ i(C) & \xrightarrow{\varphi} & A \setminus \Sigma \end{array}$$

et le résultat découle du fait que $\pi\tilde{\varphi}$ est une application différentiable et que μ est une submersion (cf. A III-5).

2) $X \neq A \setminus \Sigma$. L'application φ envoie $i(C)$ dans T_X, d'après (A II-(4.3)) on a le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} i(F) & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & \tilde{T}_X \\ \mu \downarrow & & \downarrow \pi_{T_X} \\ i(C) & \xrightarrow{\varphi} & T_X \end{array} \quad \text{(déplissage de } T_X\text{)}$$

où on a identifié $\tilde{T}_X$ avec la composante connexe de $\pi^{-1}(T_X)$ contenant $\varphi(i(F))$. Par construction $\tilde{T}_X = \tilde{S}_X \times \mathbf{R}$ et le déplissage devient (cf. A I-(6.3)):

$$\pi_{T_X}(\tilde{x}, r) = F_X[\pi_{S_X}(\tilde{x}), |r|],$$

où $\pi_{S_X}: \tilde{S}_X \to S_X$ est le déplissage de S_X. L'image réciproque (cf. PA iii) $\pi_X^{-1}(X) = \tilde{S}_X \times \{0\}$ s'identifie naturellement à $\tilde{S}_X$ et le diagramme précédent devient:

$$\begin{array}{ccc} i(F) & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & \tilde{S}_X \\ \mu \downarrow & & \downarrow \pi_X \pi_{S_X} \\ i(C) & \xrightarrow{\varphi} & X \end{array}$$

Le résultat découle alors du fait que $\pi_X \pi_{S_X} \tilde{\varphi}$ est une application différentiable (cf. A II-(4.4)) et que μ est une submersion.

Remarquons que les diagrammes précédents sont constitués par des applications différentiables.

1.5. Lemme. *Dans l'hypothèse $X \neq A \setminus \Sigma$, soit $\omega \in \mathrm{K}_{\bar{q}}^*(A)$; la restriction de $\tilde{\omega}$ à $\tilde{S}_X$ est dans $F_{q_k}\Omega^*_{\tilde{S}_X}$, filtration de Cartan associée à la fibration $\pi_X \pi_{S_X}: \tilde{S}_X \to X$.*

Démonstration. Désignons par:

- $F_*\Omega_1^*$ la filtration de Cartan associée à la fibration $\pi_X: T_X \setminus \Sigma \to X$,
- $F_*\Omega_2^*$ la filtration de Cartan associée à la fibration $\pi_X \pi_{T_X}: \tilde{T}_X \setminus \pi_{T_X}^{-1}(\Sigma) \to X$,
- $F_*\Omega_3^*$ la filtration de Cartan associée à la fibration $\pi_X \pi_{T_X}: \tilde{S}_X \times \{r\} \to X$, pour $r \neq 0$.

La restriction de ω à T_X, encore notée ω, est un élément de $\mathrm{K}_{\bar{q}}^*(T_X)$. Quite à restreindre X et à reparamétrer le rayon de T_X, on peut supposer que $\omega \in F_{q_k}\Omega_1^*$ (cf. B III-2). Puisque l'application $\pi_{T_X}: \tilde{T}_X \setminus \pi_{T_X}^{-1}(\Sigma) \to T_X \setminus \Sigma$ est un revêtement différentiable, la forme $\tilde{\omega}$ est dans $F_{q_k}\Omega_2^*$. Puisque $\tilde{S}_X \setminus \pi_{T_X}^{-1}(\Sigma)$ est dense dans $\tilde{S}_X$, la restriction de $\tilde{\omega}$ à chaque $\tilde{S}_X \times \{r\}$, $r \neq 0$, est dans $F_{q_k}\Omega_3^*$. Finalement, puisque $\tilde{\omega}$ est une forme globale sur $\tilde{S}_X \times \mathbf{R}$, la restriction de $\tilde{\omega}$ à $\tilde{S}_X$ (identifiée à $\tilde{S}_X \times \{0\}$) est dans $F_{q_k}\Omega^*_{\tilde{S}_X}$.

1.6. Lemme. *Soit $\omega \in \mathrm{K}_{\bar{q}}^i(A)$, où $i = \dim F$. Si le simplexe φ est $\bar{p}$-permis alors la restriction de $\tilde{\varphi}^*\tilde{\omega}$ à F est nulle.*

Démonstration. Soit X la strate donnée par le lemme précédent. Distinguons deux cas:

1) $X = A \setminus \Sigma$. D'après le premier diagramme de (1.4) les formes $\tilde{\varphi}^*\tilde{\omega}$ et $\mu^*\varphi^*\omega$ coïncident sur $i(F)$. Or, la forme $\varphi^*\omega$ est nulle sur $i(C)$ car $\dim C < \dim F =$ degré de ω. Par conséquent $\tilde{\varphi}^*\tilde{\omega}$ est nulle sur F.

2) $X \neq A \setminus \Sigma$. D'après la condition d'intersection de Goresky-MacPherson on a la relation: $\dim C \leqq \dim F + 1 - k + p_k$, où $k = \operatorname{cod} X$. La dimension des fibres de μ est donc strictement superieure à q_k. D'autre part le lemme précédent montre que:

$$\tilde{\varphi}^*\tilde{\omega}(\xi_0, \ldots, \xi_{q_k}) = 0$$

si les vecteurs ξ_i sont tangents aux fibres de $\mu: i(F) \to i(C)$ (cf. troisème diagramme de (1.4)). Par conséquent la restriction de $\tilde{\varphi}^*\tilde{\omega}$ à $i(F)$ est nulle. Par densité de $i(F)$ dans F on a le résultat.

1.7. Proposition. Formule de Stokes. *Pour toute forme $\omega \in \mathrm{K}_{\bar{q}}^*(A)$ et toute chaîne c de $\mathrm{RC}_*^{\bar{p}}(A)$ on a la formule de Stokes:*

$$\int_{\partial c} \omega = \int_c \mathrm{d}\omega .$$

Démonstration. Par linéarité il suffit de montrer le résultat pour un simplexe relevable $\bar{p}$-permis $\varphi: \Delta \to A$ et une forme $\omega \in \mathrm{K}_{\bar{q}}^{i-1}(A)$, où $i = \dim \Delta$. Soit $\partial\Delta = \sum_{j=0}^{i} (-1)^j D_j$ le bord de Δ. Il s'agit de montrer l'égalité

$$\int_{i(\Delta)} \varphi^* \mathrm{d}\omega = \sum_{j=0}^{i} (-1)^j \int_{i(D)_j)} \varphi^*\omega . \tag{1.7.1}$$

Dans la démonstration de (1.2) nous avons prouvé les égalités $\int_{i(\Delta)} \varphi^* \mathrm{d}\omega = \int_{\tilde{\Delta}} \tilde{\varphi}^* \mathrm{d}\tilde{\omega}$ et $\int_{i(D_j)} \varphi^*\tilde{\omega} = \int_{\tilde{D}_j} \tilde{\varphi}^*\tilde{\omega}$, car chaque D_j est un simplexe relevable (cf. B II-2). D'autre part nous pouvons écrire (cf. A III-5):

$$\sum_{j=0}^{l} (-1)^j \int_{\tilde{D}_j} \tilde{\varphi}^*\tilde{\omega} = \int_{\partial\tilde{\Delta}} \tilde{\varphi}^*\tilde{\omega}\,.$$

L'égalité (1.7.1) devient:

$$\int_{\tilde{\Delta}} \mathrm{d}\tilde{\varphi}^*\,\tilde{\omega} = \int_{\partial\tilde{\Delta}} \tilde{\varphi}^*\tilde{\omega}\,.$$

Elle découle de la Formule de Stokes habituelle $\left[\int_{\tilde{\Delta}} \mathrm{d}\tilde{\varphi}^*\,\tilde{\omega} = \int_{\partial\tilde{\Delta}} \tilde{\varphi}^*\tilde{\omega}\right]$, du lemme précédent ($\tilde{\varphi}^*\tilde{\omega} = 0$ sur $\delta\tilde{\Delta}$) et de (A III-(5.1)).

1.8. Remarque. Pour toute forme relevable ω, les deux conditions suivantes sont équivalentes:

a) $\int_{\partial\sigma} \omega = \int_{\sigma} \mathrm{d}\omega$, pour tout simplexe $\bar{p}$-permis de A,

b) $\tilde{\omega}_{|\tilde{S}_X} \in F_{q_k}\Omega^*_{\tilde{S}_X}$, pour toute strate X de A.

§ II. Théorème de De Rham.

La formule de Stokes que l'on vient de prouver, montre que l'opérateur d'intégration est différentiel et on a donc des opérateurs différentiels:

$$\Omega^*_{\bar{q}}(A) \leftarrow \mathrm{K}^*_{\bar{q}}(A) \xrightarrow{\int} \mathrm{Hom}\,(\mathrm{RC}^{\bar{p}}_*(A), \mathbf{R}) \leftarrow \mathrm{Hom}\,(\mathrm{SC}^{\bar{p}}_*(A), \mathbf{R})\,.$$

Pour prouver que ces opérateurs sont des quasi-isomorphismes on utilisera le résultat suivant de la théorie des faisceaux.

1. Proposition. [Go, page 178] *Soit $f\colon S^\cdot \to T^\cdot$ un morphisme de faisceaux différentiels de base A. Supposons réalisées les conditions suivantes:*

a) *les homomorphismes $\mathscr{H}(S^\cdot) \to \mathscr{H}(T^\cdot)$ induits par f sont bijectifs,*

b) *les faisceaux S^m, T^m sont mous pour tout m,*

c) *les faisceaux gradués $S^\cdot$ et $T^\cdot$ sont bornés inferieurement.*

Alors les homomorphismes

$$\mathrm{H}^m(\Gamma(S^\cdot)) \to \mathrm{H}^m(\Gamma(T^\cdot))$$

induits par f sont bijectifs.

On arrive finalement au résultat central du travail.

2. Théorème de De Rham. *Soient A un espace stratifié et $(\bar{p}, \bar{q})$ deux perversités complementaires. La cohomologie du complexe* Hom $(SC_*^{\bar{p}}(A), \mathbf{R})$ *des cochaînes singulières d'intersection et la cohomologie du complexe $\Omega_{\bar{q}}^*(A)$ des formes différentielles d'intersection sont isomorphes à la cohomologie d'intersection* Hom $(IH_*^{\bar{p}}(A), \mathbf{R})$.

L'intégration des formes relevables de $\Omega_{\bar{q}}^*(A)$ sur les chaînes relevable de $SC_*^{\bar{p}}(A)$ *est bien définie et le diagramme*

$$\Omega_{\bar{q}}^*(A) \leftarrow K_{\bar{q}}^*(A) \xrightarrow{\int} \mathrm{Hom}\,(RC_*^{\bar{p}}(A), \mathbf{R}) \leftarrow \mathrm{Hom}\,(SC_*^{\bar{p}}(A), \mathbf{R}) \qquad (*)$$

est constitué de quasi-isomorphismes.

Démonstration. D'après [K] et [Bry] il suffira de prouver la deuxième partie: le diagramme $(*)$ est constitué de quasi-isomorphismes.

Nous procédons par récurrence sur la profondeur de A. Si cette profondeur est nulle alors l'espace A est une variété et on a:

- $\Omega_{\bar{q}}^*(A) = K_{\bar{q}}^*(A) = \Omega^*(A)$ complexe des formes différentielles de A,
- $RC_*^{\bar{p}}(A) = S_*^D(A)$ complexe de chaînes singulières différentiables de A, et
- $SC_*^{\bar{p}}(A) = S_*(A)$ complexe des chaînes singulières de A,

on est donc ramené au théorème de De Rham habituel.

Supposons le résultat prouvé pour les espaces stratifiés de profondeur strictement inférieure à celle de A. Considérons les morphismes de complexes de faisceaux associés à $(*)$:

$$\Omega_{\bar{q}}^{\cdot} \leftarrow \mathcal{K}_{\bar{q}}^{\cdot} \xrightarrow{\int} \mathcal{Hom}\,(RC_{\cdot}^{\bar{p}}, \mathbf{R}) \leftarrow \mathcal{Hom}\,(SC_{\cdot}^{\bar{p}}, \mathbf{R})\,.$$

Chacun des complexes de faisceaux satisfait aux conditions b) et c) de la proposition 1, d'après le chapitre B et par construction. Pour démontrer le théorème de De Rham, il ne nous reste donc qu'à montrer que les morphismes satisfont à la condition a).

Soit $x \in A_{n-k} \setminus A_{n-k-1}$, pour $k \in \{0, \ldots, n\}$. Ce point possède un voisinage isomorphe, comme espace stratifié, à $\mathbf{R}^{n-k} \times cL$, où L est le link de x. Le point x admet donc un système fondamental de voisinages de la forme $V = I \times c_\varepsilon L$ où I est un ouvert contractile de $\mathbf{R}^{n-k}$, $\varepsilon > 0$ et $c_\varepsilon L$ est le cône tronqué $L \times [0, \varepsilon[/L \times \{0\}$. Il suffit donc de prouver que le diagramme

$$H^*(\Omega_{\bar{q}}(V)) \leftarrow H^*(K_{\bar{q}}(V)) \xrightarrow{\int^*} \mathrm{Hom}\,(H_*(RC^{\bar{p}}(V)), \mathbf{R}) \leftarrow \mathrm{Hom}\,(H_*(SC^{\bar{p}}(V)), \mathbf{R})$$

est constitué d'isomorphismes ([Go, page 166]). Or, d'après les résultats du chapitre C, il suffit de montrer que les flèches du diagramme:

$$H^*(\Omega_{\bar{p}}(L)) \leftarrow H^*(K_{\bar{q}}(L)) \xrightarrow{\int^*} \mathrm{Hom}\,(H_*(RC^{\bar{p}}(L)), \mathbf{R}) \leftarrow \mathrm{Hom}\,(H_*(SC^{\bar{p}}(L)), \mathbf{R})$$

sont des isomorphismes. Ce dernier point découle de l'hypothèse de récurrence, car prof $(L) <$ prof (A).

3. Remarques finales

3.1. La propriété essentielle des espaces stratifiés qui nous a permis d'établir le théorème de De Rham est l'existence d'un déplissage (cf. A II). Donc, le résultat de ce travail s'étend aux pseudovariétés stratifiées «dépliables».

Une pseudovariété stratifiée A de dimension n est *dépliable* s'il existe une variété différentiable $\tilde{A}$ et une application continue $\pi: \tilde{A} \to A$, appelée *déplissage*, vérifiant:

Tout point de A_{n-k} possède un voisinage de la forme $\mathbf{R}^{n-k} \times cL$, où L est une pseudovariété stratifiée dépliable, tel que

a) chaque composante connexe de $\pi^{-1}(\mathbf{R}^{n-k} \times cL)$ est difféomorphe à $\mathbf{R}^{n-k} \times \tilde{L} \times \mathbf{R}$, et

b) la restriction de π à $\mathbf{R}^{n-k} \times \tilde{L} \times \mathbf{R}$ est donnée par $\pi(x, \tilde{y}, r) = (x, [\pi_L(\tilde{y}), |r|])$ où $\pi_L: \tilde{L} \to L$ est le déplissage de L et $[\pi_L(\tilde{y}), |r|] \in cL$.

Cette définition est faite par récurrence sur la profondeur de A (prof $(L) <$ prof (A)) en commençant par les variétés (prof $(A) = 0$). On remarquera que la restriction de π à chaque $\pi^{-1}(X)$, X strate de A, est un fibré différentiable, de fibre $\tilde{L}$.

Tout espace stratifié est une pseudovariété stratifiée dépliable (cf. A II).

Dans ce cadre les résultats précédents peuvent êtres établis avec une condition d'intersection différentielle plus faible. Une *forme* $\omega \in \Omega^*(A \setminus \Sigma)$ est *d'intersection faible*, pour une perversité $\bar{q}$, si:

a) ω est relevable en une forme différentielle $\tilde{\omega}$ sur $\tilde{A}$,

b) la restriction de $\tilde{\omega}$ à $\pi^{-1}(X)$, X strate de A, appartient à $F_{q_k}\Omega^*_{\pi^{-1}(X)}$, filtration de Cartan associée à la fibration $\pi: \pi^{-1}(X) \to X$.

On posera $\mathscr{K}^*_{\bar{q}}(A) = \{\omega$ forme d'intersection faible pour $\bar{q}\}$. Si A est un espace stratifié le lemme I-1.5 montre que l'on a l'inclusion $\mathscr{K}^*_{\bar{q}}(A) \supset \mathrm{K}^*_{\bar{q}}(A)$. En fait on a la relation $\mathscr{K}^*_{\bar{q}}(A) = \{\omega$ forme relevable telle que $\int_{\partial\sigma} \omega = \int_{\sigma} d\omega$ pour tout simplexe σ $\bar{p}$-permis$\}$ (cf. I-(1.8)).

La même démarche que celle suivie dans ce travail montre que l'intégration

$$\int: \mathscr{K}^*_{\bar{q}}(A) \to \mathrm{Hom}\,(\mathrm{RC}^*_{\bar{p}}(A), \mathbf{R})$$

est un quasi-isomorphisme.

3.2. Les résultats montrés précédement sont valables pour des perversités plus générales que celles de Goresky-MacPherson: $\bar{p} = (p_2, \ldots, p_n)$ une suite d'entiers vérifiant $0 \leqq p_k \leqq k - 2$ (propriété utilisée en (C II-(2.3)) et (D I-(1.1))).

Appendice

Nous donnons ici la démonstration complète de la proposition (A III-4). Bien que la démarche la plus naturelle serait de procéder par récurrence en effectuant le déplissage de C face par face, il faut noter qu'après le premier déplissage, le nouveau C ne serait plus un polyèdre linéaire dans le nouveau Δ. Ceci nous oblige à traiter tout le déplissage en une fois.

1. Définitions. [G] Soient Δ le simplexe géométrique standard de $\mathbf{R}^{i+1}$ et (B, D) deux faces de Δ avec $\Delta = B * D$. Tout point de Δ s'écrit sous la forme $tb + (1 - t)\,d$, où

$t \in [0,1]$, $b \in B$ et $d \in D$. On considérera les applications:

$$\eta_B\colon \Delta \setminus D \to B \quad \text{où} \quad \eta_B(tb + (1-t)\,d) = b\,,$$
$$\gamma_B\colon \Delta \to [0,1] \quad \text{où} \quad \gamma_B(tb + (1-t)\,d) = t\,.$$

Dans la suite, si $d \in D$ alors $\eta_B(d)$ représentera un point quelconque de B. On identifiera B avec l'ensemble $\{(t_0, \ldots, t_i) \in \mathbf{R}^{i+1} \mid t_0 + \ldots + t_k = 1,\ t_{k+1} = \ldots = t_i = 0\}$, où $k = \dim B$.

2. Lemme. *Soient E et K deux éléments d'une subdivision linéaire de Δ avec $K \cap D = \emptyset$. Les applications suivantes sont différentiables:*

(a) $\gamma_B\colon \Delta \to [0,1]$,

(b) $\eta_B\colon K \to B$,

(c) $f\colon \bar{c}E \to [0,1]^2$ *où* $f([x,t]) = (t, t\gamma_B(x))$,

(d) $g\colon \bar{c}E \times \Delta \to B$ *où* $g([x,t], y) = t\gamma_B(x)\,\eta_B(x) + (1-t)\,\gamma_B(y)\,\eta_B(y)$,

Démonstration. En coordonnées locales l'application γ_B s'écrit $\gamma_B(t_0, \ldots, t_i) = t_0 + \ldots + t_k$; ce qui prouve (a). Pour (b) il suffira de remarquer que K est inclus dans l'ouvert $\{(t_0, \ldots, t_i) \mid t_0 + \ldots + t_k \neq 0\}$ et que la restriction de η_B à K, qui s'écrit

$$\eta_B(t_0, \ldots, t_i) = (t_0(t_0 + \ldots + t_k)^{-1}, \ldots, t_k(t_0 + \ldots + t_k)^{-1})\,,$$

est différentiable.

D'autre part, le cône $\bar{c}E$ est inclus naturellement dans $\mathbf{R}^{i+2}$ par $\iota([x,t]) = (tx, t)$. Ainsi les applications f et g sont les restrictions des applications différentiables $f_0\colon \mathbf{R}^{i+2} \to [0,1]^2$ et $g_0\colon \mathbf{R}^{i+2} \times \mathbf{R}^{i+1} \to \mathbf{R}^{k+1}$ définies respectivement par:

$$f_0(r_0, \ldots, r_i, t) = (t, r_0 + \ldots + r_k)\,,$$

et

$$g_0(r_0, \ldots, r_i, t, s_0, \ldots, s_i) = (r_0 + (1-t)\,s_0, \ldots, r_k + (1-t)\,s_k)\,.$$

Fixons pour la suite une décomposition $(\Delta_0, \ldots, \Delta_p)$ de Δ et soit C un élément d'une subdivision linéaire de Δ. Posons $(C_0, \ldots, C_q)$ la décomposition induite de C; $\mu\colon \tilde{\Delta} \to \Delta$ et $\mu_C\colon \tilde{C} \to C$ les déplissages simpliciaux correspondants. On donne maintenant une série de lemmes qui aboutissent à la proposition que l'on veut prouver. Pour la cohérence des notations, on écrira: $i_{-1} = -1$, $i_{q+1} = p+1$, $C_{-1} = \emptyset$ et $C_{q+1} = C$.

3. Lemme. *Pour $j \in \{-1, 0, \ldots, q\}$ et $x \in C_j$, on a:*

$$\gamma_{\Delta_m}(x) = 0 \quad \textit{pour} \quad m > i_j\,;$$
$$\gamma_{\Delta_m}(x) \neq 0 \quad \textit{pour} \quad m = i_j\,.$$

Démonstration. Si $m > i_j$ le point x est dans C^j et donc dans $\Delta_0 * \ldots * \Delta_{m-1}$. Par conséquence $\gamma_{\Delta_m}(x) = 0$. Si $m = i_j$ alors on a:

$$C \cap (\Delta_0 * \ldots * \Delta_{m-1}) * C_j = C \cap (\Delta_0 * \ldots * \Delta_m)$$

et donc $\gamma_{\Delta_m}(x) \neq 0$.

4. Lemme. *Considérons* $\tilde{x} = ([x_0, t_0], \ldots, [x_{q-1}, t_{q-1}], x_q) \in \tilde{C}$, $j \in \{-1, \ldots, q\}$ *et* $m \geqq i_j$. *Posons* $x = \mu_C(\tilde{x})$ *et* $y = \mu_C([x_0, 0], \ldots, [x_j, 0], [x_{j+1}, t_{j+1}], \ldots, [x_{q-1}, t_{q-1}], x_q)$. *Alors les relations suivantes sont vraies:*

(a) $\gamma_{\Delta_m}(x) = (1 - t_0) \ldots (1 - t_{j-1}) (t_j \gamma_{\Delta_m}(x_j) + (1 - t_j) \gamma_{\Delta_m}(y))$,

(b) $\gamma_{\Delta_m}(x) \eta_{\Delta_m}(x) = (1 - t_0) \ldots (1 - t_{j-1}) (t_j \gamma_{\Delta_m}(x_j) \eta_{\Delta_m}(x_j) + (1 - t_j) \gamma_{\Delta_m}(y) \eta_{\Delta_m}(y))$,

(c) $\gamma_{\Delta_m * \ldots * \Delta_p}(y) \neq 0$ *si* $i_j < m \leqq i_{j+1}$.

Démonstration. Les propriétés (a) et (b) découlent de l'expression

$$x = t_0 x_0 + (1 - t_0) t_1 x_1 + \ldots + (1 - t_0) \ldots (1 - t_{j-1}) t_j x_j + (1 - t_0) \ldots (1 - t_j) y$$

et du lemme précédent. Pour (c) remarquons d'une part que le point y n'appartient pas à $C^j = C \cap (\Delta_0 * \ldots * \Delta_j)$ et d'autre part que l'on a l'égalité $C \cap (\Delta_0 * \ldots * \Delta_j) = C \cap (\Delta_0 * \ldots * \Delta_{m-1})$, car $i_j \leqq m - 1 < i_{j+1}$. Par conséquence $\gamma_{\Delta_m * \ldots * \Delta_p}(y)$ est différent de zéro.

5. Lemme. *Pour chaque* $m \in \{0, \ldots, p - 1\}$ *les applications:*

$$\psi_m: \tilde{C} \to [0, 1] \quad où \quad \psi_m(\tilde{x}) = (\gamma_{\Delta_m}(\mu_C(\tilde{x}))) (\gamma_{\Delta_m * \ldots * \Delta_p}(\mu_C \tilde{x})))^{-1},$$
$$\varphi_m: \tilde{C} \to \bar{c}\Delta_m \quad où \quad \varphi_m(\tilde{x}) = [\eta_{\Delta_m} \mu_C(\tilde{x})), \psi_m(\tilde{x})]$$

sont différentiables.

Démonstration. Soit $j \in \{-1, \ldots, q - 1\}$ vérifiant $i_j \leqq m < i_{j+1}$. D'après le lemme 3 et le lemme 4 on a la relation (avec les notations de 4):

$$\psi_m(\tilde{x}) = (t_j \gamma_{\Delta_m}(x_j) + (1 - t_j) \gamma_{\Delta_m}(y)) (t_j \gamma_{\Delta_m}(x_j) + (1 - t_j) \gamma_{\Delta_m * \ldots * \Delta_p}(y))^{-1}. \tag{5.1}$$

Soit $m = i_j$ alors $\gamma_{\Delta_m}(x_j)$ et $\gamma_{\Delta_m * \ldots * \Delta_p}(y)$ sont différents de zéro (cf. 3 et 4(c)); le dénominateur de (5.1) ne s'annule pas et ψ_m est donc différentiable (cf. 2(a)). Si $m \neq i_j$ alors l'expression (5.1) est réduite à: $\psi_m(\tilde{x}) = (\gamma_{\Delta_m}(y)) (\gamma_{\Delta_m * \ldots * \Delta_p}(y))^{-1}$, qui est différentiable pour les mêmes raisons.

Pour φ_m on raisonne de façon analogue sur:

$$\psi_m(\tilde{x}) \eta_{\Delta_m}(\tilde{x}) = \frac{t_j \gamma_{\Delta_m}(x_j) \eta_{\Delta_m}(x_j) + (1 - t_j) \gamma_{\Delta_m}(y) \eta_{\Delta_m}(y)}{t_j \gamma_{\Delta_m}(x_j) + (1 - t_j) \gamma_{\Delta_m * \ldots * \Delta_p}(y)}$$

à l'aide du lemme 2.

6. Lemme. *Supposons que* C *n'est pas inclus dans* $\Delta_0 * \ldots * \Delta_{p-1}$ *et soient* $\tilde{x} = ([x_0, t_0], \ldots, [x_{q-1}, t_{q-1}], x_q) \in \tilde{C}$ *et* $x = \mu_C(\tilde{x})$. *On a la relation:* $\gamma_{\Delta_p}(x) \eta_{\Delta_p}(x) = \gamma_{\Delta_p}(x) \eta_{\Delta_p}(x_q)$.

Démonstration. Par hypothèse: $C \cap (\Delta_0 * \ldots * \Delta_{p-1}) \neq C$, $p = i_q$ et $C_q \cap (\Delta_0 * \ldots * \Delta_{p-1}) = \emptyset$. En appliquant le lemme 4 pour $m = p$ et $j = q$ on obtient:

$$\gamma_{\Delta_p}(x) = (1 - t_0) \ldots (1 - t_{q-1}) \gamma_{\Delta_p}(x_q),$$
$$\gamma_{\Delta_p}(x) \eta_{\Delta_p}(x) = (1 - t_0) \ldots (1 - t_{q-1}) \gamma_{\Delta_p}(x_q) \eta_{\Delta_p}(x_q),$$

d'où le résultat.

7. Démonstration de III-4. On distinguera deux cas suivant que C est inclus ou non dans $\Delta_0 * \dots * \Delta_{p-1}$.

1^er^Cas. C non inclus dans $\Delta_0 * \dots * \Delta_{p-1}$.

On considère la fonction $h\colon \tilde{C} \to \tilde{\Delta}$ définie par: $h(\tilde{x} = ([x_0, t_0], \dots, [x_{q-1}, t_{q-1}], x_q)) = (\varphi_0(\tilde{x}), \dots, \varphi_{q-1}(\tilde{x}), \eta_{\Delta_p}(x_q))$, ce qui a un sens car $C_q \cap (\Delta_0 * \dots * \Delta_{p-1}) = \emptyset$. L'application h est différentiable (cf. 2(b) et 5). Par définition de μ nous pouvons écrire:

$$\mu(h(\tilde{x})) = \sum_{m=0}^{p-1} (1 - \psi_0(\tilde{x})) \dots (1 - \psi_{m-1}(\tilde{x}))\, \psi_m(\tilde{x})\, \eta_{\Delta_m}(\mu_C(\tilde{x})) + (1 - \psi_0(\tilde{x})) \dots (1 - \psi_{p-1}(\tilde{x}))\, \eta_{\Delta_p}(x_q)\,,$$

ce qui d'après 5 est égal à:

$$\mu(h(\tilde{x})) = \sum_{m=0}^{p-1} \gamma_{\Delta_m}(\mu_C(\tilde{x}))\, \eta_{\Delta_m}(\mu_C(\tilde{x})) + \gamma_{\Delta_p}(\mu_C(\tilde{x}))\, \eta_{\Delta_p}(x_q)\,.$$

Finalement, compte tenu du lemme 6 on a:

$$\mu(h(\tilde{x})) = \sum_{m=0}^{p} \gamma_{\Delta_m}(\mu_C(\tilde{x}))\, \eta_{\Delta_m}(\mu_C(\tilde{x}))$$

ce qui par définition est égal à $\mu_C(\tilde{x})$.

2^ème^Cas. C inclus dans $\Delta_0 * \dots * \Delta_{p-1}$.

Soient $P = \Delta_0 * \dots * \Delta_{p-1}$ et $\mu_P\colon \tilde{P} \to P$ le déplissage simplicial de P le long de $(\Delta_0, \dots, \Delta_{p-1})$. Par récurrence sur p on montre qu'il existe une application différentiable $h_0\colon \tilde{C} \to \tilde{P}$ telle que $\mu_C = \mu_P h_0$. Soit alors $\alpha\colon \tilde{P} \to \tilde{\Delta}$ définie par:

$$\alpha([x_0, t_0], \dots, [x_{p-2}, t_{p-2}], x_{p-1}) = ([x_0, t_0], \dots, [x_{p-2}, t_{p-2}], [x_{p-1}, 1], z)\,,$$

où z est un point quelconque de Δ_p. L'application α est différentiable et vérifie $\mu_P = \mu\alpha$; on termine la démonstration en prenant $h = \alpha h_0$.

Bibliographie

[Bo] A. Borel et al.: Intersection homology. Progress in Mathematics **50**, Birkhäuser, Boston, 1984.

[BT] R. Bott et L. Tu: Differential forms in Algebraic Topology. GTM n°82 Springer-Verlag (1982).

[Bra1] J. P. Brasselet: Homologie d'intersection: définitions singulière et simpliciale. Ecole Polytechnique, Journées singulières 84–85.

[Bra2] J. P. Brasselet: Homologie d'intersection et cohomologie L^2. Ecole Polytechnique, Journées singulières 86–87.

[Bry] J. L. Brylinski: Equivariant intersection cohomology. Prépublication de l'IHES, Juin 1986.

[Ch] J. Cheeger: On the Hodge theory of Riemannian pseudomanifolds. Proc. Sympos. Pure Math. **36**, Amer. Math. Soc. (1980), 91–146.

[ChGM] J. Cheeger, M. Goresky, R. MacPherson: L^2-cohomology and intersection homology of singular algebraic varieties. Sem. on Diff. Geo., Ann. of Math. Stud. **102**, Princeton University Press, Princeton, New Jersey (1982), 302–340.

[Go] R. Godement: Théorie des faisceaux. Hermann, Paris (1973).

[G] M. Goresky: Triangulation of stratified objects. Proc. Amer. Math. Soc. **72** (1978), 193–200.

[GM1] M. Goresky, R. MacPherson: Intersection homology theory. Topology **19** (1980), 135–162.

[GM2] M. Goresky, R. MacPherson: Intersection homology II. Invent. Math. **71** (1983), 77–129.

[K] H. King: Topological invariance of intersection homology without sheaves. Topology Appl. **20** (1985), 149–160.

[Kr] F. Kirwan: An introduction to intersection homology theory. Pitman Research Notes in Math. Ser. **187** (1988).

[M] J. Mather: Notes on topological stability (chap. I). Harvard University, 1970.

[Sa] M. Saralegi: Un théorème de dualité entre l'homologie d'intersection et la cohomologie L^2. Thèse, Lille 1988.

[SH] M. Saralegi, G. Hector: Formes différentielles d'intersection des préstratifications abstraites. C.R. Acad. Sci. Paris **308** (1989), 25–28.

[T] R. Thom: Ensembles et morphismes stratifiés. Bull. Amer. Math. Soc. **75** (1989), 240–284.

[V1] A. Verona: Le théorème de De Rham pour les préstratifications abstraites. C. R. Acad. Sci. Paris **273** (1971), 886–889.

[V2] A. Verona: Stratified mappings – Structure and Triangulability. Lecture Notes in Math. **1102**, Springer Verlag 1984.

J. P. Brasselet
U.F.R. de Mathématiques
U.A. C.N.R.S. 751
Université de Lille
59 655 Villeneuve D'Ascq Cedex
France

G. Hector
Laboratoire de Géometrie et Analyse
U.A. C.N.R.S. 746
Université Claude Bernard (Lyon 1)
69 622 Villeurbanne Cedex
France

M. Saralegi
Unidad de Matemáticas
C.S.I.C.
Serrano 123
28 006 Madrid
Espagne

Communicated by J. Eichhorn
(Received July 18, 1990)