Euler y un balón de fútbol

José Ignacio Royo Prieto (*) y Martín Saralegi Aranguren (**)

Se podría pensar que el logotipo de la Liga de Campeones de la UEFA representa el balón con el que juegan al fútbol Messi, Cristiano Ronaldo, Lampard y Xabi Alonso…

pero no es así. De hecho, tal y como vamos a comprobar, lo que aparece en dicho logotipo ni siquiera es un balón.

El balón de fútbol

Recordemos que en los poliedros regulares o sólidos platónicos (tetraedro, cubo, octaedro, icosaedro y dodecaedro), todas las caras son polígonos regulares idénticos y los vértices son indistinguibles. En el balón de fútbol, los vértices son igualmente indistinguibles, pero aparecen dos tipos de caras: pentágonos y hexágonos. Es un poliedro arquimediano o semi-regular, y su denominación exacta es icosaedro truncado.

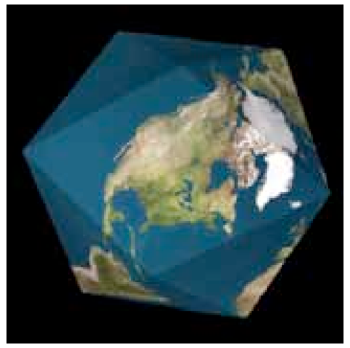
En cada vértice de un balón de fútbol concurren dos hexágonos y un pentágono. De hecho, podemos contar sin mayor dificultad hasta 12 pentágonos. Contar los hexágonos es un poco más complicado, pues nos arriesgamos a olvidarnos o repetir alguno… ¡pero podemos hacerlo de una manera más sencilla! Puesto que cada pentágono colinda con 5 hexágonos, tenemos un total de 60 hexágonos. Ahora bien, en este recuento cada hexágono ha sido contado por partida triple, ya que colinda con exactamente 3 pentágonos. Por lo tanto, el número total de hexágonos del balón es 20.

(*) Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea.

(**) Université d'Artois.

Fullerenos

Un fullereno es un poliedro compuesto de pentágonos y hexágonos, dispuestos de tal modo que en cada vértice concurren exactamente tres polígonos. Se llaman así en honor del arquitecto Richard Buckminster Fuller (1895-1983), creador de un pabellón futurista de los Estados Unidos en la exposición internacional de 1967 en Montreal. También es así mismo conocido por diseñar el mapa Dymaxion, una proyección que representa los continentes del planeta sobre un icosaedro modificado.



La semejanza de la disposición esférica de las moléculas de carbono (C60) con las cúpulas geodésicas de Fuller es la razón por la que se les conozca también como fullerenos. Las moléculas fullerenas poseen 60 átomos de carbono dispuestas en los vértices de un balón de fútbol.

Fórmula de Euler

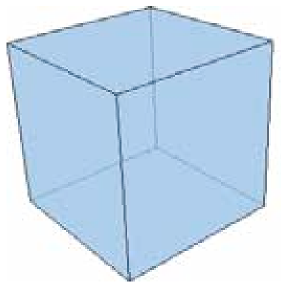
Una de las propiedades más importantes y hermosas de los poliedros es la fórmula atribuída al matemático suizo Leonhard Euler (si bien Descartes ya había dado anteriormente con una fórmula equivalente, la cual desapareció y fue encontrada siglos después entre los papeles de Leibnitz). Se trata del siguiente hermoso resultado:

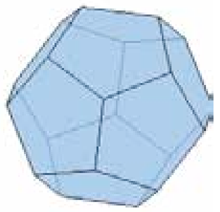
Teorema: Sea un poliedro homeomorfo[1] a una esfera. Denotemos por V el número de vértices del poliedro, A el número de sus aristas y C el de caras. Entonces, tenemos la fórmula:

$$V - A + C = 2$$

Verifiquemos que esta fórmula se cumple en los casos del cubo y del icosaedro:

Caras = 6
Aristas = 12
Vértices = 8
6 –12 + 8 = 2





Caras = 12
Aristas = 30
Vértices = 20
12 – 30 + 20 = 2

Euler y un balón de fútboll
José Ignacio Royo Prieto y Martín Saralegi Aranguren

Volviendo a los fullerenos, si denotamos por H el número de hexágonos y por P el de pentágonos, podemos calcular el número de vértices, aristas y caras. Tenemos:

- $V = \frac{5P+6H}{3}$, ya que en cada vértice concurren tres polígonos;
- $A = \frac{5P+6H}{2}$, ya que cada arista es compartida por dos caras;
- $C = P + H$, ya que sólo hay pentágonos y hexágonos.

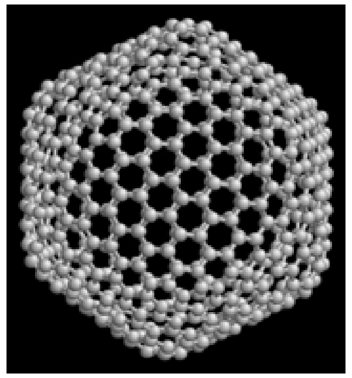
Utilizando la fórmula de Euler, obtenemos:

$$2 = \frac{5P+6H}{3} - \frac{5P+6H}{2} + P + H = \frac{P}{6}$$

y por lo tanto,

$$P = 12.$$

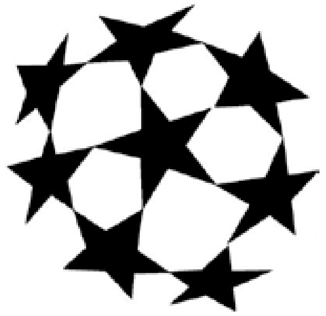
De modo que, independientemente del número de hexágonos de un fullereno, siempre encontraremos exactamente 12 caras pentagonales. Puede haber fullerenos sin caras hexagonales (el dodecaedro), con 20 (el balón de fútbol) y con un número enorme de caras hexagonales (el de la figura adjunta tiene 260).



El balón de la Liga de Campeones

El balón oficial de la Liga de Campeones está confeccionado con piezas de cuero pentagonales y hexagonales. Su decoración presenta, sin embargo, doce estrellas pitagóricas (pentagonales) que comparten centro con los pentágonos, pero que traspasan sus límites, de manera que cada vértice agudo de cada estrella acaba encontrándose con otro vértice agudo de otra estrella, quedando la decoración configurada por 12 estrellas y 20 hexágonos. Si unimos los vértices agudos mencionados, obtenemos un icosidodecaedro, poliedro arquimediano formado por pentágonos y triángulos. Vemos, por lo tanto, que este balón posee interesantes propiedades geométricas.

Sin embargo, la situación es bien distinta si analizamos el logotipo de la Liga de Campeones, ya que en él encontramos estrellas pentagonales, triángulos y… ¡dos octógonos! Es natural, por lo tanto, preguntarse si este logotipo proviene de un auténtico balón de fútbol, es decir, si existe un balón de fútbol que, visto desde un determinado ángulo, coincida con el logotipo que nos ocupa. A bote pronto, podemos proporcionar una respuesta simple, que consiste en completar el esquema del logotipo con una única cara oculta, pintada de blanco.



Pero nosotros buscamos, claro está, una solución más satisfactoria, en el sentido de que tenga en cuenta la regularidad[2] mostrada en el logotipo. Si observamos detenidamente, veremos que los polígonos que configuran la decoración del logotipo cumplen las siguientes reglas:

a. Dos caras no estrelladas que concurren, lo hacen exactamente en un vértice;
b. Dos caras estrelladas que concurren lo hacen exactamente en una punta, y en cada punto de intersección concurren exactamente dos estrellas;
c. Cuando una cara no estrellada concurre con una cara estrellada, se encuentran exactamente en dos aristas[3].

Esto nos lleva a definir un poliedro particular, el *championsedro*: poliedro que verifica las propiedades (a), (b) y (c). La cuestión a la que pretendemos responder en estas páginas es la siguiente:

¿Existe algún championsedro que represente al logotipo de la Liga de Campeones?

Contando las caras de un championsedro

Comenzamos contando el número de estrellas (que representaremos con la letra E), el de hexágonos (letra H) y el número de octógonos (letra O) de un championsedro. Las condiciones de la definición del championsedro nos dicen que hay dos tipos de vértices:

- Los de tipo (α), que son las puntas de las estrellas, donde concurren dos estrellas y dos polígonos no estrellados;
- Los de tipo (β), donde concurren una estrella y un polígono no estrellado.

Tenemos, por lo tanto, 5E vértices de tipo (α) y $\frac{5E}{2}$ vértices de tipo (β). Así que el número total de vértices del championsedro es:

$$\frac{15E}{2}.$$

Las condiciones (a), (b) y (c) nos llevan a que el número de aristas del poliedro es: $A = 10E$.

Como el número total de vértices es

$$C = E + H + O,$$

la fórmula de Euler

$$V - A + C = 2$$

nos lleva a:

(2) $$2 = \frac{15E}{2} - 10E + E + H + O = -\frac{3E}{2} + H + O\,.$$

Ocupémonos ahora del número de estrellas. Como cada hexágono está rodeado por 3 estrellas, cada octógono por 4 estrellas, y cada estrella por 5 caras no estrelladas, se ha de cumplir la relación:

(3) $$3H + 4O = 5E\,.$$

Las ecuaciones (2) y (3) nos proporcionan el sistema

$$\begin{cases} 5E = 3H + 4O \\ 4 = -3E + 2H + 2O, \end{cases}$$

Cuya solución es:

$$\begin{cases} H = 2O + 20 \\ E = 2O + 12. \end{cases}$$

Eliminando ciertos casos

Si $O = 0$, entonces obtenemos el championsedro auténtico, el del balón verdadero, cuya estructura es, como hemos visto, la de un icosidodecaedro.

Pero este championsedro no es el del logotipo que buscamos, ya que no tiene octógonos, y en el del logotipo se pueden ven dos.

Se debe, por la misma razón, eliminar el caso $O = 1$. Si $O \geq 3$, el número total de caras del championsedro sería

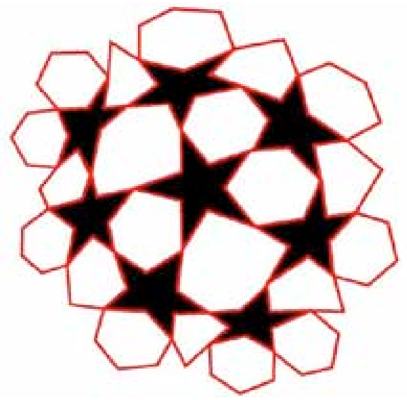
$$E + H + O = 32 + 5O \;\geq 32 + 15 = 47,$$

Pero el número de caras que se ven en el logo es de unas 20, lo cual hace que el número de caras no visibles del championsedro sea, como poco, 27. Estas últimas caras tendrían que ser mucho más pequeñas que las caras que están a la vista. Por lo tanto, atendiendo a la uniformidad de tamaño de las caras, podemos eliminar este caso[4].

Championsedros con dos caras octogonales

El último caso que nos resta por estudiar es de $(E,H,O) = (16,24,2)$. Aquí se tienen 20 caras en el anverso (las que vemos en el logotipo) y 22 caras en el lado oculto del balón, lo cual puede ser razonable para conseguir un balón regular. Vamos a demostrar que la fórmula (1) es imposible, procediendo de la siguiente manera. Comenzamos con las 8 estrellas, 3 hexágonos y 2 octógonos que se muestran en el logo

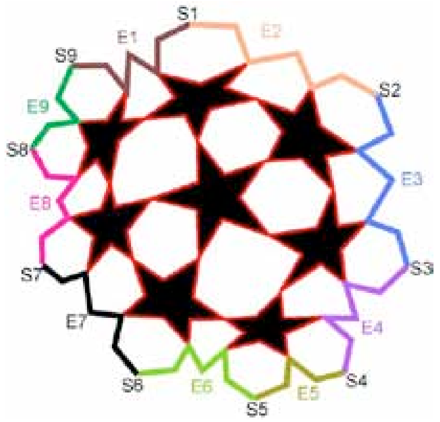
Ahora vamos a intentar añadir las 8 estrellas y los 21 hexágonos restantes respetando las propiedades (a), (b) y (c), y veremos que esto es una tarea imposible. En primer lugar, las susodichas condiciones implican que se deben pegar 16 hexágonos de la manera en la que se indica en la figura:



Notamos que ciertos vértices exteriores pueden estar identificados entre sí (indicados en verde), pero las aristas, no. Tan sólo queda añadir 8 estrellas y 5 hexágonos.

Comenzaremos con las estellas. Deben pegarse al borde externo de este polígono de la siguiente manera:

Euler y un balón de fútboll
José Ignacio Royo Prieto y Martín Saralegi Aranguren



Contamos 9 zonas en las cuales ha de pegarse una estrella: E1, E2,…, E9. Como tan sólo tenemos 8 estrellas, dos de estas zonas deben corresponder a la misma estrella. Por ejemplo, la zona E1 y la zona E5 podrían rodear a la misma estrella. En este caso, se deben identificar entre sí los vértices S9 y S5, así como los vértices S1 y S4. De hecho, teniendo en cuenta el número de aristas de cada zona, tan sólo tenemos dos posibilidades de pegado, a saber,

i. Ei con Ej, donde $i\in \{1,2,3, 4,6,7,8\}$ y $j\in \{5,9\}$.

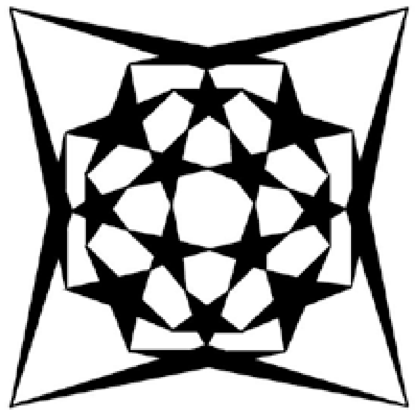
ii. E5 con E9.

Veamos ahora que ninguno de estos casos es posible.

Para el caso i., estudiamos[5] lo que ocurre cuando se identifica E1 con E5. Recordemos que debemos identificar S1 con S4 y S5 con S9. En este caso, tendríamos tres estrellas (la que acabamos de construir, la malva y la naranja), que concurrirían en el vértice S1 = S4, lo cual es imposible.

Para el caso ii., notamos que se tienen 6 puntas, por lo que hay que identificar dos: S9 con S4 ó bien S5 con S8. En el primer caso, por ejemplo, obtendríamos tres estrellas (la que acabamos de construir, la malva y la marrón) que concurrirían en el vértice S9 = S5, lo cual es imposible.

Por lo tanto, acabamos de demostrar que no existen championsedros que correspondan con el balón que se muestra en el logotipo de la Liga de Campeones, pero championedros de dos octógonos, haberlos, haylos[6]:

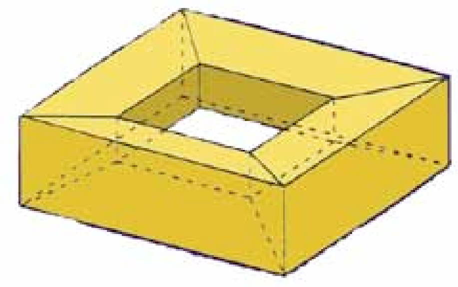


Aquí, los dos octógonos ocupan posiciones opuestas en la superficie del balón, y no colindan con la misma estrella, lo cual sí que ocurre en el logotipo.

La topología algebraica

En la base de todos los cálculos anteriores se encuentra la fórmula de Euler (1), que relaciona el número de vértices, aristas y caras de un poliedro… ¡pero no de todos!

Consideremos el siguiente poliedro:



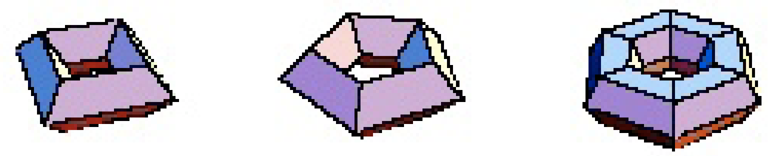
Aquí, tenemos 16 caras, 32 aristas y 16 vértices, lo cual nos proporciona:

$$V - A + C = 16 - 32 + 16 = 0$$

¿Por qué nos sale diferente? ¿No es cierta, acaso, la fórmula de Euler? ¿Se puede arreglar esto? ¡Sí! Todos los poliedros que han aparecido en este trabajo (salvo este último) son poliedros esféricos, es decir, modelizados sobre una esfera (o un balón de fútbol), y todos cumplen la fórmula (1).

El último poliedro que hemos considerado no está modelizado sobre una esfera, sino sobre un toro (la superficie de un neumático),

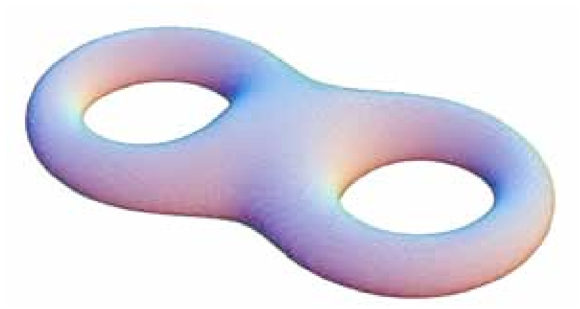
y para este tipo de poliedros,



la fórmula de Euler es como sigue:

$$V - A + C = 0 .$$

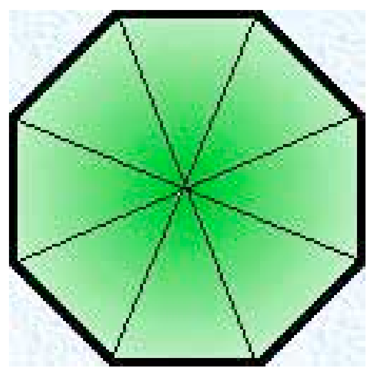
¿Y si ahora nos dan un poliedo modelizado sobre un toro doble[7]?

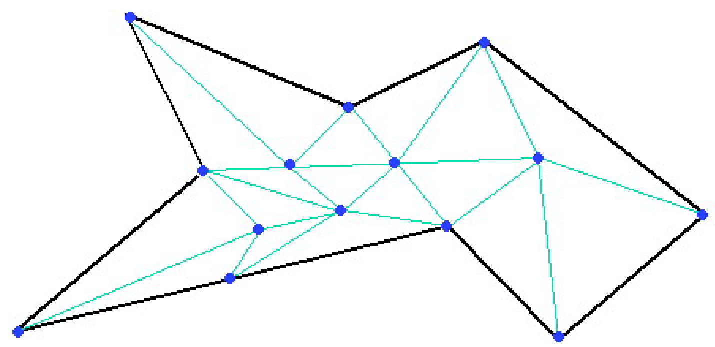


En ese caso, se satisface la fórmula

$$V - A + C = -2 .$$

Así mismo, también tenemos una fórmula para una triangulación de un polígono cualquiera (modelizado sobre un disco), como estos:





Aquí, se verifica la fórmula

$$V - A + C = 1.$$

Constatamos, por lo tanto, que para todo espacio M existe un número $\chi(M)$, la *característica de Euler*, que verifica la siguiente propiedad: si P es un poliedro modelizado sobre M, entonces se tiene la verdadera fórmula de Euler

$$V - A + C = \chi(M).$$

Por ejemplo,

Espacio M	$\chi(M)$
Esfera	2
Toro	0
Superficie de género g	$2 - 2g$
Disco	1
Cilindro (sin tapas)	0

Este número nos permite distinguir entre dos espacios: ¡nunca vamos a poder transformar una esfera en un toro(8), ya que tienen distinta característica de Euler!

La característica de Euler es el primer ejemplo de *invariante algebraico*, y se encuentra en la base de la disciplina matemática conocida como *topología algebraica*. En esta rica rama de las matemáticas, intentamos asociar a cada espacio (topológico) un invariante algebraico (un número, por ejemplo), de modo que si dos espacios topológicos son equivalentes(9), entonces sus invariantes algebraicos asociados son los mismos. Los nombres de los invariantes algebraicos que se pueden construir son cada vez más sofisticados:

- Números (la característica de Euler, por ejemplo)
- Grupos abelianos (grupos de homotopía de orden superior, homología con coeficientes enteros…)
- Grupos no abelianos (grupo fundamental o grupo de Poincaré,…)
- Espacios vectoriales (cohomología de de Rham,…)
- Álgebras (modelos de Sullivan,…)
- …

Pero no se podrá construir jamás una lista completa de invariantes algebraicos. Siempre habrá dos espacios diferentes que tengan exactamente los mismos invariantes algebraicos que se nos ocurra construir.

There are more things in Heaven and Earth ,
Horatio,
Than are dreamt of in your philosophy(10).

Los autores de este artículo investigamos una familia particular de espacios (las variedades singulares), y el invariante topológico que utilizamos se llama *cohomología de intersección*. Pero eso es otra historia, y será contada en otra ocasión…

Notas

(1) O sea, que es deformable en una esfera, como los sólidos platónicos, los arquimedianos…

(2) en tamaño y en geometría.

(3) Esta concurrencia ha de darse forzosamente en dos aristas contiguas delimitadas por dos puntas o vértices agudos de estrella.

(4) En el balón verdadero, el número de caras visibles es 16, mientras que el número total de caras es 32.

(5) Los demás casos son similares.

(6) Para ver el championsedro, habría que pegar un octógono al borde del diseño que se muestra en la imagen.

(7) O superficie de género 2.

(8) ¡Aunque este resultado es bastante intuitivo, no es fácil de demostrar!

(9) Podríamos decir homeomorfos, pero también será cierto para espacios homótopos.

(10) Traducción: "Hay más cosas en los Cielos y en la Tierra/ Horacio/ que las que tu filosofía pueda soñar." - Hamlet (William Shakespeare).