Sobre la Conjetura de Poincaré

M. Saralegi-Aranguren

Universidad de Artois (Francia)

11 Abril 2008

La Conjetura de Poincaré

La primera duró apenas cuatro años.
La segunda, la buena, casi un siglo...
¿Qué dice esta Conjetura?
¿Por qué tardó tanto en resolverse?
¿Quién la atacó... y perdió?
¿Quién dio con ella?
¿Cómo lo consiguió?
¿Por un puñado de dólares?

Enunciado

Rigurosamente

Toda variedad topológica de dimensión tres que sea simplemente conexa, compacta, orientable y sin borde es homeomorfa a la esfera.

Enunciado

Rigurosamente

Toda variedad topológica de dimensión tres que sea simplemente conexa, compacta, orientable y sin borde es homeomorfa a la esfera.

Simplificando un poco

La esfera es el único espacio tridimensional cerrado sin agujeros.

La Conjetura de Poincaré ....

La Conjetura de Poincaré .... en dimensión 2

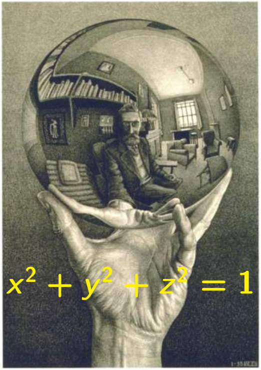
La Conjetura de Poincaré .... en dimensión 2

Rigurosamente

Toda superficie topológica que sea simplemente conexa, compacta, orientable y sin borde es homeomorfa a la esfera.

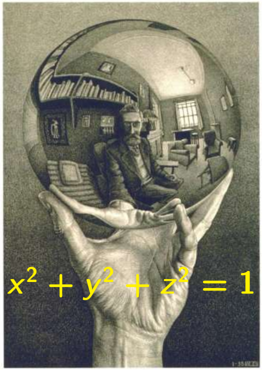
Rigurosamente

Toda superficie topológica que sea simplemente conexa, compacta, orientable y sin borde es homeomorfa a la esfera.



Rigurosamente

Toda superficie topológica que sea simplemente conexa, compacta, orientable y sin borde es homeomorfa a la esfera.

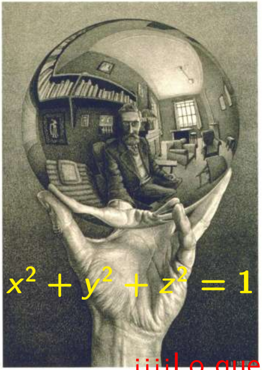


Simplificando un poco

La esfera es la única superficie cerrada de $\mathbb{R}^3$ que no tenga agujeros.

Rigurosamente

Toda superficie topológica que sea simplemente conexa, compacta, orientable y sin borde es homeomorfa a la esfera.



Simplificando un poco

La esfera es la única superficie cerrada de $\mathbb{R}^3$ que no tenga agujeros.

¡¡¡¡Lo que ya era conocido en el siglo XIX!!!!

Clasificación de superficies

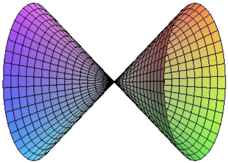
Definición

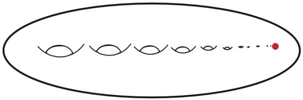
Una superficie cerrada de $\mathbb{R}^3$ es un subconjunto conexo, compacto de $\mathbb{R}^3$, que no tiene borde y que, visto de cerca, es un plano.

Clasificación de superficies

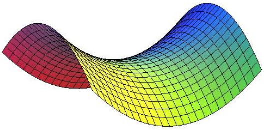
Definición

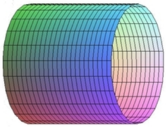
Una superficie cerrada de $\mathbb{R}^3$ es un subconjunto conexo, compacto de $\mathbb{R}^3$, que no tiene borde y que, visto de cerca, es un plano.





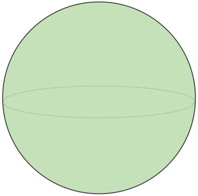
NO

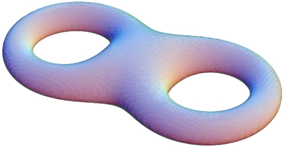




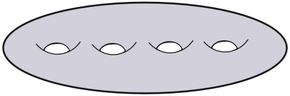
Definición

Una superficie cerrada de $\mathbb{R}^3$ es un subconjunto conexo, compacto de $\mathbb{R}^3$, que no tiene borde y que, visto de cerca, es un plano.





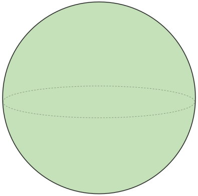
SI

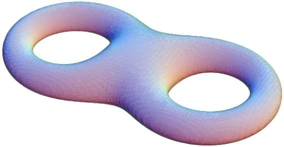


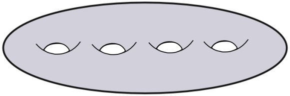
Clasificación de superficies

Teorema

Las superficies cerradas de $\mathbb{R}^3$ son las siguientes:







Clasificación de superficies

Observación importante.

Cuando decimos, por ejemplo, que la superficie S es un toro, entendemos lo siguiente:

Clasificación de superficies

Observación importante.

Cuando decimos, por ejemplo, que la superficie S es un toro, entendemos lo siguiente:

Cuando decimos, por ejemplo, que la superficie S es una esfera, entendemos lo siguiente:

Clasificación de superficies

Las superficies cerradas de $\mathbb{R}^3$ son la esfera y los toros.

Clasificación de superficies

Las superficies cerradas de $\mathbb{R}^3$ son la esfera y los toros.

Demostración. Aunque es un resultado puramente topológico, la llave de la solución consiste en cambiar de universo. Pasamos de la topología a ... ¡¡los origamis!!

Clasificación de superficies

Las superficies cerradas de $\mathbb{R}^3$ son la esfera y los toros.

Demostración. Aunque es un resultado puramente topológico, la llave de la solución consiste en cambiar de universo.

Pasamos de la topología a ... ¡¡los origamis!!

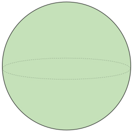
I - Toda superficie es un poliedro

Clasificación de superficies

Las superficies cerradas de $\mathbb{R}^3$ son la esfera y los toros.

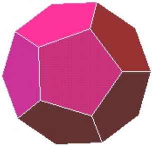
Demostración. Aunque es un resultado puramente topológico, la llave de la solución consiste en cambiar de universo. Pasamos de la topología a ... ¡¡los origamis!!

I - Toda superficie es un poliedro



$=$

ou



etc

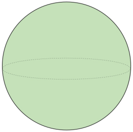
Clasificación de superficies

Las superficies cerradas de $\mathbb{R}^3$ son la esfera y los toros.

Demostración. Aunque es un resultado puramente topológico, la llave de la solución consiste en cambiar de universo.

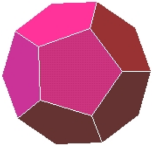
Pasamos de la topología a ... ¡¡los origamis!!

I - Toda superficie es un poliedro



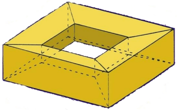
=

ou



etc

=



Clasificación de superficies

I - Toda superficie es un poliedro (Radó 1925)

Clasificación de superficies

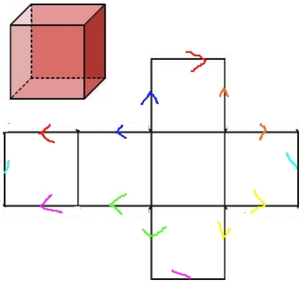
I - Toda superficie es un poliedro (Radó 1925)

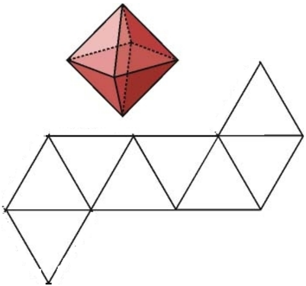
II - Todo poliedro es desplegable

Clasificación de superficies

I - Toda superficie es un poliedro (Radó 1925)

II - Todo poliedro es desplegable

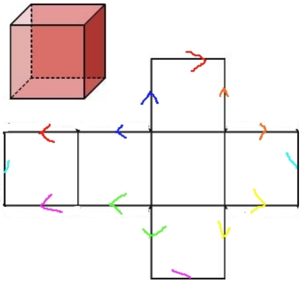


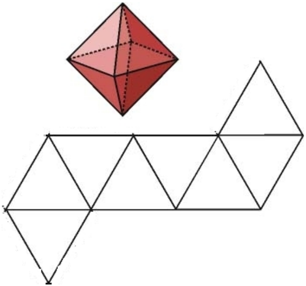


Clasificación de superficies

I - Toda superficie es un poliedro (Radó 1925)

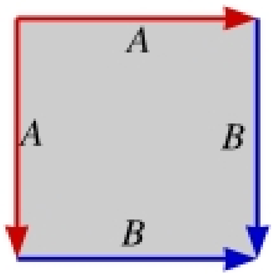
II - Todo poliedro es desplegable

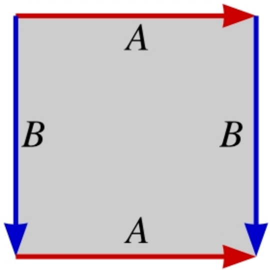


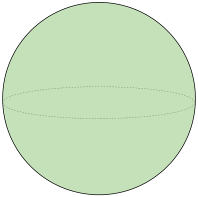


III - Después de una reducción astuta, nos quedan los modelos siguientes (Dehn y Heegard 1907)

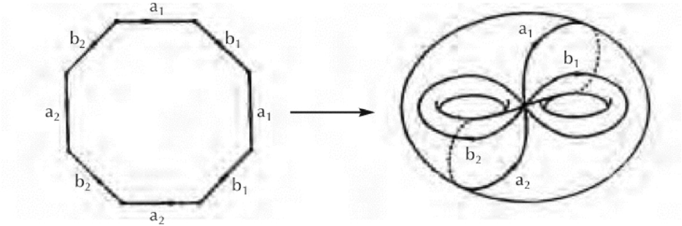
Clasificación de superficies



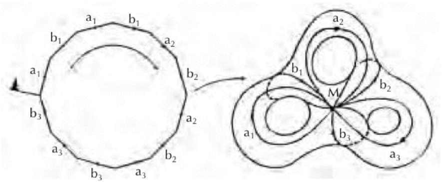


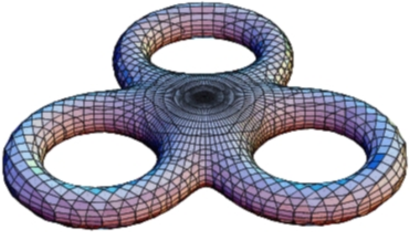


Clasificación de superficies



Clasificación de superficies





tripletoro.jpg

Ex cursus: Característica de Euler-Poincaré

Podemos diferenciar las superficies (poliedros) utilizando un simple número: la característica de Euler-Poincaré $\chi(P)$ de un poliedro P:

Ex cursus: Característica de Euler-Poincaré

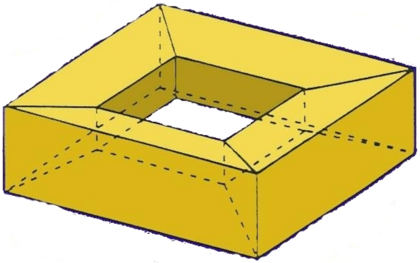
Podemos diferenciar las superficies (poliedros) utilizando un simple número: la característica de Euler-Poincaré $\chi(P)$ de un poliedro P:

$$\chi(P) = \text{Caras - Aristas} + \text{Vértices}$$

Ex cursus: Característica de Euler-Poincaré

Podemos diferenciar las superficies (poliedros) utilizando un simple número: la característica de Euler-Poincaré $\chi(P)$ de un poliedro P:

$$\chi(P) = \text{Caras - Aristas} + \text{Vértices}$$



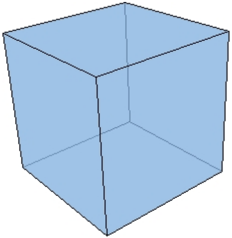
Caras $=$ 16
Aristas $=$ 32
Vértices $=$ 16
$\chi(P) =$ 16-32+16 =0

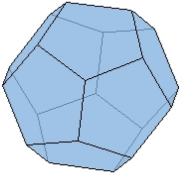
Ex cursus: Característica de Euler-Poincaré

¡¡¡No depende de la descomposición de P!!!

Ex cursus: Característica de Euler-Poincaré

¡¡¡No depende de la descomposición de P!!!

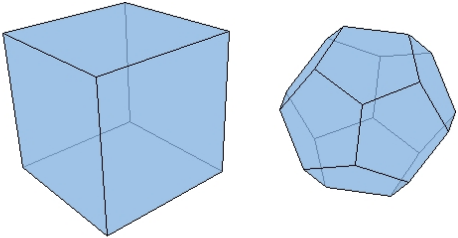




Caras = 6
Aristas = 12
Vértices = 8
$\chi(P)$ = 6-12+8=2

Caras = 12
Aristas = 30
Vértices = 20
$\chi(P)$= 12-30+20=2

¡¡¡No depende de la descomposición de P!!!



Caras $= 6$
Aristas $= 12$
Vértices $= 8$
$\chi(P) =$ 6-12+8=2

Caras $= 12$
Aristas $= 30$
Vértices $= 20$
$\chi(P)=$ 12-30+20=2

$\chi(\text{esfera}) = 2$ $\quad \chi(\text{toro}) = 0$ $\quad \chi(\text{toro género g}) = 2 - 2g$

Ex cursus: Característica de Euler-Poincaré

- La primera demostración de Euler dice

$$\text{Caras - Vértices} + \text{Aristas} = 2 \ldots$$

- Ni Descartes ni l'Hulier pasaron a la Historia por esto.
- Poincaré extendió este invariante a todo espacio topológico.
- ... y creó invariantes algebraicos mucho más potentes: grupo fundamental, homología, ...
- ... Y, sobre todo, creó la Topología Algebraica

Ex cursus: Característica de Euler-Poincaré

- La primera demostración de Euler dice

$$\text{Caras - Vértices} + \text{Aristas} = 2 \ldots$$

- Ni Descartes ni l'Hulier pasaron a la Historia por esto.
- Poincaré extendió este invariante a todo espacio topológico.
- ... y creó invariantes algebraicos mucho más potentes: grupo fundamental, homología, ...
- ... Y, sobre todo, creó la Topología Algebraica

Ex cursus: Característica de Euler-Poincaré

- La primera demostración de Euler dice

$$\text{Caras - Vértices} + \text{Aristas} = 2 \ldots$$

- Ni Descartes ni l'Hulier pasaron a la Historia por esto.
- Poincaré extendió este invariante a todo espacio topológico.
- ... y creó invariantes algebraicos mucho más potentes: grupo fundamental, homología, ...
- ... Y, sobre todo, creó la Topología Algebraica

Ex cursus: Característica de Euler-Poincaré

- La primera demostración de Euler dice

$$\text{Caras - Vértices} + \text{Aristas} = 2 \ldots$$

- Ni Descartes ni l'Hulier pasaron a la Historia por esto.
- Poincaré extendió este invariante a todo espacio topológico.
- ... y creó invariantes algebraicos mucho más potentes: grupo fundamental, homología, ...
- ... Y, sobre todo, creó la Topología Algebraica

Ex cursus: Característica de Euler-Poincaré

- La primera demostración de Euler dice

$$\text{Caras - Vértices} + \text{Aristas} = 2 \ldots$$

- Ni Descartes ni l'Hulier pasaron a la Historia por esto.
- Poincaré extendió este invariante a todo espacio topológico.
- ... y creó invariantes algebraicos mucho más potentes: grupo fundamental, homología, ...
- ... Y, sobre todo, creó la Topología Algebraica

Volvamos a la Conjetura de Poincaré en dim. 2

Conjetura

La única superficie cerrada S de $\mathbb{R}^3$ sea simplemente conexa es la esfera.

Volvamos a la Conjetura de Poincaré en dim. 2

Conjetura

La única superficie cerrada S de $\mathbb{R}^3$ sea simplemente conexa es la esfera.

¿Cuando S es simplemente conexa?

Volvamos a la Conjetura de Poincaré en dim. 2

Conjetura

La única superficie cerrada S de $\mathbb{R}^3$ sea simplemente conexa es la esfera.

¿Cuando S es simplemente conexa?

Si podemos deshacer todo lazo de S.

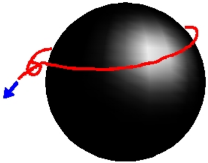
Volvamos a la Conjetura de Poincaré en dim. 2

Conjetura

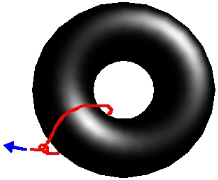
La única superficie cerrada S de $\mathbb{R}^3$ sea simplemente conexa es la esfera.

¿Cuando S es simplemente conexa?

Si podemos deshacer todo lazo de S.



SI



NO

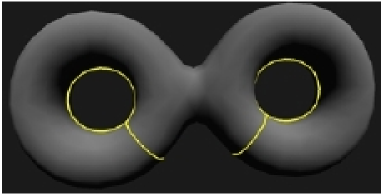
Volvamos a la Conjetura de Poincaré en dim. 2

Conjetura

La única superficie cerrada S de $\mathbb{R}^3$ sea simplemente conexa es la esfera.

¿Cuando S es simplemente conexa?

Si podemos deshacer todo lazo de S.



NO

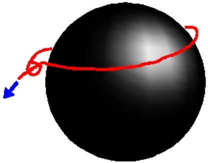
Volvamos a la Conjetura de Poincaré en dim. 2

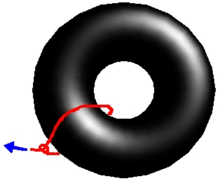
Teorema

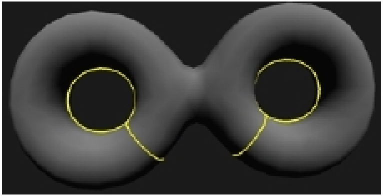
La única superficie cerrada S de $\mathbb{R}^3$ sea simplemente conexa es la esfera.

Teorema

La única superficie cerrada S de $\mathbb{R}^3$ sea simplemente conexa es la esfera.







¿Quién era Poincaré?

Jules Henri Poincaré nació en Nancy en 1854. Su familia pertenecía a la élite intelectual de a ciudad. Su primo Raymond, fue Presidente de la República de 1913 a 1920. Tuvo 3 hijas y un hijo. Murió en Paris en 1912. Poincaré es descrito a menudo como el último "universalista": matemático capaz de entender y contribuir en todos los ámbitos de la disciplina matemática. Fue también también Físico y Filósofo.

¿Quién era Poincaré?

Poincaré realizó contribuciones en:

- Topología algebraica.
- Teoría de funciones analíticas de varias variables complejas.
- Teoría de funciones abelianas.
- Geometría algebraica.
- Teoría de números.
- El problema de los tres cuerpos.
- Teoría de ecuaciones diofánticas.

¿Quién era Poincaré?

- Teoría del electromagnetismo.
- Teoría de la Relatividad Especial.
- Teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales.
- Mecánica celeste.
- Mecánica de fluidos.
- Óptica.
- Electricidad.
- Telegrafía.

¿Quién era Poincaré?

- Capilaridad.
- Elasticidad.
- Termodinámica.
- Teoría potencial.
- Mecánica cuántica.
- Cosmología.
- ...

¡¡Ganó el primer Oscar!!

- Con motivo de su 60 cumpleaños, el Rey Óscar II de Suecia ofreció un premio de por una respuesta a una cuestión fundamental en astronomía.

¿Es estable el Sistema Solar?

- El premio fue otorgado a Henri Poincaré en Marzo de 1889. Seis meses después, las 150 páginas del manuscrito pasaron por imprenta para ser publicadas en *Acta Mathematica*.
- Aquí aparece E. Phragmèn (ayudante del organizador del eventp G. Mittag-Leffler) encontró un error importante en la demostración ... Toda la edición fue destruída ...
- Tras varios meses de trabajo, y con 100 páginas más, H. Poincaré consigue arreglar el problema. Su trabajo es publicado en la citada revista en Junio de 1890.
- Esta vez, él corre con los gastos ...

Es el inicio de la Teoría del Caos

¡¡Ganó el primer Oscar!!

- Con motivo de su 60 cumpleaños, el Rey Óscar II de Suecia ofreció un premio de 2500 coronas por una respuesta a una cuestión fundamental en astronomía.

¿Es estable el Sistema Solar?

- El premio fue otorgado a Henri Poincaré en Marzo de 1889. Seis meses después, las 150 páginas del manuscrito pasaron por imprenta para ser publicadas en *Acta Mathematica*.
- Aquí aparece E. Phragmèn (ayudante del organizador del eventp G. Mittag-Leffler) encontró un error importante en la demostración ... Toda la edición fue destruída ...
- Tras varios meses de trabajo, y con 100 páginas más, H. Poincaré consigue arreglar el problema. Su trabajo es publicado en la citada revista en Junio de 1890.
- Esta vez, él corre con los gastos ... ¡3585 coronas y 65 öre!

Es el inicio de la Teoría del Caos

¡¡Ganó el primer Oscar!!

- Con motivo de su 60 cumpleaños, el Rey Óscar II de Suecia ofreció un premio de 2500 coronas por una respuesta a una cuestión fundamental en astronomía.

¿Es estable el Sistema Solar?

- El premio fue otorgado a Henri Poincaré en Marzo de 1889. Seis meses después, las 150 páginas del manuscrito pasaron por imprenta para ser publicadas en *Acta Mathematica*.
- Aquí aparece E. Phragmèn (ayudante del organizador del eventp G. Mittag-Leffler) encontró un error importante en la demostración ... Toda la edición fue destruída ...
- Tras varios meses de trabajo, y con 100 páginas más, H. Poincaré consigue arreglar el problema. Su trabajo es publicado en la citada revista en Junio de 1890.
- Esta vez, él corre con los gastos ... ¡3585 coronas y 65 öre!

Es el inicio de la Teoría del Caos

¡¡Ganó el primer Oscar!!

- Con motivo de su 60 cumpleaños, el Rey Óscar II de Suecia ofreció un premio de 2500 coronas por una respuesta a una cuestión fundamental en astronomía.

¿Es estable el Sistema Solar?

- El premio fue otorgado a Henri Poincaré en Marzo de 1889. Seis meses después, las 150 páginas del manuscrito pasaron por imprenta para ser publicadas en *Acta Mathematica*.
- Aquí aparece E. Phragmèn (ayudante del organizador del eventp G. Mittag-Leffler) encontró un error importante en la demostración ... Toda la edición fue destruída ...
- Tras varios meses de trabajo, y con 100 páginas más, H. Poincaré consigue arreglar el problema. Su trabajo es publicado en la citada revista en Junio de 1890.
- Esta vez, él corre con los gastos ... ¡3585 coronas y 65 öre!

Es el inicio de la Teoría del Caos

¡¡Ganó el primer Oscar!!

- Con motivo de su 60 cumpleaños, el Rey Óscar II de Suecia ofreció un premio de 2500 coronas por una respuesta a una cuestión fundamental en astronomía.

¿Es estable el Sistema Solar?

- El premio fue otorgado a Henri Poincaré en Marzo de 1889. Seis meses después, las 150 páginas del manuscrito pasaron por imprenta para ser publicadas en *Acta Mathematica*.
- Aquí aparece E. Phragmèn (ayudante del organizador del eventp G. Mittag-Leffler) encontró un error importante en la demostración ... Toda la edición fue destruída ...
- Tras varios meses de trabajo, y con 100 páginas más, H. Poincaré consigue arreglar el problema. Su trabajo es publicado en la citada revista en Junio de 1890.
- Esta vez, él corre con los gastos ... ¡3585 coronas y 65 öre!

Es el inicio de la Teoría del Caos

¡¡Ganó el primer Oscar!!

- Con motivo de su 60 cumpleaños, el Rey Óscar II de Suecia ofreció un premio de 2500 coronas por una respuesta a una cuestión fundamental en astronomía.

¿Es estable el Sistema Solar?

- El premio fue otorgado a Henri Poincaré en Marzo de 1889. Seis meses después, las 150 páginas del manuscrito pasaron por imprenta para ser publicadas en *Acta Mathematica*.
- Aquí aparece E. Phragmèn (ayudante del organizador del eventp G. Mittag-Leffler) encontró un error importante en la demostración ... Toda la edición fue destruída ...
- Tras varios meses de trabajo, y con 100 páginas más, H. Poincaré consigue arreglar el problema. Su trabajo es publicado en la citada revista en Junio de 1890.
- Esta vez, él corre con los gastos ... ¡3585 coronas y 65 öre!

Es el inicio de la Teoría del Caos

¡¡Ganó el primer Oscar!!

- Con motivo de su 60 cumpleaños, el Rey Óscar II de Suecia ofreció un premio de 2500 coronas por una respuesta a una cuestión fundamental en astronomía.

¿Es estable el Sistema Solar?

- El premio fue otorgado a Henri Poincaré en Marzo de 1889. Seis meses después, las 150 páginas del manuscrito pasaron por imprenta para ser publicadas en *Acta Mathematica*.
- Aquí aparece E. Phragmèn (ayudante del organizador del eventp G. Mittag-Leffler) encontró un error importante en la demostración ... Toda la edición fue destruída ...
- Tras varios meses de trabajo, y con 100 páginas más, H. Poincaré consigue arreglar el problema. Su trabajo es publicado en la citada revista en Junio de 1890.
- Esta vez, él corre con los gastos ... ¡3585 coronas y 65 öre!

Es el inicio de la Teoría del Caos

La Conjetura de Poincaré. Biografía somera.

- La conjetura de Poincaré nació en el año 1904. Tuvo una hermana mayor que vio a luz en 1900 pero que apenas vivió 4 años.

La Conjetura de Poincaré. Biografía somera.

- La conjetura de Poincaré nació en el año 1904. Tuvo una hermana mayor que vio a luz en 1900 pero que apenas vivió 4 años.

- También tuvo una hermana pequeña, que vivió unos pocos años en los años sesenta.

La Conjetura de Poincaré. Biografía somera.

- La conjetura de Poincaré nació en el año 1904. Tuvo una hermana mayor que vio a luz en 1900 pero que apenas vivió 4 años.

- También tuvo una hermana pequeña, que vivió unos pocos años en los años sesenta.

- Desde su más tierna fue el centro de atención de los más grandes matemáticos de la época. Sobrevivió a todos sus ataques, tanto topológicos, como geométricos, algebraicos, diferenciales ...

La Conjetura de Poincaré. Biografía somera.

- La conjetura de Poincaré nació en el año 1904. Tuvo una hermana mayor que vio a luz en 1900 pero que apenas vivió 4 años.

- También tuvo una hermana pequeña, que vivió unos pocos años en los años sesenta.

- Desde su más tierna fue el centro de atención de los más grandes matemáticos de la época. Sobrevivió a todos sus ataques, tanto topológicos, como geométricos, algebraicos, diferenciales ...

- La situación iba a cambiar cuando Hamilton propuso su programa de atacar la Conjetura de Poincaré utilizando las ecuaciones diferenciales. Más concretamente, el flujo de Ricci que permite de modificar la curvatura de una variedad.

La Conjetura de Poincaré. Biografía somera.

- La conjetura de Poincaré nació en el año 1904. Tuvo una hermana mayor que vio a luz en 1900 pero que apenas vivió 4 años.

- También tuvo una hermana pequeña, que vivió unos pocos años en los años sesenta.

- Desde su más tierna fue el centro de atención de los más grandes matemáticos de la época. Sobrevivió a todos sus ataques, tanto topológicos, como geométricos, algebraicos, diferenciales ...

- La situación iba a cambiar cuando Hamilton propuso su programa de atacar la Conjetura de Poincaré utilizando las ecuaciones diferenciales. Más concretamente, el flujo de Ricci que permite de modificar la curvatura de una variedad.

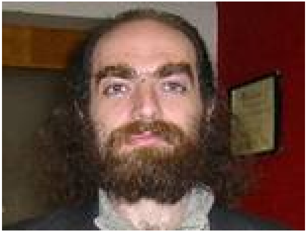
- Y en 2004, de modesta manera, Grisha Perelman  terminó con la centenaria Conjetura de Poincaré.

Grigori Perelman

Nació en Leningrado (San Petesburgo) en 1966. Brillante desde joven. A los 16 años ganó la Olimpiada Matemática con la nota maximal.

Grigori Perelman

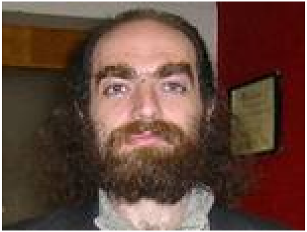
Nació en Leningrado (San Petesburgo) en 1966. Brillante desde joven. A los 16 años ganó la Olimpiada Matemática con la nota maximal.



Rechazó el premio que la Sociedad Matemática otorga cuadrienalmente a diez prometedores matemáticos.Trabajó en San Petersburgo, Nueva York y Berkley. En 1994 comenzó a trabajar en la Conjetura de Poincaré. Tras ocho años la resolvió.

Grigori Perelman

Nació en Leningrado (San Petesburgo) en 1966. Brillante desde joven. A los 16 años ganó la Olimpiada Matemática con la nota maximal.



Rechazó el premio que la Sociedad Matemática otorga cuadrienalmente a diez prometedores matemáticos.Trabajó en San Petersburgo, Nueva York y Berkley. En 1994 comenzó a trabajar en la Conjetura de Poincaré. Tras ocho años la resolvió.

Tras una pequeña controversia la comunidad matemática aceptó la prueba. Ganó la medala Fields, que también rechazó. Abandonó su trabajo en San Petesburgo. Ganó el premio de un millón de dólares que el Instituto Clay de MAtemáticas otorga a quien resuelva uno de los siete problemas del milenio. Hasta la fecha, no ha ido a cobrarlo.

Habíamos de jado a Hamiton con dos problemas. El flujo de Ricci

- ¿Produce singularidades cigarro?
- ¿Es un proceso infinito?

Grigori Perelman

Habíamos de jado a Hamiton con dos problemas. El flujo de Ricci

- ¿Produce singularidades cigarro?
- ¿Es un proceso infinito?

Perelman respondió a las dos preguntas: no y no. Y demostró así que la Conjetura de Poincaré era cierta.

Grigori Perelman

Habíamos de jado a Hamiton con dos problemas. El flujo de Ricci

- ¿Produce singularidades cigarro?
- ¿Es un proceso infinito?

Perelman respondió a las dos preguntas: no y no. Y demostró así que la Conjetura de Poincaré era cierta. Y más aún, la Conjetura de Geometrización de Thurston , de la que no hemos hablado.

Contrariamente a los usos habituales, no publicó un artículo, sino que puso sus trabajos en Internet, sobriamente. Entre el otoño de 2002 y la primavera de 2003 puso sus tres articulos en arχiv

Grigori Perelman

Contrariamente a los usos habituales, no publicó un artículo, sino que puso sus trabajos en Internet, sobriamente. Entre el otoño de 2002 y la primavera de 2003 puso sus tres articulos en arχiv

- La fórmula de entropía para el flujo de Ricci y sus applicaciones geométricas(39 páginas).
- Flujo de Ricci con cirugía en 3-variedades (22 páginas).
- Tiemo de extinción finita para las soluciones del flujo de Ricci en ciertas variedades de dimensión 3 (7 páginas).

Grigori Perelman

Durante 2003 dio varias conferencias en EEUU para convencer a la comunidad matemática lo acertado de su prueba. Lo consiguió aunque faltaban los detalles. Tres grupos de dos matemáticos se puso a trabajar en ello.

Grigori Perelman

Durante 2003 dio varias conferencias en EEUU para convencer a la comunidad matemática lo acertado de su prueba. Lo consiguió aunque faltaban los detalles. Tres grupos de dos matemáticos se puso a trabajar en ello.

- J. Morgan y G. Tian. El flujo de Ricci y la Conjetura de Poincaré (2007). 493 páginas.
- B. Kleiner y J. Lott. Notes sobre los trabajos de Perelman (2007). 200 páginas.
- H.-D. Cao y X.-P. Zhu. Una prueba completa de las Conjeturas de Geometrización y de Poincaré. Aplicación de la Teoría Hamilton-Perelman del flujo de Ricci. (2006). 327 páginas.

Grigori Perelman

Hubo una cierta polémica sobre si Perelman o Cao-Zhu habían demostrado la Conjetura de Poincaré. Pero la Congreso Internacional de Matemáticas decidió otorgar la Medalla Fields a Perelman en 2006. Éste rechazó el galardón:

El Premio me es completamente irrelevante. Todos saben que si la prueba es correcta nigún otro reconocimiento es necesario.

Grigori Perelman

Hubo una cierta polémica sobre si Perelman o Cao-Zhu habían demostrado la Conjetura de Poincaré. Pero la Congreso Internacional de Matemáticas decidió otorgar la Medalla Fields a Perelman en 2006. Éste rechazó el galardón:

El Premio me es completamente irrelevante. Todos saben que si la prueba es correcta nigún otro reconocimiento es necesario.

El Instituto Clay de Matemáticas estableció en el año 2000 los Siete Problemas del Milenio: "preguntas clásicas importantes que no han sido resueltas en años". La primera persona que resuelva cada uno de estos problemas recibirá un premio de un millón de dólares. Puesto que la Conjetura de Poincaré es uno estos siete problemas, Perelman tiene dercho a est premio.

Grigori Perelman

Hubo una cierta polémica sobre si Perelman o Cao-Zhu habían demostrado la Conjetura de Poincaré. Pero la Congreso Internacional de Matemáticas decidió otorgar la Medalla Fields a Perelman en 2006. Éste rechazó el galardón:

El Premio me es completamente irrelevante. Todos saben que si la prueba es correcta nigún otro reconocimiento es necesario.

El Instituto Clay de Matemáticas estableció en el año 2000 los Siete Problemas del Milenio: "preguntas clásicas importantes que no han sido resueltas en años". La primera persona que resuelva cada uno de estos problemas recibirá un premio de un millón de dólares. Puesto que la Conjetura de Poincaré es uno estos siete problemas, Perelman tiene dercho a est premio. Hasta hoy no ha ido a cobrarlos.

Las dos primeras conjeturas de Poincaré

Primer intento

Toda variedad topológica de dimensión 3 cuyos grupos de homología sean triviales y que sea compacta, orientable y sin borde es homeomorfa a la esfera.

Las dos primeras conjeturas de Poincaré

Primer intento

Toda variedad topológica de dimensión 3 cuyos grupos de homología sean triviales y que sea compacta, orientable y sin borde es homeomorfa a la esfera.

Segundo intento

Toda variedad topológica de dimensión 3 simplemente conexa y que sea compacta, orientable y sin borde es homeomorfa a la esfera.

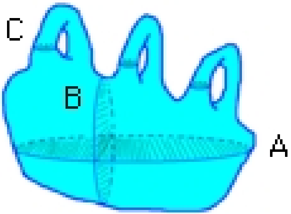
Las dos primeras conjeturas de Poincaré

Primer intento

Toda variedad topológica de dimensión 3 cuyos grupos de homología sean triviales y que sea compacta, orientable y sin borde es homeomorfa a la esfera.

Segundo intento

Toda variedad topológica de dimensión 3 simplemente conexa y que sea compacta, orientable y sin borde es homeomorfa a la esfera.



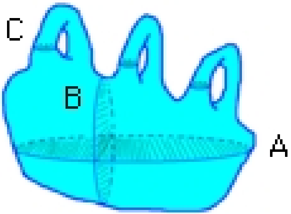
Las dos primeras conjeturas de Poincaré

Primer intento

Toda variedad topológica de dimensión 3 cuyos grupos de homología sean triviales (A y B) y que sea compacta, orientable y sin borde es homeomorfa a la esfera.

Segundo intento

Toda variedad topológica de dimensión 3 simplemente conexa y que sea compacta, orientable y sin borde es homeomorfa a la esfera.



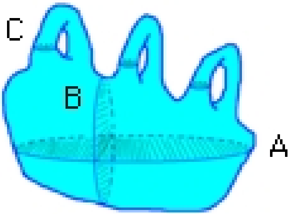
Las dos primeras conjeturas de Poincaré

Primer intento

Toda variedad topológica de dimensión 3 cuyos grupos de homología sean triviales (A y B) y que sea compacta, orientable y sin borde es homeomorfa a la esfera.

Segundo intento

Toda variedad topológica de dimensión 3 simplemente conexa (A) y que sea compacta, orientable y sin borde es homeomorfa a la esfera.



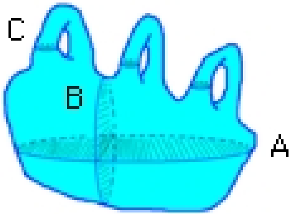
Las dos primeras conjeturas de Poincaré

Primer intento

Toda variedad topológica de dimensión 3 cuyos grupos de homología sean triviales (A y B) y que sea compacta, orientable y sin borde es homeomorfa a la esfera.

Segundo intento

Toda variedad topológica de dimensión 3 simplemente conexa (A) y que sea compacta, orientable y sin borde es homeomorfa a la esfera.



El mismo Poincaré mostró que la primera conjetura es falsa.
Dió un contra-ejemplo (el único conocido por ahora...) que se llama *Esfera de Poincaré*

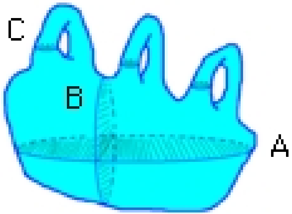
Las dos primeras conjeturas de Poincaré

Primer intento

Toda variedad topológica de dimensión 3 cuyos grupos de homología sean triviales (A y B) y que sea compacta, orientable y sin borde es homeomorfa a la esfera.

Segundo intento

Toda variedad topológica de dimensión 3 simplemente conexa (A) y que sea compacta, orientable y sin borde es homeomorfa a la esfera.



El mismo Poincaré mostró que la primera conjetura es falsa.
Dió un contra-ejemplo (el único conocido por ahora...) que se llama *Esfera de Poincaré*

La Conjetura de Poincaré... en dimensión superior.

Estamos en los años 60. Todos los esfuerzos para demostrar la Conjetura de Poincaré ha sido vanos. Los matemáticos no sabían que hacer ... Así que se preguntaron que pasaría en dimensión superior. La pregunta cambia un poco

Conjetura de Poincaré en dimensión 2

Toda variedad de dimensión 3 que sea compacta, orientable, sin borde y simplemente conexa, es de hecho homeomorfa a la esfera.

La Conjetura de Poincaré... en dimensión superior.

Conjetura de Poincaré en dimensión 2

Toda variedad de dimensión 3 que sea compacta, orientable, sin borde y simplemente conexa, es de hecho homeomorfa a la esfera.

Conjetura de Poincaré en dimensión $n \geq 4$

Toda variedad de dimensión n que sea compacta, orientable, sin borde y homótopa a la esfera, es de hecho homeomorfa a la esfera.

La Conjetura de Poincaré... en dimensión superior.

Conjetura de Poincaré en dimensión 2

Toda variedad de dimensión 3 que sea compacta, orientable, sin borde y simplemente conexa, es de hecho homeomorfa a la esfera.

Conjetura de Poincaré en dimensión $n \geq 4$

Toda variedad de dimensión n que sea compacta, orientable, sin borde y homótopa a la esfera, es de hecho homeomorfa a la esfera.

Aunque parezca paradójico, esta conjetura es más fácil que la de dimensión 3, ya que en dimensión superir hay más espacio para moverse. De hecho:

La Conjetura de Poincaré... en dimensión superior.

- Smale  resolvió la Conjetura de Poincaré para $n \geq 5$ a principios de los 60.

La Conjetura de Poincaré... en dimensión superior.

- Smale resolvió la Conjetura de Poincaré para $n \geq 5$ a principios de los 60.
- Stallings resolvió la Conjetura de Poincaré para $n \geq 7$ a principios de los 60.

La Conjetura de Poincaré... en dimensión superior.

- Smale  resolvió la Conjetura de Poincaré para $n \geq 5$ a principios de los 60.
- Stallings resolvió la Conjetura de Poincaré para $n \geq 7$ a principios de los 60.
- Zeeman completó la prueba de Stallings para $n = 5, 6$ a principios de los 60.

La Conjetura de Poincaré... en dimensión superior.

- Smale  resolvió la Conjetura de Poincaré para $n \geq 5$ a principios de los 60.
- Stallings resolvió la Conjetura de Poincaré para $n \geq 7$ a principios de los 60.
- Zeeman completó la prueba de Stallings para $n = 5, 6$ a principios de los 60.
- Wallace resolvió la Conjetura de Poincaré para $n \geq 5$ a principios de los 60.

La Conjetura de Poincaré... en dimensión superior.

- Smale  resolvió la Conjetura de Poincaré para $n \geq 5$ a principios de los 60.
- Stallings resolvió la Conjetura de Poincaré para $n \geq 7$ a principios de los 60.
- Zeeman completó la prueba de Stallings para $n = 5, 6$ a principios de los 60.
- Wallace resolvió la Conjetura de Poincaré para $n \geq 5$ a principios de los 60.
- Freedman  resolvió la Conjetura de Poincaré para $n = 4$ en 1981.

La Conjetura de Poincaré... en dimensión superior.

- Smale  resolvió la Conjetura de Poincaré para $n \geq 5$ a principios de los 60.
- Stallings resolvió la Conjetura de Poincaré para $n \geq 7$ a principios de los 60.
- Zeeman completó la prueba de Stallings para $n = 5, 6$ a principios de los 60.
- Wallace resolvió la Conjetura de Poincaré para $n \geq 5$ a principios de los 60.
- Freedman  resolvió la Conjetura de Poincaré para $n = 4$ en 1981.

La Conjetura de Poincaré... en dimensión superior.

- Smale  resolvió la Conjetura de Poincaré para $n \geq 5$ a principios de los 60.
- Stallings resolvió la Conjetura de Poincaré para $n \geq 7$ a principios de los 60.
- Zeeman completó la prueba de Stallings para $n = 5, 6$ a principios de los 60.
- Wallace resolvió la Conjetura de Poincaré para $n \geq 5$ a principios de los 60.
- Freedman  resolvió la Conjetura de Poincaré para $n = 4$ en 1981.

Luchando con la Conjetura de Poincaré.

- La primera prueba publicada de la conjetura de Poincaré es la de J.H.C. Whitehead en 1934. "Probó" que $\mathbb{R}^3$ es la única variedad abierta en la que todos los lazos (de cualquier dimensión) colapsan en un punto.

Luchando con la Conjetura de Poincaré.

- La primera prueba publicada de la conjetura de Poincaré es la de J.H.C. Whitehead en 1934. "Probó" que $\mathbb{R}^3$ es la única variedad abierta en la que todos los lazos (de cualquier dimensión) colapsan en un punto.

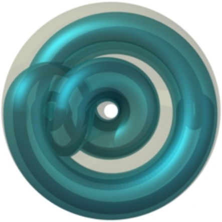
En 1935 publicó una retifcación. De hecho, construyó un contraejemplo W (llamado desde entonces *variedad de Whithead*). Es un ejemplo muy importante en Matemáticas. Verifica, en particular:

$$W \neq \mathbb{R}^3 \quad \text{y} \quad W \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^4$$

Luchando con la Conjetura de Poincaré.

- La primera prueba publicada de la conjetura de Poincaré es la de J.H.C. Whitehead en 1934. "Probó" que $\mathbb{R}^3$ es la única variedad abierta en la que todos los lazos (de cualquier dimensión) colapsan en un punto.
En 1935 publicó una retifcación. De hecho, construyó un contraejemplo W (llamado desde entonces *variedad de Whithead*). Es un ejemplo muy importante en Matemáticas. Verifica, en particular:

$$W \neq \mathbb{R}^3 \quad \text{y} \quad W \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^4$$



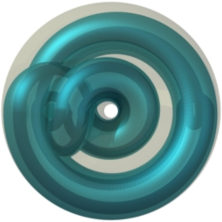
Luchando con la Conjetura de Poincaré.

- La primera prueba publicada de la conjetura de Poincaré es la de J.H.C. Whitehead en 1934. "Probó" que $\mathbb{R}^3$ es la única variedad abierta en la que todos los lazos (de cualquier dimensión) colapsan en un punto.

En 1935 publicó una retifcación. De hecho, construyó un contraejemplo W (llamado desde entonces *variedad de Whithead*). Es un ejemplo muy importante en Matemáticas. Verifica, en particular:

$$W \neq \mathbb{R}^3 \quad \text{y} \quad W \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^4$$

Jesus, He's Confusing



Luchando con la Conjetura de Poincaré.

- En los años 60 C. Papakyriakopoulos demostró que la conjetura de Poincaré era equivalente a dos conjeturas algebraicas ... que no consiguió resolver. E. Strasser-Rapaport y J. Birman continuaron en esta línea, sin éxito.

Luchando con la Conjetura de Poincaré.

- En los años 60 C. Papakyriakopoulos demostró que la conjetura de Poincaré era equivalente a dos conjeturas algebraicas ... que no consiguió resolver. E. Strasser-Rapaport y J. Birman continuaron en esta línea, sin éxito.

- RH Bing dio una condición suficiente (topología algebraica) para probar la Conjetura de Poincaré en 1958 ... ¡pero murió en 1986 convencido que la Conjetura era falsa!

Luchando con la Conjetura de Poincaré.

- En los años 50 E. Moise mostró que toda variedad topológica M de dimensión 3 era un politopo (como Radó había hecho para la dimensión 2 en 1925). Esto permite tratar M como una variedad diferenciable, y poder así utilizar todo el arsenal diferenciable para atacar la Conjetura de Poincaré (resultado esencial para el final de la historia).

Luchando con la Conjetura de Poincaré.

- En los años 50 E. Moise mostró que toda variedad topológica M de dimensión 3 era un politopo (como Radó había hecho para la dimensión 2 en 1925). Esto permite tratar M como una variedad diferenciable, y poder así utilizar todo el arsenal diferenciable para atacar la Conjetura de Poincaré (resultado esencial para el final de la historia).

Es lo que hizo E. Moise ... sin éxito. Según uno de sus estudiantes:"a cabezazos como si la Conjetura de Poincaré fuese una pared, y en esos casos, o la pared cae o la cabeza cede".

Luchando con la Conjetura de Poincaré.

- En los años 50 E. Moise mostró que toda variedad topológica M de dimensión 3 era un politopo (como Radó había hecho para la dimensión 2 en 1925). Esto permite tratar M como una variedad diferenciable, y poder así utilizar todo el arsenal diferenciable para atacar la Conjetura de Poincaré (resultado esencial para el final de la historia).

Es lo que hizo E. Moise ... sin éxito. Según uno de sus estudiantes:"a cabezazos como si la Conjetura de Poincaré fuese una pared, y en esos casos, o la pared cae o la cabeza cede".

Esto le pasó a E. Moise que terminó sus días como crítico literario de los que "mean fuera del tiesto".

Luchando con la Conjetura de Poincaré.

- W. Haken había demastrado el Terorema de los Cuatro colores an 1951 por un método algorítmico. Utilizando el resultado de Moise intento hacer lo mismo con la Conjetura de Poincaré, sin éxito.

Luchando con la Conjetura de Poincaré.

- W. Haken había demastrado el Terorema de los Cuatro colores an 1951 por un método algorítmico. Utilizando el resultado de Moise intento hacer lo mismo con la Conjetura de Poincaré, sin éxito.

- Poénaru concibió en 1994 un programa para resolver la Conjetura de Poincaré. En 2004, podemos encontrar en su página web una prepublicación an la que ... contínua con su programa ...

Luchando con la Conjetura de Poincaré.

- W. Haken había demastrado el Terorema de los Cuatro colores an 1951 por un método algorítmico. Utilizando el resultado de Moise intento hacer lo mismo con la Conjetura de Poincaré, sin éxito.

- Poénaru concibió en 1994 un programa para resolver la Conjetura de Poincaré. En 2004, podemos encontrar en su página web una prepublicación an la que ... contínua con su programa ...

- J. Stallings (ya hemos hablado de él antes) también intentó, un poco, ser el primero en resolver la Conjetura de Poincaré. Pero se curó pronto de Poincaritis. Dice: "*Durante mucho tiempo fui incapaz de encontrar los defectos de mi demostración, aunque el error era evidente. Era un problema psicológico, una ceguera, un exceso de entusiasmo, una inhibición de la razón por el secreto temor de equivocarme.*"

Luchando con la Conjetura de Poincaré.

- A partir de los años 70 el número de matemáticos que intentó resolver la Conjetura de Poincaré no dejó de aumentar. Los resultados de E. Moise permitían utilizar todas las herramientas diferenciales. Cirugía, nudos, foliaciones ... sin resultado.

Luchando con la Conjetura de Poincaré.

- A partir de los años 70 el número de matemáticos que intentó resolver la Conjetura de Poincaré no dejó de aumentar. Los resultados de E. Moise permitían utilizar todas las herramientas diferenciales. Cirugía, nudos, foliaciones ... sin resultado.
Algunos osaron anunciar una demostración de la Conjetura de Poincaré y tuvieron que pasar por les "Tribunales de la Inquisición". La llegada de Internet aceleró el proceso.

Luchando con la Conjetura de Poincaré.

- A partir de los años 70 el número de matemáticos que intentó resolver la Conjetura de Poincaré no dejó de aumentar. Los resultados de E. Moise permitían utilizar todas las herramientas diferenciales. Cirugía, nudos, foliaciones ... sin resultado.

Algunos osaron anunciar una demostración de la Conjetura de Poincaré y tuvieron que pasar por les "Tribunales de la Inquisición". La llegada de Internet aceleró el proceso.

S. Nikitine presentó en 2002 su prueba en Internet. Los foros se animaron y empezaron a encontrar errores que Nikitine corregía en sucesivas versiones de su prueba: 1,2,3,4,5,6,7 y 8.

Esta última ya nadié la comentó ...

El otro Hamilton.

El gran mérito de Hamilton ha sido el de atacar la Conjetura de Poinacré (que es púramente toplógica) utilizando la métrica que tenemos en las variedades, la curvatura asociada y una evolución de esta métrica dad por el flujo de Ricci, que es una ecuación diferencial

El otro Hamilton.

El gran mérito de Hamilton ha sido el de atacar la Conjetura de Poinacré (que es púramente toplógica) utilizando la métrica que tenemos en las variedades, la curvatura asociada y una evolución de esta métrica dad por el flujo de Ricci, que es una ecuación diferencial (¡con el Análisis topamos Sancho!).

Variedad topológica

El otro Hamilton.

El gran mérito de Hamilton ha sido el de atacar la Conjetura de Poinacré (que es púramente toplógica) utilizando la métrica que tenemos en las variedades, la curvatura asociada y una evolución de esta métrica dad por el flujo de Ricci, que es una ecuación diferencial (¡con el Análisis topamos Sancho!).

Variedad topológica $\longrightarrow$ Variedad triangularizable $\longrightarrow$

El otro Hamilton.

El gran mérito de Hamilton ha sido el de atacar la Conjetura de Poinacré (que es púramente toplógica) utilizando la métrica que tenemos en las variedades, la curvatura asociada y una evolución de esta métrica dad por el flujo de Ricci, que es una ecuación diferencial (¡con el Análisis topamos Sancho!).

Variedad topológica $\longrightarrow$ Variedad triangularizable $\longrightarrow$ Variedad diferenciable

El otro Hamilton.

El gran mérito de Hamilton ha sido el de atacar la Conjetura de Poinacré (que es púramente toplógica) utilizando la métrica que tenemos en las variedades, la curvatura asociada y una evolución de esta métrica dad por el flujo de Ricci, que es una ecuación diferencial (¡con el Análisis topamos Sancho!).

Variedad topológica	$\longrightarrow$	Variedad triangularizable $\longrightarrow$
Variedad diferenciable	$\longrightarrow$	Variedad métrica

El otro Hamilton.

El gran mérito de Hamilton ha sido el de atacar la Conjetura de Poinacré (que es púramente toplógica) utilizando la métrica que tenemos en las variedades, la curvatura asociada y una evolución de esta métrica dad por el flujo de Ricci, que es una ecuación diferencial (¡con el Análisis topamos Sancho!).

$$\begin{array}{rcl} \text{Variedad topológica} & \longrightarrow & \text{Variedad triangularizable} \longrightarrow \\ \text{Variedad diferenciable} & \longrightarrow & \text{Variedad métrica} \longrightarrow \\ \text{Flujo de Ricci} & =\!=\!=\!= & g'(t) = -2Ric(g(t)). \end{array}$$

El otro Hamilton.

El gran mérito de Hamilton ha sido el de atacar la Conjetura de Poinacré (que es púramente toplógica) utilizando la métrica que tenemos en las variedades, la curvatura asociada y una evolución de esta métrica dad por el flujo de Ricci, que es una ecuación diferencial (¡con el Análisis topamos Sancho!).

$$\begin{aligned} \text{Variedad topológica} &\longrightarrow \text{Variedad triangularizable} \longrightarrow \\ \text{Variedad diferenciable} &\longrightarrow \text{Variedad métrica} \longrightarrow \\ \text{Flujo de Ricci} &=\!=\!=\!= g'(t) = -2Ric(g(t)). \end{aligned}$$

Si he visto más lejos es porque
estoy sentado sobre los hombros de gigantes

El otro Hamilton.

El gran mérito de Hamilton ha sido el de atacar la Conjetura de Poinacré (que es púramente toplógica) utilizando la métrica que tenemos en las variedades, la curvatura asociada y una evolución de esta métrica dad por el flujo de Ricci, que es una ecuación diferencial (¡con el Análisis topamos Sancho!).

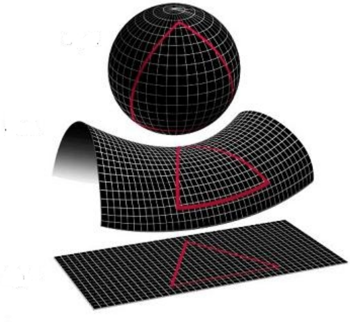
$$
\begin{array}{rcl}
\text{Variedad topológica} & \longrightarrow & \text{Variedad triangularizable} \longrightarrow \\
\text{Variedad diferenciable} & \longrightarrow & \text{Variedad métrica} \longrightarrow \\
\text{Flujo de Ricci} & \Longleftrightarrow & g'(t) = -2Ric(g(t)).
\end{array}
$$

Si he visto más lejos es porque
estoy sentado sobre los hombros de gigantes

Pasamos a explicar esta noción, en dimensión 2.

Cada punto de una supeficie de $\mathbb{R}^3$ tiene una curvatura, que es un nombre real. Este número tiene:

Cada punto de una supeficie de $\mathbb{R}^3$ tiene una curvatura, que es un nombre real. Este número tiene:

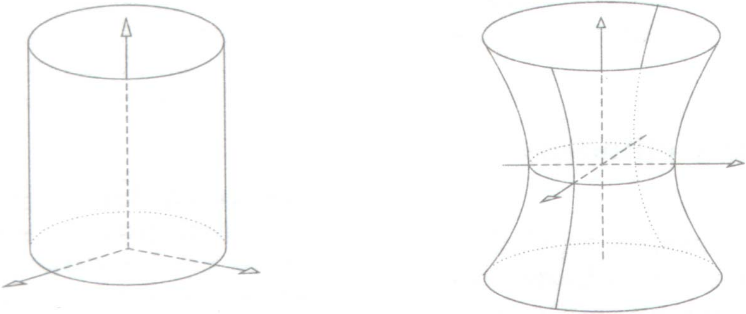


signo

magnitud

El otro Hamilton.

Una superficie no tiene una curvatura intrínseca, ésta depende de la manera que la vemos en $\mathbb{R}^3$.

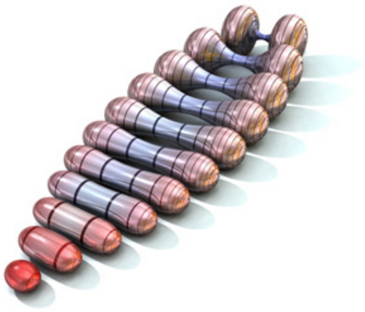


Luchando con la Conjetura de Poincaré.

El flujo de Ricci modifica la curvatura de la superficie S sin modificar S. Redistibuyela curvatura dilatando las zonas de curvatura negativa y contrayendo las zonas de curvatura positiva.

Luchando con la Conjetura de Poincaré.

El flujo de Ricci modifica la curvatura de la superficie S sin modificar S. Redistibuyela curvatura dilatando las zonas de curvatura negativa y contrayendo las zonas de curvatura positiva.

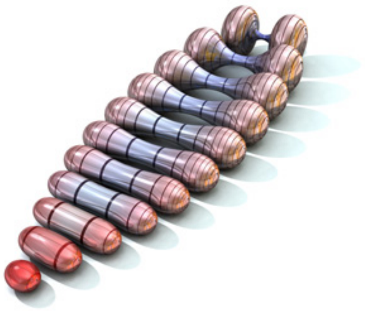


La supercie S misma no varía.

Luchando con la Conjetura de Poincaré.

Teorema de Hamilton

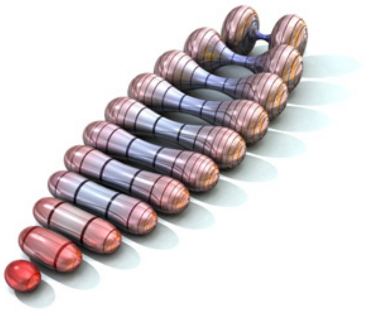
Toda variedad topológica de dimensión tres que sea simplemente conexa, compacta, orientable, sin borde y cuya curvatura de Ricci sea positiva es homeomorfa a la esfera.



Luchando con la Conjetura de Poincaré.

Teorema de Hamilton

Toda variedad topológica de dimensión tres que sea simplemente conexa, compacta, orientable, sin borde y cuya curvatura de Ricci sea positiva es homeomorfa a la esfera.



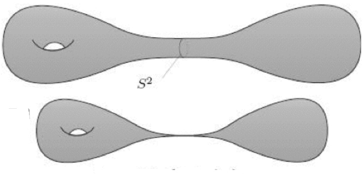
Animado por la respuesta parcial que había dado a la Conjetura de Poincaré, Hamilton intentó aplicar el mismo procedimiento sin la hipótesis pero ...

Luchando con la Conjetura de Poincaré.

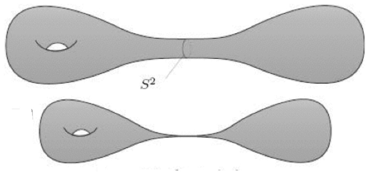
El primer problema que encontró fue que en su largo caminar el flujo de Ricci puede crear singularidades ...

Luchando con la Conjetura de Poincaré.

El primer problema que encontró fue que en su largo caminar el flujo de Ricci puede crear singularidades ...



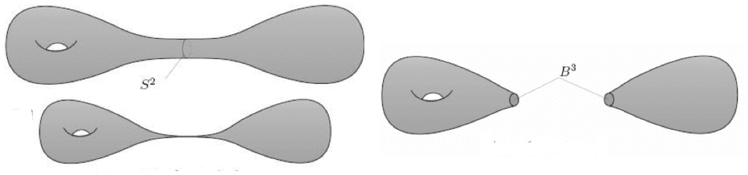
El primer problema que encontró fue que en su largo caminar el flujo de Ricci puede crear singularidades ...



y muchos tipos de singularidades: tubos filiformes, circuitos, capuchones, cigarros, ...

Luchando con la Conjetura de Poincaré.

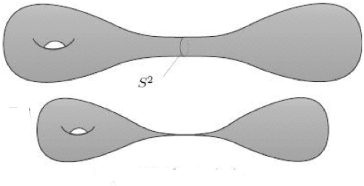
El primer problema que encontró fue que en su largo caminar el flujo de Ricci puede crear singularidades ...

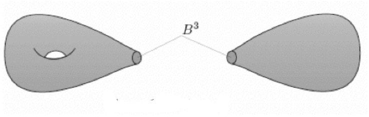


y muchos tipos de singularidades: tubos filiformes, circuitos, capuchones, cigarros, ... Utilizó la cirugía (¡cortar y coser!) Fue un éxito ...

Luchando con la Conjetura de Poincaré.

El primer problema que encontró fue que en su largo caminar el flujo de Ricci puede crear singularidades ...





y muchos tipos de singularidades: tubos filiformes, circuitos, capuchones, cigarros, ... Utilizó la cirugía (¡cortar y coser!) Fue un éxito ... parcial

- Los cigarros se le resistían.
- Nada le pemitía asegurar que un número finito de cirugías le serían suficientes.