

# REPONSE FREQUENTIELLE DES SLCI

<http://perso.numericable.fr/starnaud/>

## I. DEMARCHE

Dans ce chapitre, nous allons soumettre les systèmes fondamentaux à une entrée sinusoïdale (entrée harmonique) :

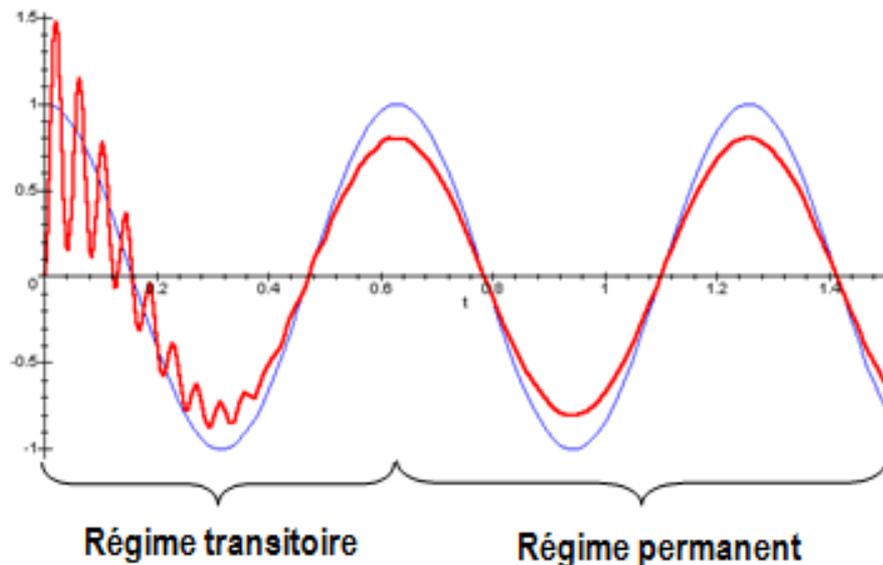
$$e(t) = E_0 \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot u(t) \quad E_0 \text{ et } \omega \text{ imposées}$$

On observe que  $s(t)$  se décompose en un régime transitoire et un régime permanent.

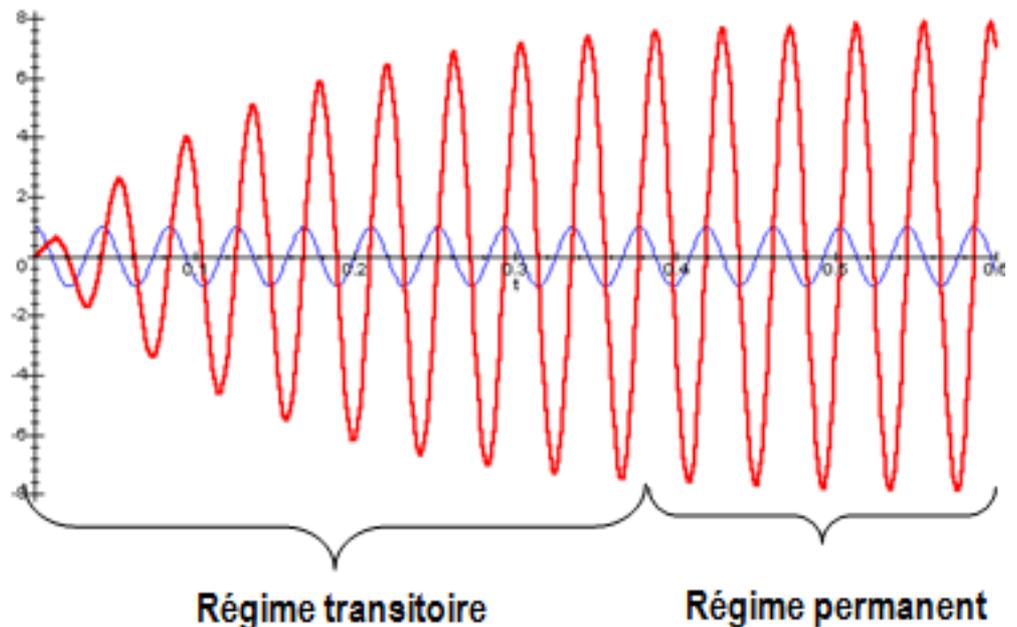
Exemples : Avec un système du second ordre :  $K = 0,8$  ;  $z = 0,05$  ;  $\omega_n = 150 \text{ rad/s}$

Pour une entrée  $e(t) = \sin(\omega \cdot t) \cdot u(t)$

Avec  $\omega = 10$   
rad/s



Avec  $\omega = 150$   
rad/s



L'effet du régime transitoire disparaît avec le temps, il ne reste plus que le régime permanent appelé aussi régime forcé.

Le régime permanent  $s_p(t)$  est de forme sinusoïdale de même pulsation  $\omega$  que l'entrée mais d'amplitude  $S_0$  différente et déphasé de  $\varphi$  par rapport à celle-ci.

$$s_p(t) = S_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi) \cdot u(t) \quad \text{avec :} \quad \begin{array}{l} \omega : \text{ pulsation de l'entrée} \\ S_0 : \text{ amplitude} \\ \varphi : \text{ Déphasage} \end{array}$$

L'étude fréquentielle va consister à étudier l'amplitude  $S_0$  de la sortie  $s_p(t)$  ou plus particulièrement la variation d'amplitude  $A = S_0/E_0$  et le déphasage de la sortie par rapport à l'entrée  $\varphi$  en fonction de la pulsation  $\omega$  et des caractéristiques du système.

Lorsque l'on donne à la variable  $p$  une valeur imaginaire pure  $j \cdot \omega$  on obtient la fonction de transfert harmonique  $H(j\omega)$  :

$$H(j\omega) = \frac{S(j\omega)}{E(j\omega)} \quad \Rightarrow \quad A(\omega) = |H(j\omega)| \quad \text{et} \quad \varphi = \arg(H(j\omega))$$

L'étude consiste à représenter graphiquement  $H(j\omega)$

## II. LES DIAGRAMMES DE BODE

Les diagrammes de Bode représentent séparément le **module** et la **phase** de la fonction  $H(j\omega)$  en fonction de  $\omega$  en rad/s :

✓ Diagramme de Gain :  $G(\omega) = A(\omega) = |H(j\omega)|$

Le module  $G$  de la fonction est représenté en dB (décibel), soit :

$$G_{db}(\omega) = A_{db}(\omega) = 20 \cdot \log(|H(j\omega)|)$$

La pulsation  $\omega$  en radian/s est représentée en  $\log_{10}$  (échelle logarithme décimal).

✓ Diagramme de phase :  $\varphi = \arg(H(j\omega))$

La phase  $\varphi$  en degré ou en rad est représentée en échelle linéaire.

La pulsation  $\omega$  en radian/s est représentée en  $\log_{10}$  (échelle logarithme décimal).

Remarque 1 : On parle de « décade » entre  $\omega$  et  $10\omega$ .

Remarque 2 : Cette représentation se prête bien à l'analyse des fonctions de transfert.

Exemple dans le cas d'une fonction de transfert  $H(j\omega) = H_1(j\omega).H_2(j\omega)$

$$G_{db} = 20.\log(|H(j\omega)|) = 20.\log(|H_1(j\omega)|) + 20.\log(|H_2(j\omega)|)$$

$$\varphi = \arg(H(j\omega)) = \arg(H_1(j\omega)) + \arg(H_2(j\omega))$$

Graphiquement, il suffit d'ajouter les diagrammes des fonctions  $H_1(j\omega)$  et  $H_2(j\omega)$  pour obtenir les diagrammes de  $H(j\omega)$ .

Attention :

- ✓ Dans les diagrammes de Bode, il n'y a pas de «  $\omega = 0$  rd/s » qui est rejeté à  $-\infty$
- ✓  $G_{db} = 0$  db lorsque  $|H(j\omega)| = 1$

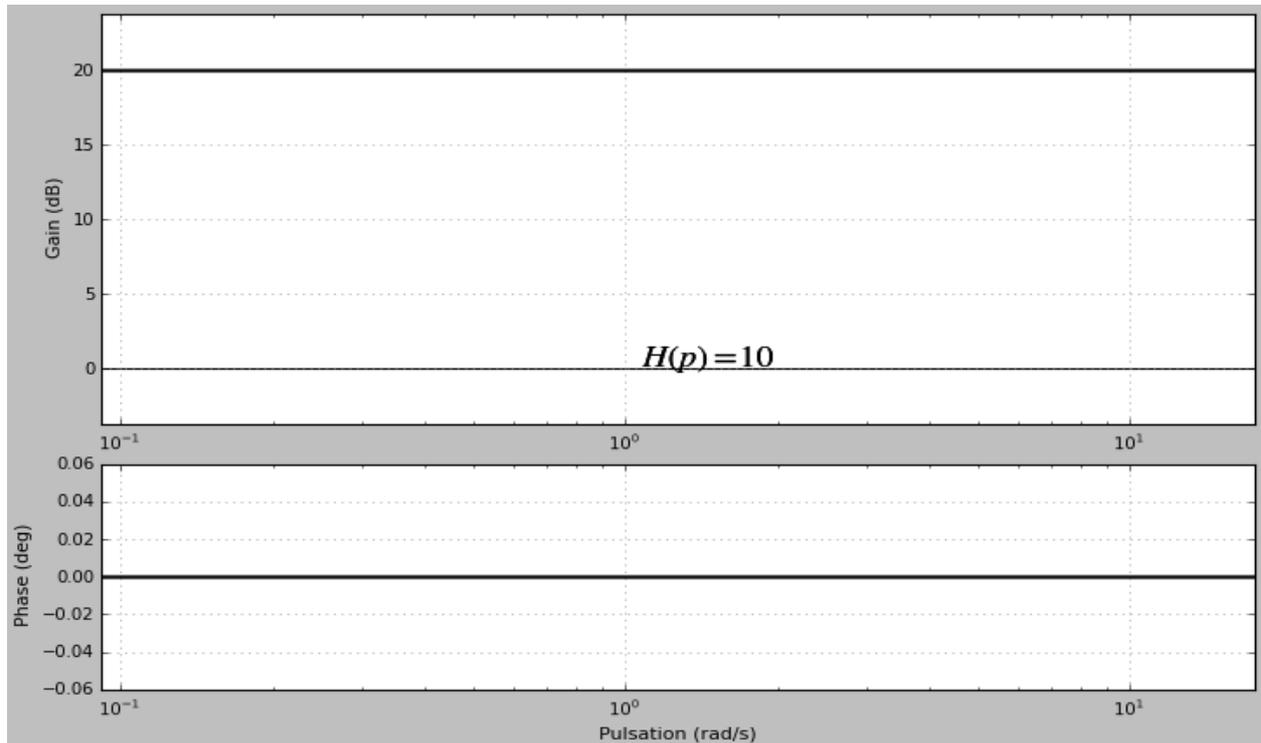
### III. SYSTEME A ACTION PROPORTIONNELLE

$$s(t) = K.e(t) \quad \Leftrightarrow \quad S(p) = K.E(p) \quad \Leftrightarrow \quad H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = K$$

$$|H(j\omega)| = K$$

$$G_{db} = 20.\log|H(j\omega)| = 20.\log K \quad (\text{Droite horizontale})$$

$$\varphi = \arg(H(j\omega)) = \arg(K) = 0^\circ \quad (\varphi = -180^\circ \text{ si } K \text{ est négatif}).$$



#### IV. SYSTEME DERIVATEUR PUR

$$s(t) = \frac{de(t)}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad S(p) = p.E(p) \quad \Leftrightarrow \quad H(p) = p$$

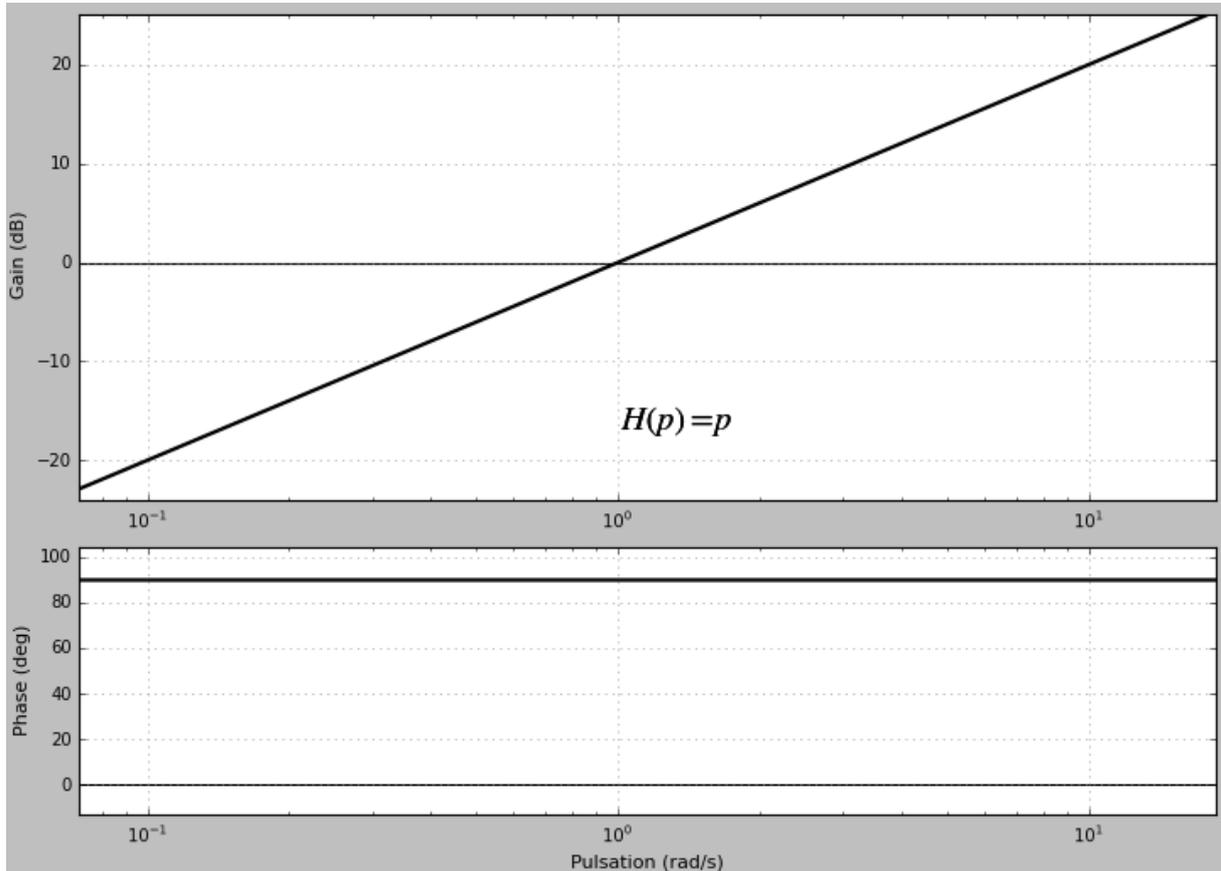
$$H(j\omega) = j\omega \quad \Leftrightarrow \quad |H(j\omega)| = \omega$$

$$G_{db} = 20 \cdot \log |H(j\omega)| = 20 \cdot \log \omega$$

(Droite de pente 20 db/décade passant par l'origine)

$$\varphi = \arg(H(j\omega)) = \arg(j\omega) = 90^\circ$$

(Imaginaire pur positif)



## V. SYSTEME INTEGRATEUR PUR

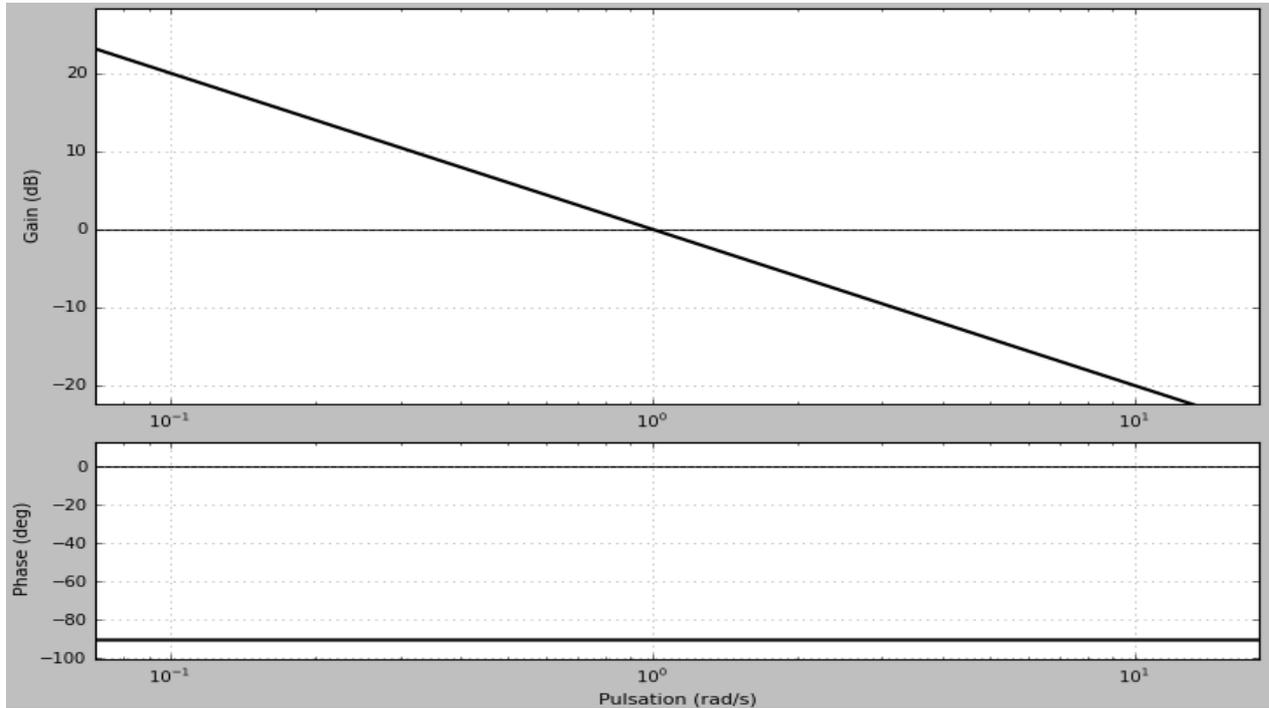
$$S(p) = \frac{E(p)}{p} \quad \Rightarrow \quad H(p) = \frac{1}{p} \quad \Rightarrow \quad H(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = -\frac{j}{\omega}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\omega}$$

$$G_{db} = 20 \cdot \log |H(j\omega)| = 20 \cdot \log \frac{1}{\omega} = -20 \cdot \log \omega$$

(Droite de pente -20 db/décade passant par l'origine)

$$\varphi = \arg(H(j\omega)) = \arg\left(-\frac{j}{\omega}\right) = -90^\circ \quad (\text{Imaginaire pur négatif})$$



## VI. SYSTEME DU PREMIER ORDRE

Fonction de transfert d'un système du premier ordre :  $H(p) = \frac{K}{1 + \tau \cdot p}$

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega\tau} \quad |H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$$

$$G_{db} = 20 \cdot \log |H(j\omega)| = 20 \cdot \log \frac{K}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} = 20 \cdot \log K - 10 \cdot \log(1 + (\omega\tau)^2)$$

$$\varphi = \arg(H(j\omega)) = \arg\left(\frac{K}{1 + j\omega\tau}\right) = -\arctan(\omega\tau) \quad (K > 0)$$

On distingue deux zones pour ces courbes :

Zone de basse fréquence :  $\omega \rightarrow 0$  alors  $\omega\tau \ll 1$

$$H(j\omega) \approx K$$

$$G_{db} \approx 20 \cdot \log K \quad (\text{Asymptote horizontale})$$

$$\varphi \approx 0^\circ \quad (\text{Asymptote horizontale})$$

Zone de haute fréquence :  $\omega \rightarrow \infty$  alors  $\omega\tau \gg 1$

$$H(j.\omega) \approx \frac{K}{j.\omega.\tau} = -\frac{j.K}{\omega.\tau}$$

$$|H(j.\omega)| \approx \frac{K}{\omega.\tau}$$

$$G_{db} \approx 20.\log \frac{K}{\tau} - 20.\log \omega \quad (\text{Asymptote de pente } -20 \text{ db/décade})$$

$$\varphi \approx -90^\circ \quad (\text{Asymptote horizontale})$$

Remarques :

- ✓ Les asymptotes de gain se coupent à :  $\omega = \frac{1}{\tau} = \omega_c$

(Appelée pulsation de cassure).

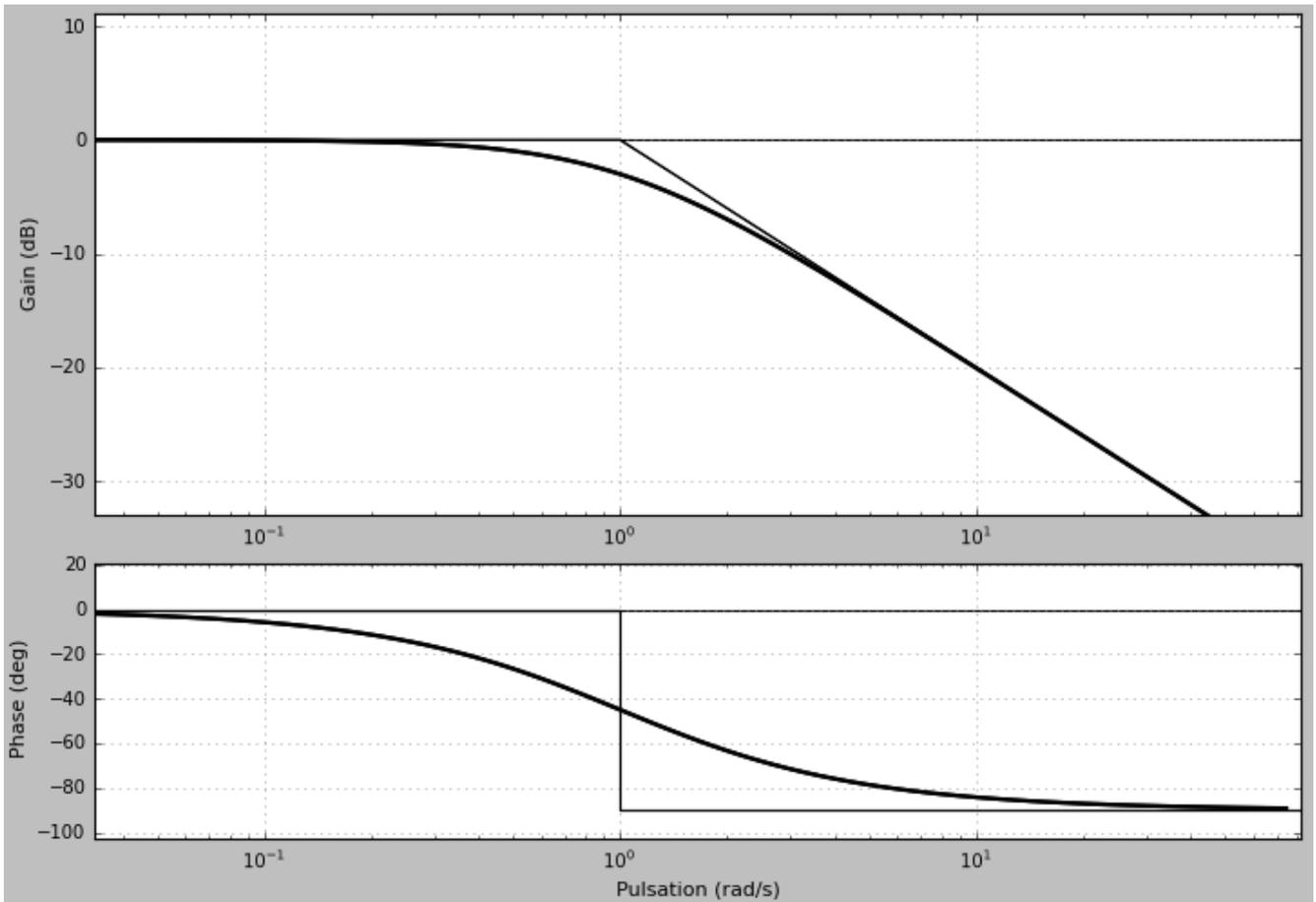
$$\text{Pour } \omega = \frac{1}{\tau} : H(j.\omega) = \frac{K}{1+j} = \frac{K.(1-j)}{2}$$

$$|H(j.\omega)| = \frac{K}{\sqrt{2}}$$

$$G_{db} = 20.\log K - 20.\log \sqrt{2} = 20.\log K - 3$$

$$\varphi = -45^\circ$$

- ✓ Un système du premier ordre se comporte comme un filtre passe bas avec une bande passante à  $-3_{dB}$  comprise entre 0 et  $\omega_c$ .
- ✓ Les valeurs réelles de gain et de phase sont utilisées pour avoir des valeurs particulières.



Identification :

Pour  $\omega$  proche de 0,  $G_{db} = 20 \cdot \log K \Rightarrow K$  peut être déterminé.

La pulsation de cassure  $\omega = \frac{1}{\tau} = \omega_c$  permet de déterminer  $\tau$ .

VII. SYSTEME DU SECOND ORDRE

La fonction de transfert d'un 2<sup>ème</sup> ordre :

$$H(p) = \frac{K}{\omega_n^2 p^2 + \frac{2z}{\omega_n} p + 1}$$

$$H(j\omega) = \frac{K}{-\frac{\omega^2}{\omega_n^2} + \frac{2z}{\omega_n} \cdot j\omega + 1} = \frac{K}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + \frac{2z \cdot \omega}{\omega_n} \cdot j}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(\frac{2.z.\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

$$G_{db} = 20.\log K - 10.\log\left(\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(\frac{2.z.\omega}{\omega_n}\right)^2\right)$$

$$\varphi = -\arctan\left(\frac{\frac{2.z.\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}\right) = -\arctan\left(\frac{2.z.\omega.\omega_n}{\omega_n^2 - \omega^2}\right) \quad (\text{si } K > 0)$$

On distingue 3 zones pour ces courbes :

Zone de basse fréquence :  $\omega \rightarrow 0$  alors  $\omega \ll \omega_n$

$$H(j\omega) \approx K$$

$$G_{db} \approx 20.\log K \quad (\text{Asymptote horizontale})$$

$$\varphi \approx 0^\circ \quad (\text{Asymptote horizontale})$$

Zone de haute fréquence :  $\omega \rightarrow \infty$  alors  $\omega \gg \omega_n$

$$H(j\omega) \approx \frac{K}{\omega^2} = -\frac{K.\omega_n^2}{\omega^2}$$

$$|H(j\omega)| \approx \frac{K.\omega_n^2}{\omega^2}$$

$$G_{db} \approx 20.\log K + 40.\log \omega_n - 40.\log \omega$$

(Asymptote de pente -40 db/décade)

$$\varphi \approx -180^\circ \quad (\text{Asymptote horizontale})$$

Zone de moyenne fréquence :  $\omega \approx \omega_n$

Pour la courbe de gain, on remarque que les asymptotes se coupent à  $\omega = \omega_n$

Valeur particulière pour  $\omega = \omega_n$  :  $H(j\omega_n) = \frac{K}{2.z.j}$

$$|H(j\omega_n)| = \frac{K}{2.z} \quad G_{db} = 20.\log\left(\frac{K}{2.z}\right) \quad \text{et} \quad \varphi = -90^\circ$$

Résonance : Pour certaine valeur de z, la courbe de gain peut présenter un maximum.

On reprend :

$$|H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(\frac{2.z.\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

On cherche les valeurs de  $\omega$  qui annulent  $\frac{d(|H(j\omega)|)}{d\omega}$ .

Dans le cas  $z < \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,7$ ,  $\omega = \omega_r = \omega_n \cdot \sqrt{1 - 2.z^2}$  annule  $\frac{d(|H(j\omega)|)}{d\omega}$ .

La pulsation  $\omega_r$  est appelée pulsation de résonance (existe si  $z < \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,7$ ).

Amplitude de résonance :  $|H(j\omega_r)| = \frac{K}{2.z\sqrt{1-z^2}}$

$$G_{db} = 20.\log\left(\frac{K}{2.z\sqrt{1-z^2}}\right)$$

Bilan : on distingue 2 cas

1<sup>er</sup> cas :  $0 < z < 1$

✓  $z < \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,7$

La courbe est toujours au-dessus des asymptotes

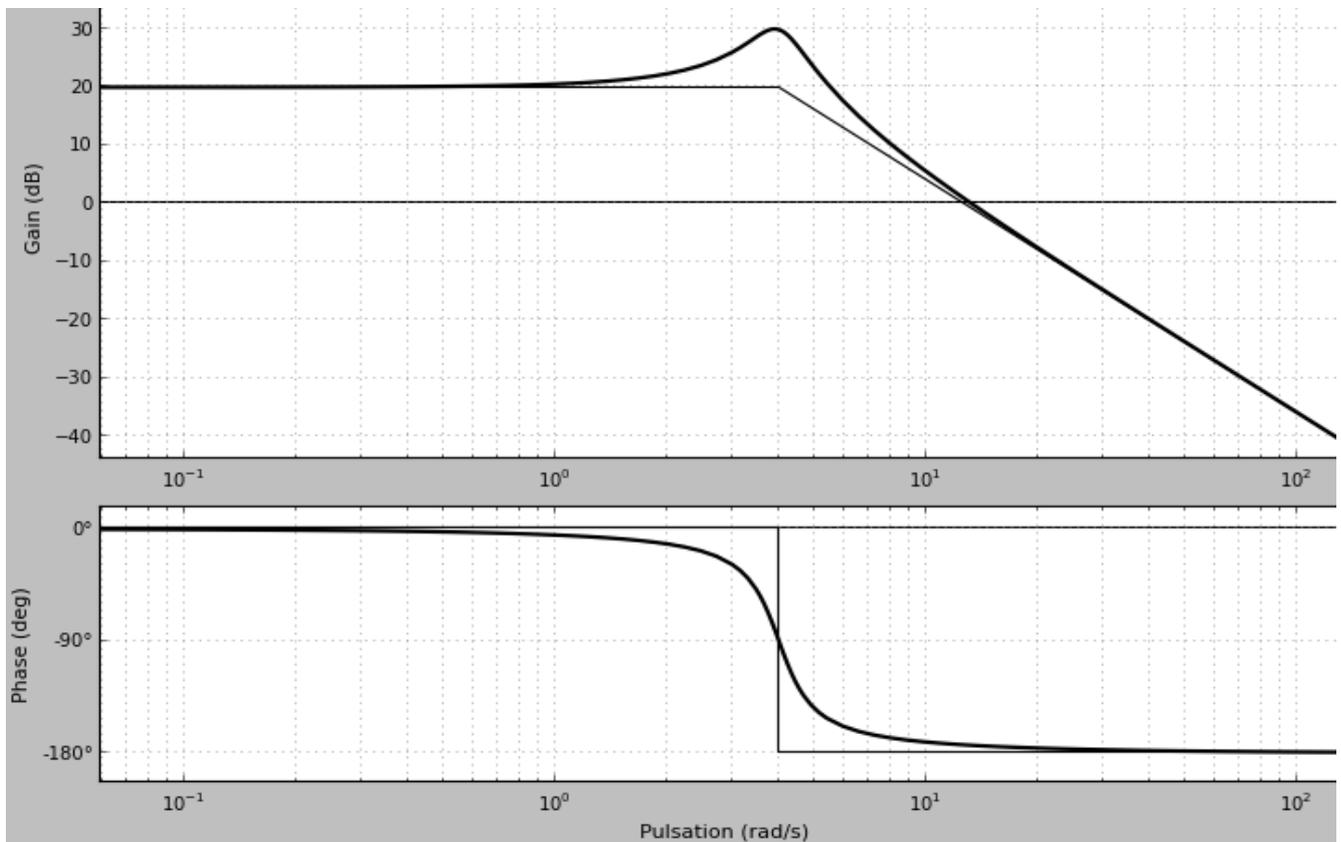
Le système présente une résonance :

$$\omega = \omega_r = \omega_n \cdot \sqrt{1 - 2 \cdot z^2} \quad G_{db} = 20 \cdot \log \left( \frac{K}{2 \cdot z \sqrt{1 - z^2}} \right)$$

✓  $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq z < 1$  La courbe est toujours au-dessous des asymptotes.

Pour  $\omega = \omega_n \quad G_{db} = 20 \cdot \log \left( \frac{K}{2 \cdot z} \right)$

Tracé du diagramme de Bode d'un système du deuxième ordre avec  $z < 0,7$

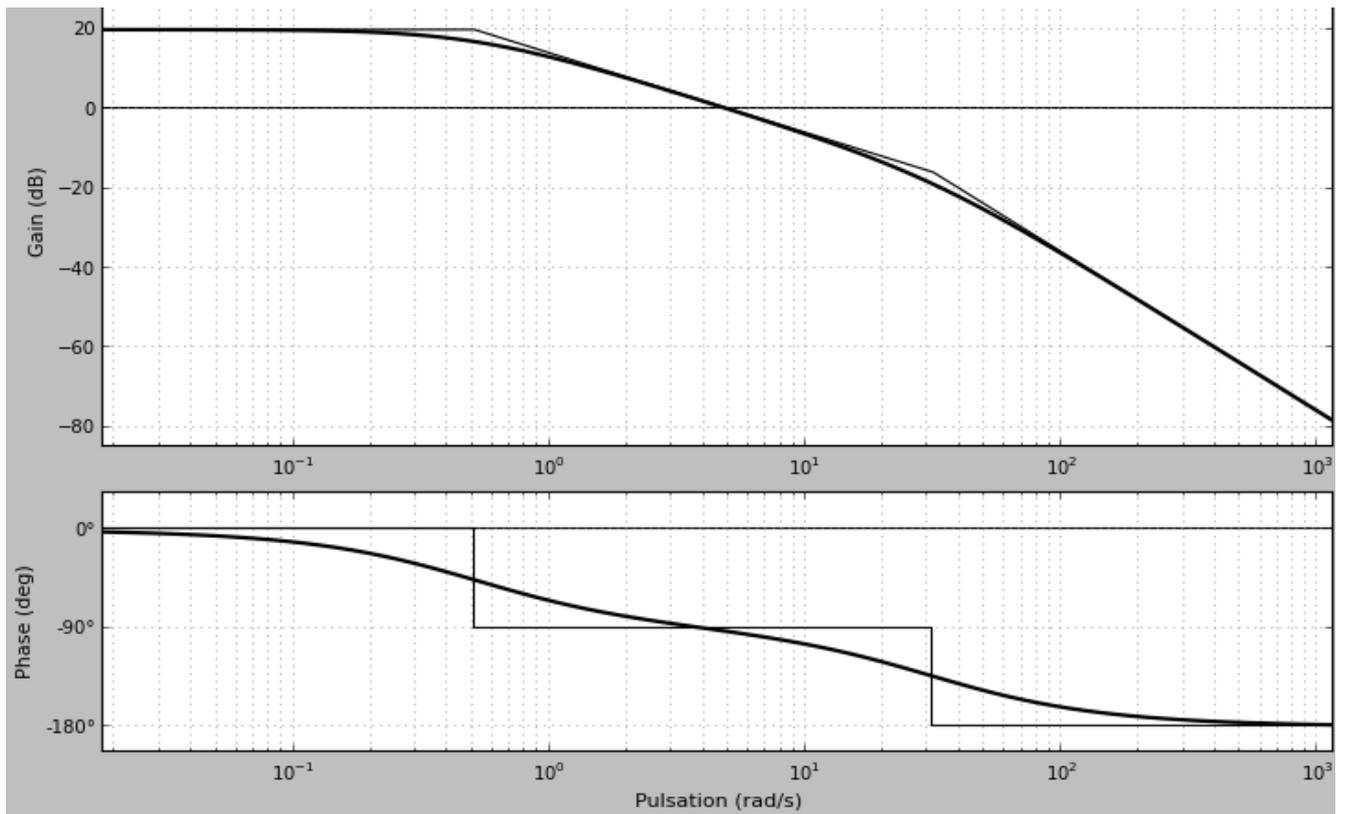


2<sup>ème</sup> cas :  $z \geq 1$

La fonction de transfert est le produit de deux fonctions de transfert du premier ordre :

$$H(p) = K \cdot H_1(p) \cdot H_2(p) \quad \Leftrightarrow \quad H(p) = K \cdot \frac{1}{1 + \tau_1 \cdot p} \cdot \frac{1}{1 + \tau_2 \cdot p}$$

Il est donc possible d'appliquer la règle de superposition pour obtenir  $H(p)$ .

Tracé du diagramme de Bode d'un système du deuxième ordre avec  $z > 1$ 

Remarque : Pour tracer un diagramme de Bode, on utilise très largement les résultats du cours sans les redémontrer

## Exercices

1. Tracer le diagramme de Bode de  $H(p) = \frac{4}{p \cdot (1 + 0,2 \cdot p)}$

2. Tracer le diagramme de Bode de  $H(p) = 8 \cdot \frac{(1 + 0,9 \cdot p)}{(1 + 0,1 \cdot p)}$ .

Déterminer l'extrémum de phase.

3. Tracer le diagramme de Bode de  $H(p) = \frac{25}{p \cdot (1 + \frac{p}{4} + \frac{p^2}{4})}$

## Exercice 1 Corrigé

$$H(p) = \frac{4}{p \cdot (1 + 0,2 \cdot p)}$$

Premier ordre avec un intégrateur.

On ne refait pas l'étude complète, on utilise les résultats du cours.

Cassure pour  $\omega = \frac{1}{0,2} = 5$ .

Avant la cassure :  $G_{db}$  pente  $-20$  db/décade,  $\varphi = -90^\circ$

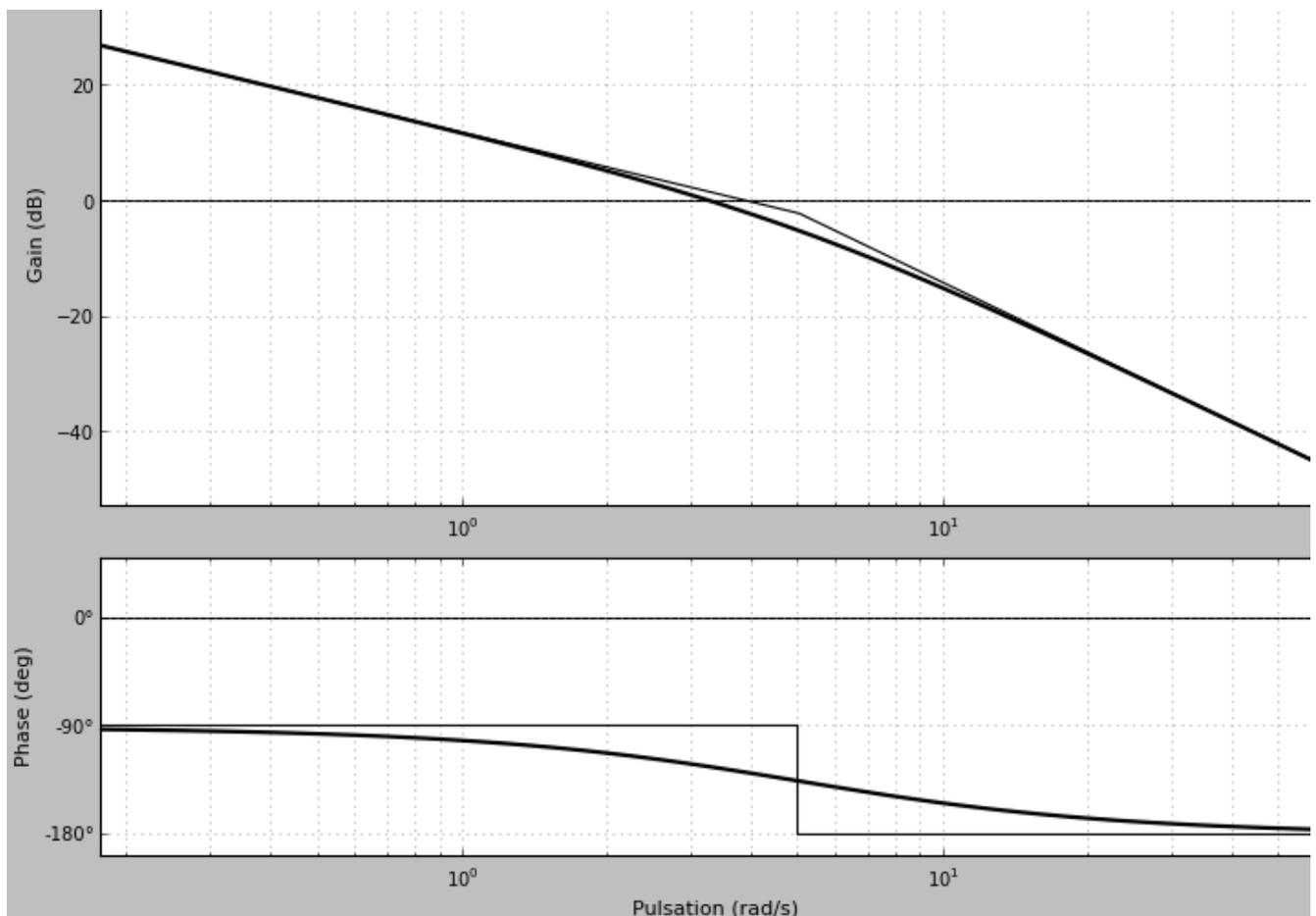
Après la cassure :  $G_{db}$  pente  $-40$  db/décade,  $\varphi = -180^\circ$

Il faut placer les asymptotes de Gain

Recherche de la première asymptote :  $\omega \rightarrow 0 \Rightarrow H(j\omega) = \frac{4}{j\omega \cdot (1 + 0,2 \cdot j\omega)} = \frac{4}{j\omega}$

$$G_{db} = 20 \cdot \log |H(j\omega)| = 20 \cdot \log \left( \frac{4}{\omega} \right) = 20 \cdot \log 4 - 20 \cdot \log \omega$$

Pour  $\omega = 4$ ,  $G_{db} = 0$



Remarques :

- ✓ Pour avoir des valeurs de phase :  $\varphi = -90 - \arctan(0,2 * \omega)$
- ✓ Au niveau de la cassure, le diagramme réel de gain passe 3 db en dessous de l'asymptote.
- ✓ Equation première asymptote :  $H(p) = \frac{4}{p} \Rightarrow G_{db} = 20 \cdot \log\left(\frac{4}{\omega}\right)$
- ✓ Equation deuxième asymptote :  $H(p) = \frac{4}{0,2 \cdot p^2} \Rightarrow G_{db} = 20 \cdot \log\left(\frac{20}{\omega^2}\right)$

Exercice 2 
$$H(p) = 8 \cdot \frac{(1 + 0,9 \cdot p)}{(1 + 0,1 \cdot p)}$$

Etude de  $N(p) = 8 \cdot (1 + 0,9 \cdot p) = N(j\omega) = 8 \cdot (1 + j \cdot 0,9 \cdot \omega) = 8 \cdot (1 + j \cdot \frac{\omega}{1,11})$

C'est la même chose qu'un système du premier ordre avec  $(1 + \tau \cdot p)$  au numérateur.

Seules différences :

- ✓ Pour  $\omega \rightarrow \infty$  :  $G_{db}$  a une pente de +20 db/décade et  $\varphi \approx +90^\circ$ .
- ✓ Pour la cassure  $\omega_c = \omega = \frac{1}{0,9} = 1,11$ , le diagramme réel de gain passe à 3 db au dessus de l'asymptote, et la phase  $\varphi = 45^\circ$ .

Etude de : 
$$H(p) = 8 \cdot \frac{(1 + 0,9 \cdot p)}{(1 + 0,1 \cdot p)}$$

Pulsations de cassure :  $\omega = \frac{1}{0,9} = 1,11$  et  $\omega = \frac{1}{0,1} = 10$

Avant la première cassure :  $\omega = \frac{1}{\tau_1} = \frac{1}{0,9} = 1,11$

Asymptotes :  $G_{db} \approx 20 \cdot \log K = 20 \cdot \log 8 = 18 \text{ db}$   
 $\varphi \approx 0^\circ$

Entre les 2 cassures :

$$\text{Asymptotes : } G_{db} \text{ pente } 20 \text{ db/décade}$$

$$\varphi \approx +90^\circ$$

Après la deuxième cassure :

$$\text{Asymptotes : } G_{db} \approx 20 \cdot \log \left( K \frac{\tau_1}{\tau_2} \right) = 37,15 \text{ db}$$

$$\varphi \approx 0^\circ$$

Pour le gain, le diagramme réel est proche du diagramme asymptotique, on retrouve une différence de 3 dB (+ ou -) au niveau des cassures.

Pour la phase, le diagramme réel comporte un maximum.  
Recherche de l'extremum de la phase :

$$H(j.\omega) = K \cdot \frac{(1 + j.\omega.\tau_1)}{(1 + j.\omega.\tau_2)} \quad \varphi = \arctan(\omega.\tau_1) - \arctan(\omega.\tau_2)$$

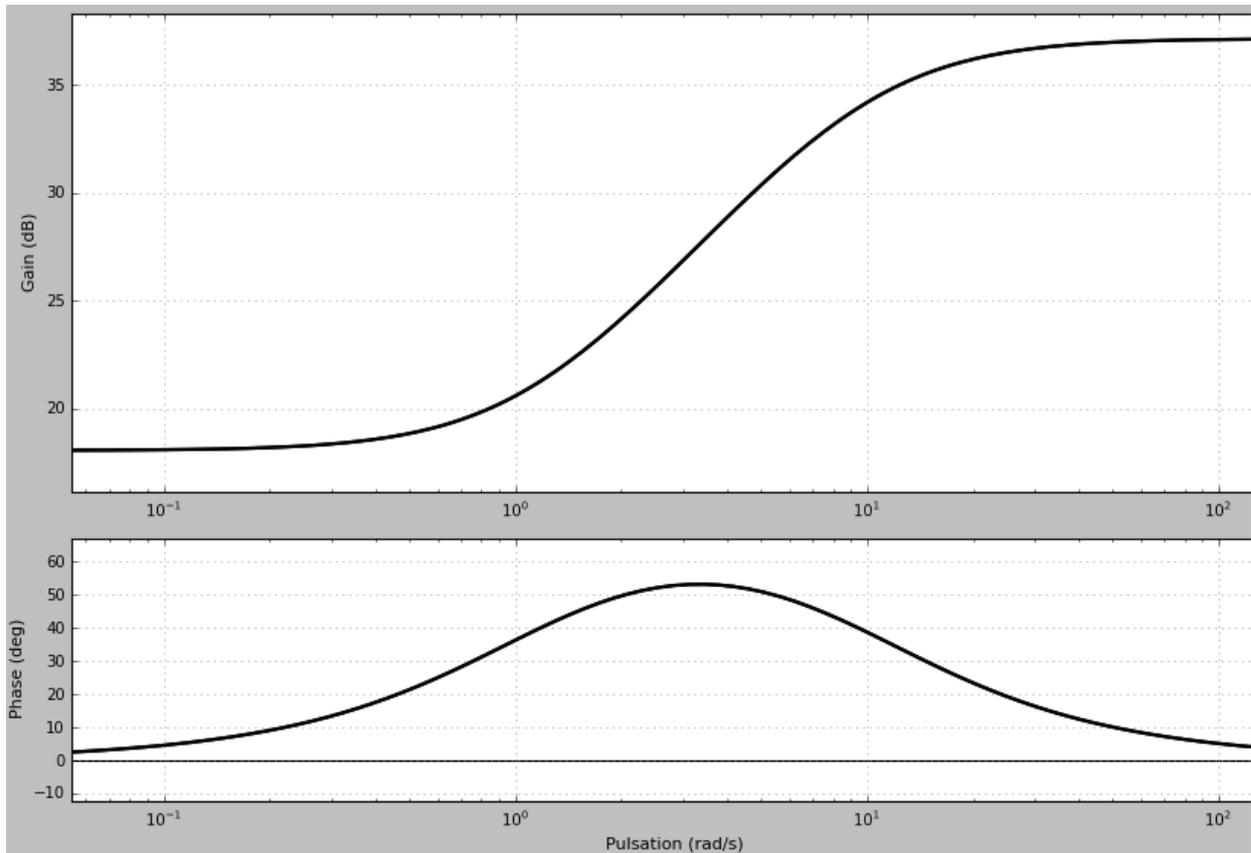
$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\tau_1}{1 + (\omega.\tau_1)^2} - \frac{\tau_2}{1 + (\omega.\tau_2)^2} = \frac{\tau_1 \cdot (1 + (\omega.\tau_2)^2) - \tau_2 \cdot (1 + (\omega.\tau_1)^2)}{(1 + (\omega.\tau_1)^2) \cdot (1 + (\omega.\tau_2)^2)}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau_1 + \tau_1 \cdot (\omega.\tau_2)^2 - \tau_2 - \tau_2 \cdot (\omega.\tau_1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \dots \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{\tau_1 \cdot \tau_2}} \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{0,1 \cdot 0,9}} = 3,333 \quad \Rightarrow \quad \varphi = 53^\circ$$

Tracé de  $H(p) = K \cdot \frac{(1 + \tau_1 \cdot p)}{(1 + \tau_2 \cdot p)}$  :

Remarque : pour avoir des valeurs de phase :  $\varphi = \arctan(\omega.\tau_1) - \arctan(\omega.\tau_2)$



## EXERCICE 2

$$H(p) = \frac{25}{p \cdot \left(1 + \frac{p}{4} + \frac{p^2}{4}\right)}$$

Etude du second ordre seul :

$$F(p) = \frac{K}{\frac{p^2}{4} + \frac{1}{4} \cdot p + 1} = \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2 \cdot z}{\omega_n} \cdot p + 1}$$

$$K = 25$$

$$\omega_n = 2$$

$$z = \frac{1}{4}$$

*On ne refait pas l'étude, on utilise les résultats du cours*

$$z < \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \text{Résonance}$$

$$\omega_r : \text{Pulsation de résonance} \quad \omega_r = \omega_n \cdot \sqrt{1 - 2 \cdot z^2} = \sqrt{\frac{7}{2}} = 1,87 \text{ rad/s}$$

L'amplitude de résonance est :

$$|H(j\omega_r)| = \frac{K}{2.z\sqrt{1-z^2}} = \frac{200}{\sqrt{15}}$$

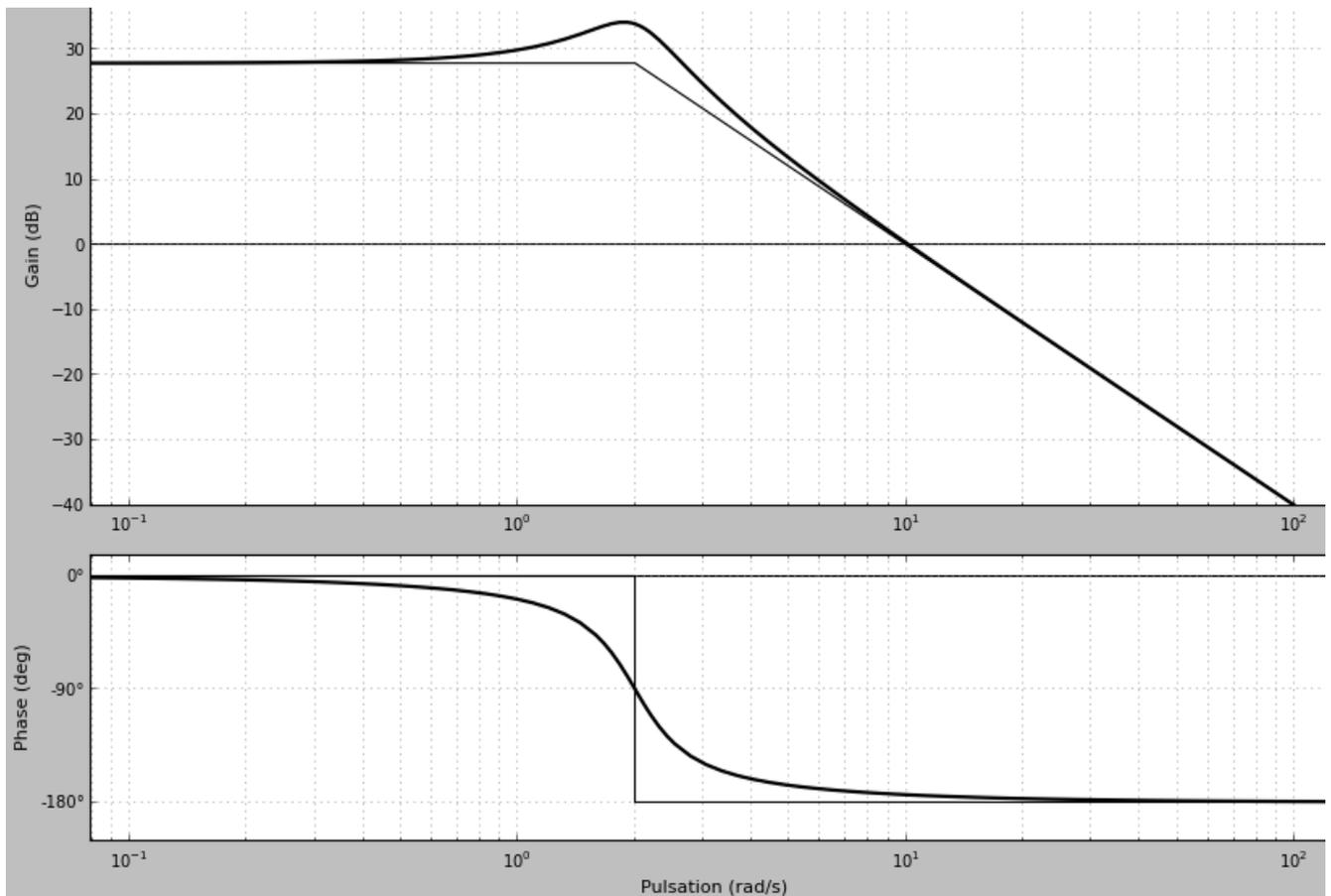
$$G_{db} = 20.\log\left(\frac{200}{\sqrt{15}}\right) = 34,26 \text{ db}$$

$$\omega \rightarrow 0 \quad G_{db} \approx 20.\log K = 27,95 \text{ db} \quad \varphi \approx 0^\circ$$

$$\omega \rightarrow \infty \quad G_{db} \text{ pente de } -40 \text{ db/décade} \quad \varphi \approx -180^\circ$$

$$\omega = \omega_n = 2 \quad \text{Les asymptotes se coupent} \quad \varphi = -90^\circ$$

Tracé du second ordre seul



Tracé de 
$$H(p) = \frac{25}{p.(1 + 0,5.p + 0,25.p^2)}$$

On ajoute l'intégrateur :

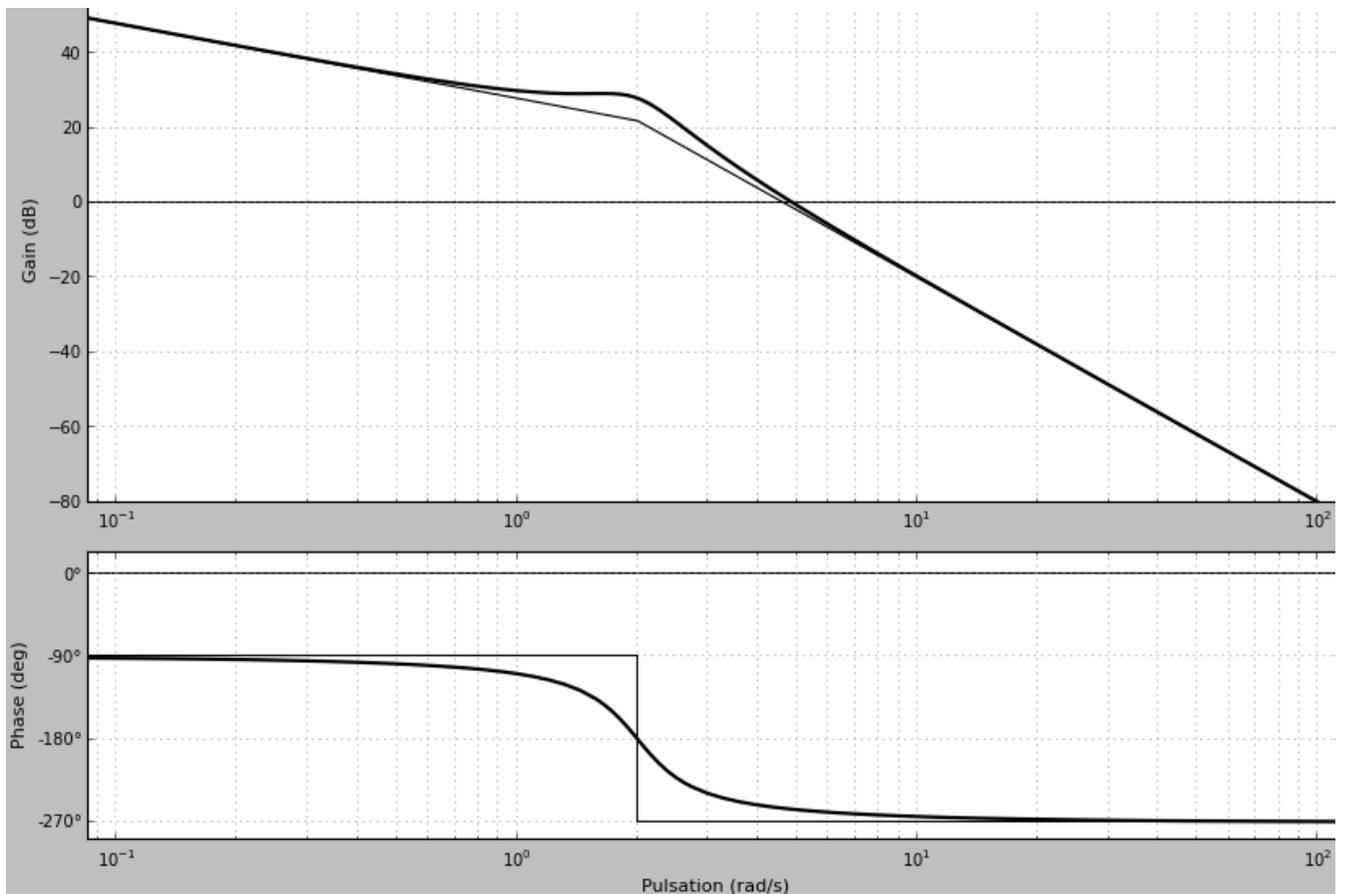
- ✓ On enlève  $90^\circ$  à la phase.
- ✓ On rajoute une pente de  $-20$  db/décade au gain.

Il faut placer les asymptotes de Gain

Recherche de la première asymptote :  $\omega \rightarrow 0 \Rightarrow H(j\omega) = \frac{25}{j\omega}$

$$G_{db} = 20 \cdot \log |H(j\omega)| = 20 \cdot \log \left( \frac{25}{\omega} \right) = 20 \cdot \log 25 - 20 \cdot \log \omega$$

Pour  $\omega = 1$ ,  $G_{db} = 20 \cdot \log 25 = 27,95$



Remarques :

- ✓ On place une petite bosse pour la résonance...

✓ Pour avoir des valeurs de phase :  $\varphi = -90 - \arctan \left( \frac{2 \cdot z \cdot \omega \cdot \omega_n}{\omega_n^2 - \omega^2} \right)$