ETUDE DES (SLCI)
LES SYSTEMES FONDAMENTAUX

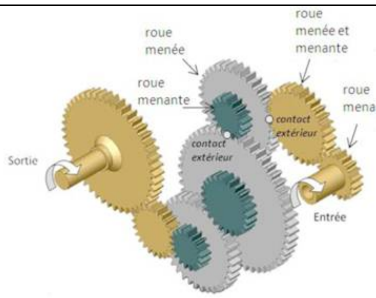
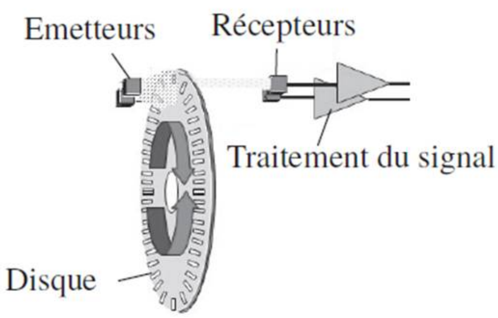
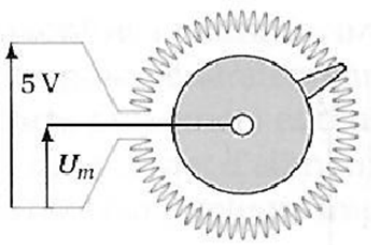
e(t) —— [SLCI] —— s(t)   E(p) —— [H(p)] —— S(p)

I. SYSTEME A ACTION PROPORTIONNELLE.

$s(t) = k.e(t)$ ⇨ On applique la Transformée de Laplace ⇨ $S(p) = k.E(p)$

La fonction de transfert est : $H(p) = \dfrac{S(p)}{E(p)} = k$ *Attention aux unités*

Exemples :

Réducteur		
Roue-crémaillère		
Codeur optique		
Potentiomètre de position		

II. INTEGRATEUR.

Exemple :

Vitesse angulaire → Intégrateur → Position angulaire

Equation : $\omega(t)=\dfrac{d\theta(t)}{dt}$

On applique la TL ⇨ $\Omega(p) = p.\theta(p)$

On en déduit la fonction de transfert : $H(p)=\dfrac{S(p)}{E(p)}=\dfrac{\theta(p)}{\Omega(p)}=\dfrac{1}{p}$

Remarques :

- ✓ On trouve souvent un intégrateur dans un asservissement en position, pour passer de la vitesse à la position.
- ✓ Résultat à utiliser directement.
- ✓ On aussi le dérivateur.

III. SYSTEME DU PREMIER ORDRE.

Forme canonique de la fonction de transfert d'un système du premier ordre :

$$H(p)=\frac{K}{1+\tau.p}$$

Paramètres caractéristiques :

K : Gain statique (caractérise le comportement statique, le régime permanent).

τ : Constante de temps (caractérise le comportement dynamique, le régime transitoire).

Remarques :

1. La forme canonique d'une fonction de transfert consiste à imposer une constante unitaire aux polygones. Elle fait apparaitre le gain statique.
2. Les coefficients ou paramètres caractéristiques permettent de caractériser les performances.
3. Avec une entrée échelon unitaire, si le système est stable, on a : $s(\infty)=K$.

1. Réponse indicielle (à un échelon)

$e(t) = a.u(t)$ ⇨ $E(p) = \dfrac{a}{p}$

$$S(p) = H(p).E(p) = \frac{a.K}{p.(1+\tau.p)}$$

On décompose en éléments simples : $S(p) = \dfrac{b}{p} + \dfrac{c}{1+\tau.p}$

Pour trouver b et c, on met au même dénominateur et on identifie les numérateurs :

$$S(p) = \frac{b.(1+\tau.p)+c.p}{p.(1+\tau.p)} = \frac{b+(b.\tau+c).p}{p.(1+\tau.p)}$$

On trouve $b = a.K$ et $c = -a.K.\tau$

$$S(p) = \frac{a.K}{p} - \frac{a.K.\tau}{1+\tau.p} = \frac{a.K}{p} - \frac{a.K}{\frac{1}{\tau}+p} = a.K.\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\frac{1}{\tau}+p}\right)$$

On repasse dans le domaine temporel : (tableau + théorème de l'amortissement)

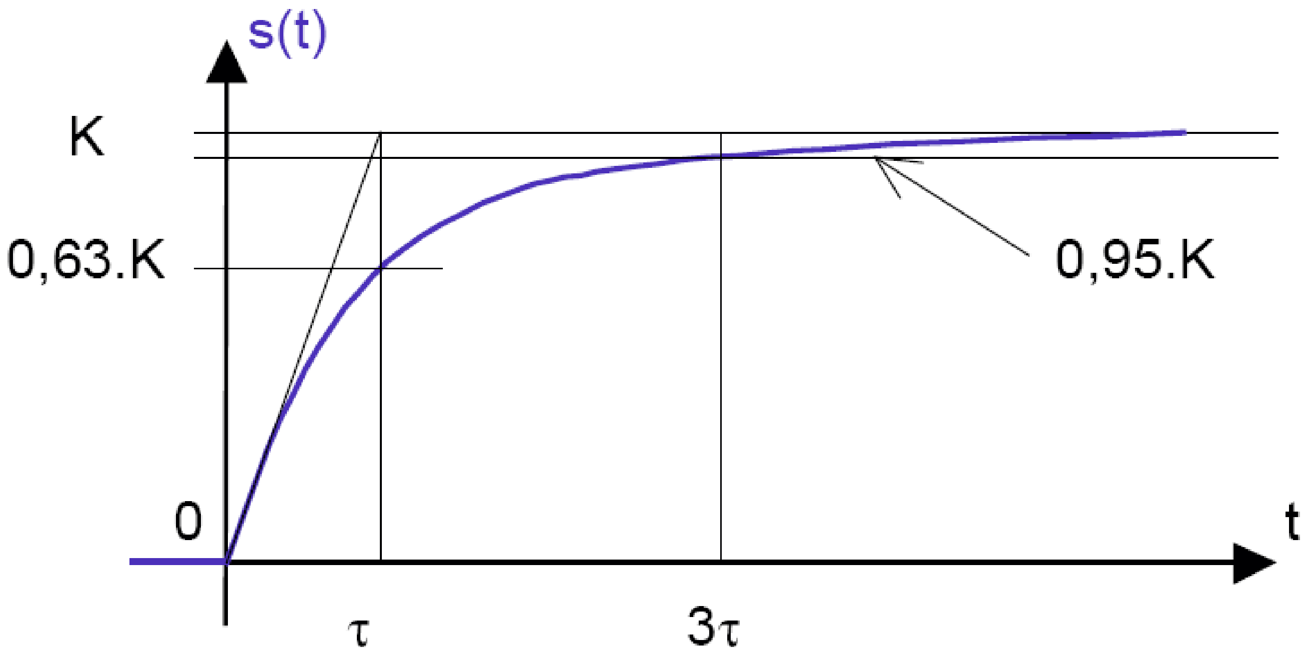
Domaine temporel	*Domaine de Laplace*	*Domaine temporel*	*Domaine de Laplace*
K	$\dfrac{K}{p}$	$K.e^{-a.t}$	$\dfrac{K}{p+a}$

$$s(t) = a.K.(1-e^{-t/\tau}).u(t)$$

✓ Etude de s(t) : $s(0) = 0$, $s(\infty) = a.K$,

$s'(t) = \dfrac{a.K}{\tau}.e^{-t/\tau}$, $s'(0) = \dfrac{a.K}{\tau}$ (Pente à t=0).

✓ Tracé de s(t) :



Remarque : Temps de réponse à 5% : $t_{5\%} = 3.\tau$

Important :

1. Il faut retenir les résultats de la réponse d'un système du premier ordre à un échelon :

- ✓ Forme de la courbe.
- ✓ Valeur de l'asymptote.
- ✓ Temps de réponse à 5%.
- ✓ Valeur de la tangente.

2. Si la fonction de transfert du système étudié est du premier ordre :

- ✓ On la met sous forme canonique.
- ✓ On détermine les paramètres caractéristiques.
- ✓ On utilise directement les résultats du cours.

2. Réponse à une rampe (rampe de pente a).

$$e(t) = a.t.u(t) \quad \Rightarrow \quad E(p) = \frac{a}{p^2}$$

$$S(p) = \frac{a.K}{p^2.(1+\tau.p)}$$

Pour alléger les calculs $S_1(p) = \dfrac{1}{p^2.(1+\tau.p)}$

$$S(p) = a.K.S_1(p)$$

On décompose en éléments simples : $S_1(p) = \dfrac{b}{p} + \dfrac{c}{p^2} + \dfrac{d}{1+\tau.p}$

Pour trouver b, c et d, on met au même dénominateur et on identifie les numérateurs :

$$S_1(p) = \frac{b.p.(1+\tau.p) + c.(1+\tau.p) + d.p^2}{p^2.(1+\tau.p)}$$

$$S_1(p) = \frac{c + (b + c.\tau).p + (b.\tau + d).p^2}{p.(1+\tau.p)}$$

On trouve $c = 1$ $b = -\tau$ $d = \tau^2$

$$S_1(p) = -\frac{\tau}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{\tau^2}{1+\tau.p} = -\frac{\tau}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{\tau}{\frac{1}{\tau} + p}$$

On repasse dans le domaine temporel :

$$s_1(t) = (t - \tau + \tau.e^{-t/\tau}).u(t)$$

$$s(t) = a.K.(t - \tau + \tau.e^{-t/\tau}).u(t)$$

✓ Etude de s(t) : $s(0) = 0$, $s'(t) = a.K.(1 - e^{-t/\tau})$

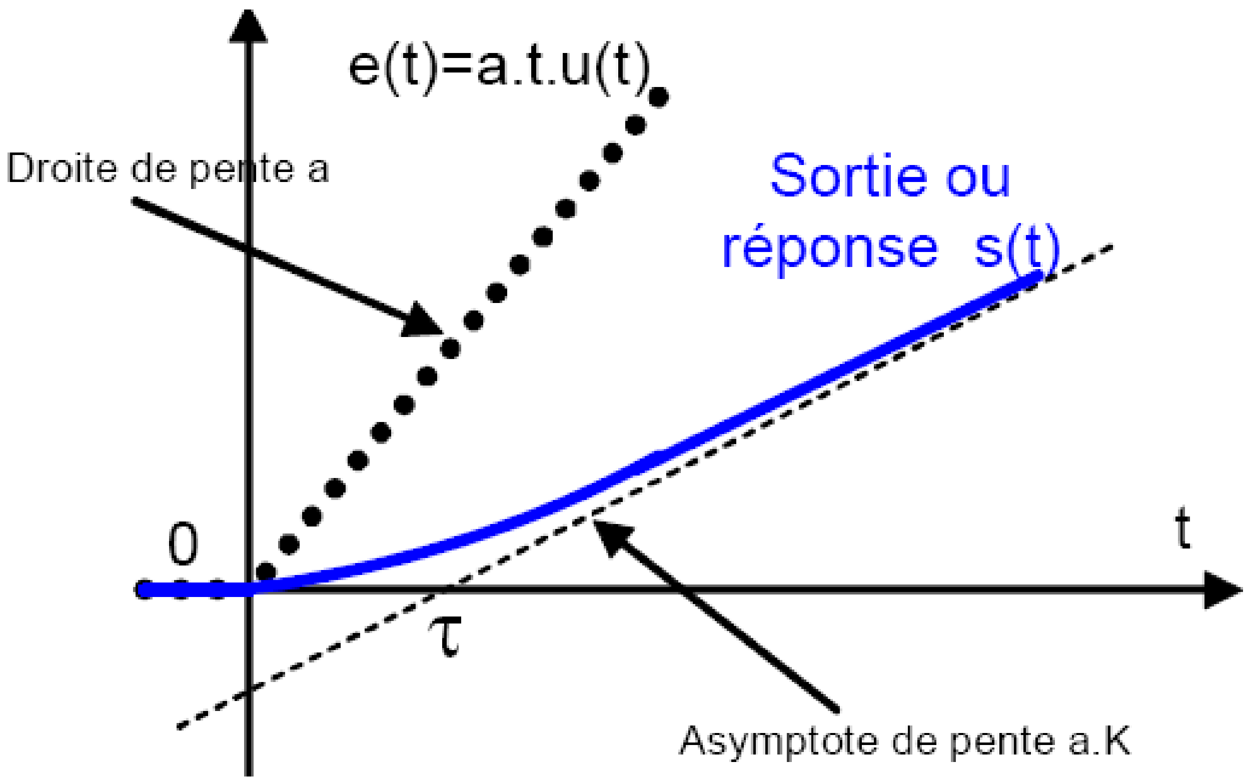
$s'(0) = 0$ Conclusion : pente nulle à t = 0.

Recherche d'une asymptote :

$$t \to \infty \qquad \tau.e^{-t/\tau} \to 0 \qquad s(t) \to a.K.(t-\tau)$$

Conclusion : la droite $y = a.K.(t-\tau)$ est une asymptote à l'infinie.

✓ Tracé de s(t)



4. Bilan.

Il faut savoir retrouver ces résultats. Il faut surtout savoir utiliser ces résultats.

IV. SYSTEME DU DEUXIEME ORDRE.

Forme canonique de la fonction de transfert d'un système du deuxième ordre :

$$H(p) = \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2.z}{\omega_n}.p + 1}$$

Paramètres caractéristiques :

K : Gain statique.

ω_n : Pulsation propre non amortie.

z : Coefficient d'amortissement.

Etude de la réponse à un échelon (réponse indicielle)

L'entrée est un échelon unitaire : $e(t) = u(t)$ ⇨ $E(p) = \dfrac{1}{p}$

$$S(p) = H(p) \times E(p) = \frac{K}{\left(\dfrac{p^2}{\omega_n{}^2} + \dfrac{2.z}{\omega_n}.p + 1\right).p}$$

$$S(p) = \frac{K.\omega_n^2}{p.(p^2 + 2.z.\omega_n.p + \omega_n^2)}$$

1. Valeurs initiale et finale.

Rappels : $\lim\limits_{t\to 0} s(t) = \lim\limits_{p\to\infty} p.S(p)$ $\lim\limits_{t\to\infty} s(t) = \lim\limits_{p\to 0} p.S(p)$

$$p.S(p) = \frac{K.\omega_n^2}{p^2 + 2.z.\omega_n.p + \omega_n^2}$$ $s(0+) = 0$ $s(\infty) = K$

$$\lim_{t\to 0} s'(t) = \lim_{p\to\infty} p.[p.S(p) - s(0+)] = \lim_{p\to\infty} p^2.S(p)$$

$$p^2.S(p) = \frac{p.K.\omega_n^2}{p^2 + 2.z.\omega_n.p + \omega_n^2}$$ $s'(0+) = 0$ (Pente à l'origine)

Tracé de $s(0+) = 0$, $s'(0+) = 0$ et $s(\infty) = K$

2. Détermination de s(t).

La forme de s(t) dépend des racines de l'équation caractéristique :

$$p^2 + 2.z.\omega_n.p + \omega_n^2 = 0$$

Deux cas possibles :

1. **Si les racines sont réelles**, on peut mettre l'équation caractéristique sous la forme $(p+a).(p+b)$, avec a et b réels.
   On décompose en éléments simples.
   On retourne dans le domaine temporel en utilisant la forme : $\dfrac{K}{p+a}$.

2. Si les racines sont imaginaires, on décompose en éléments simples sous la forme :
   $S(p) = \dfrac{a}{p} + \dfrac{b.p+c}{p^2 + 2.z.\omega_n.p + \omega_n^2}$. On retourne dans le domaine temporel en utilisant les formes : $\dfrac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$ et $\dfrac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$

Calcul du discriminant : $\Delta = 4.z^2.\omega_n^2 - 4.\omega_n^2 = 4.\omega_n^2.(z^2 - 1)$

- Premier cas : $\Delta > 0$, $z > 1$ (amortissement fort).

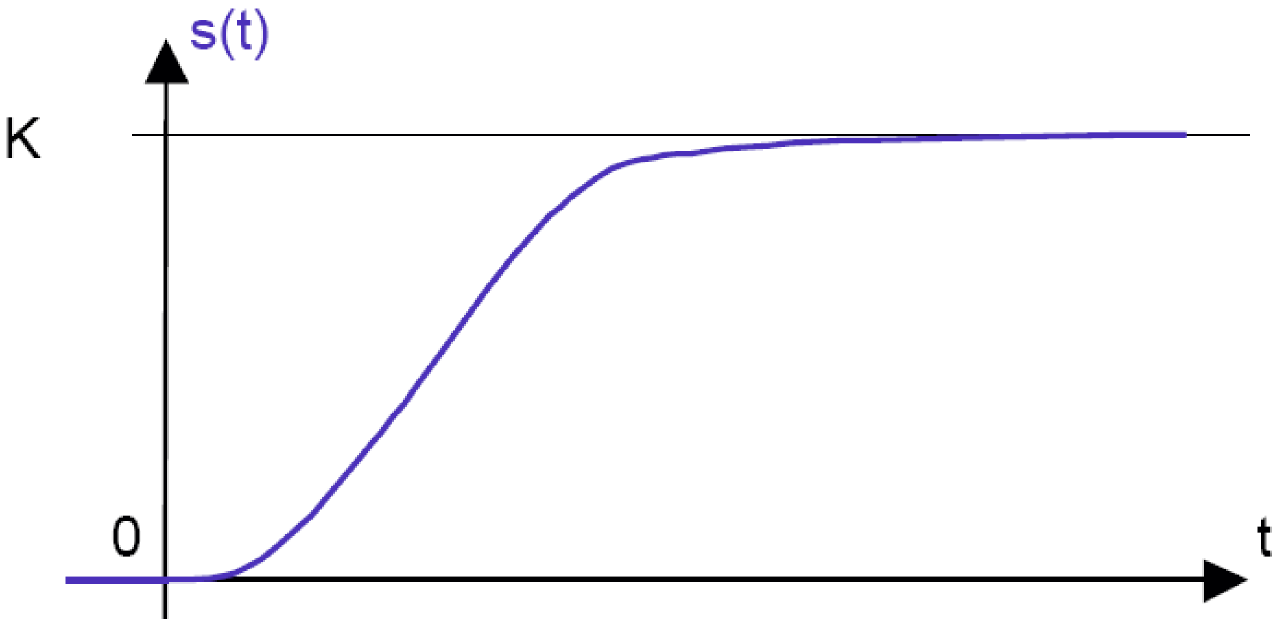
L'équation caractéristique admet 2 racines réelles.

Après étude, on trouve :

$$s(t) = K.\left(1+\frac{1}{2.\sqrt{z^2-1}}.\left(\frac{e^{-\omega_n.(z-\sqrt{z^2-1}).t}}{\omega_n.(z-\sqrt{z^2-1})}-\frac{e^{-\omega_n.(z+\sqrt{z^2-1}).t}}{\omega_n.(z+\sqrt{z^2-1})}\right)\right).u(t)$$

$s(t)$ est la superposition d'un échelon et de deux exponentielles $e^{-a.t} - e^{-b.t}$, avec $a > b > 0$, la courbe de présente pas de dépassement et converge vers K.

Tracé de s(t), avec z > 1



Remarques :

1. La réponse ne présente pas d'oscillations ni de dépassements.
2. On a un point d'inflexion.

- Deuxième cas : $\Delta = 0$; $z = 1$

L'équation caractéristique admet une racine réelle double : p_1.

Après étude, on trouve :

$$s(t) = K.(1-(1+\omega_n.t).e^{-\omega_n.t}).u(t)$$

Comme dans le cas amortissement fort, la réponse de présente pas de dépassement.

On est à la limite d'avoir du dépassement.

Pour $z = 1$, on a le temps de réponse le plus rapide sans dépassement.

Tracé de s(t), avec z = 1

- Troisième cas : $\Delta < 0$, $z < 1$.

L'équation caractéristique n'admet pas de racines réelles.

Après étude, on trouve :

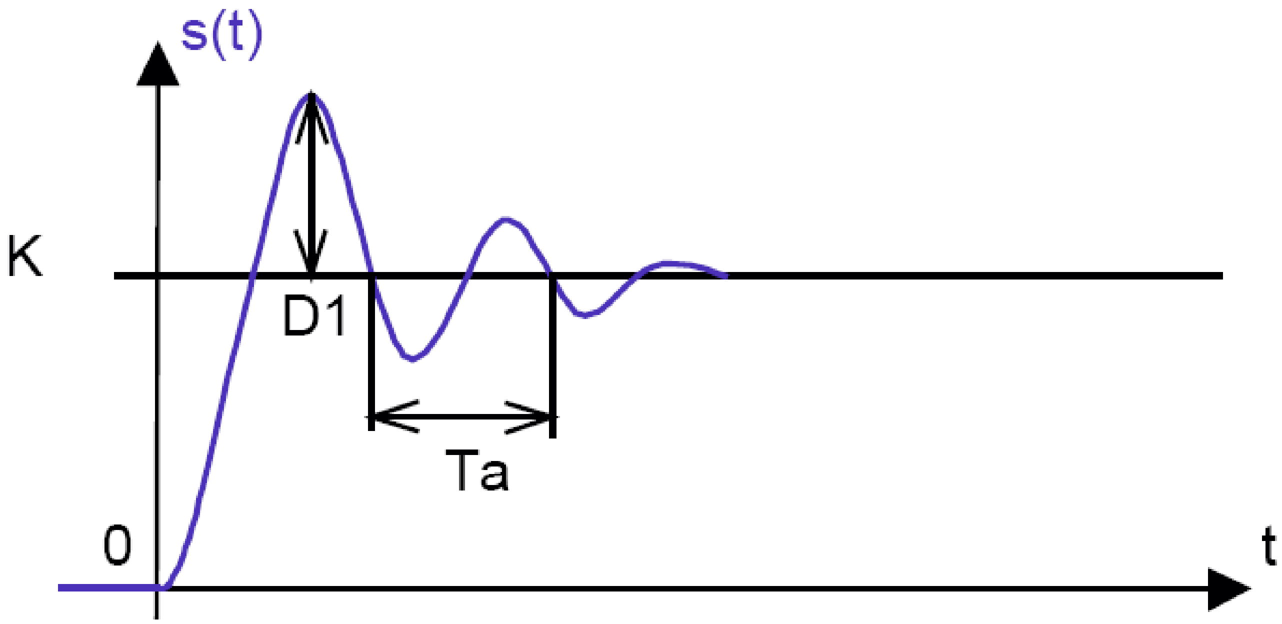
$$s(t) = K.\left(1 - e^{-\omega_n.t}.\cos(\omega_n.\sqrt{1-z^2}.t) - \frac{z.\omega_n}{\omega_n.\sqrt{1-z^2}} e^{-\omega_n.t}.\sin(\omega_n.\sqrt{1-z^2}.t)\right).u(t)$$

$s(t)$ est la superposition d'un échelon et d'une sinusoïdale amortie par une exponentielle.

La courbe converge vers K.

Contrairement aux cas précédents, la courbe est oscillante et présente des dépassements.

Tracé de s(t), avec z < 1



- ✓ La courbe présente des oscillations périodiques, on définit :

  $\omega_n.\sqrt{1-z^2}$: Pulsation propre du système.

  $Ta = \dfrac{2.\pi}{\omega_n.\sqrt{1-z^2}}$: Pseudo période des oscillations.

  Rappel : ω_n : Pulsation propre non amortie.

- ✓ La courbe présente des dépassements, pour le premier dépassement, on a :

  À , $t_1 = \dfrac{\pi}{\omega_n.\sqrt{1-z^2}}$ on a $$s(t_1) = K.[1+e^{\frac{-z.\pi}{\sqrt{1-z^2}}}]$$

  Soit D le dépassement : $$D = K.e^{\frac{-z.\pi}{\sqrt{1-z^2}}}$$

<u>Remarques :</u>

- ✓ D ne dépend que de z .
- ✓ En connaissant le premier dépassement, on peut déterminer ω_n (pulsation propre non amortie) et z (coefficient d'amortissement).
- ✓ Dépassement en pourcentage : $D = 100.\dfrac{s(t_1)-s(\infty)}{s(\infty)} = 100.e^{\frac{-z.\pi}{\sqrt{1-z^2}}}$

Tracé de s(t), avec z = 0,7

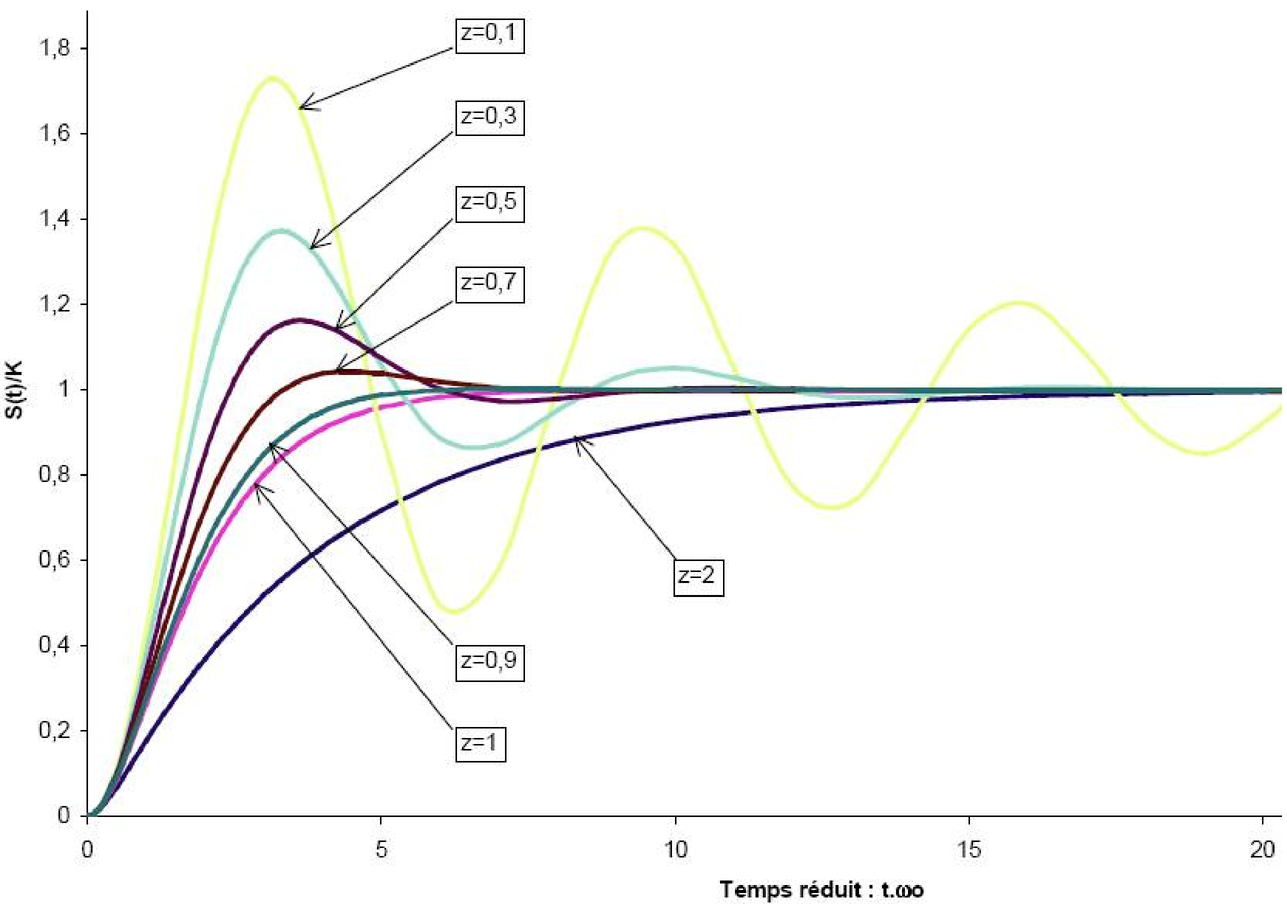
Remarques :

- ✓ Si $e(t) = a.u(t)$, alors le dépassement devient $D = a.K.e^{\frac{-z.\pi}{\sqrt{1-z^2}}}$.
- ✓ Pour $z = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}7$, on a $D = 0{,}05.K$ (voir tracé de s(t)), ce qui correspond au temps de réponse le plus rapide avec dépassement.

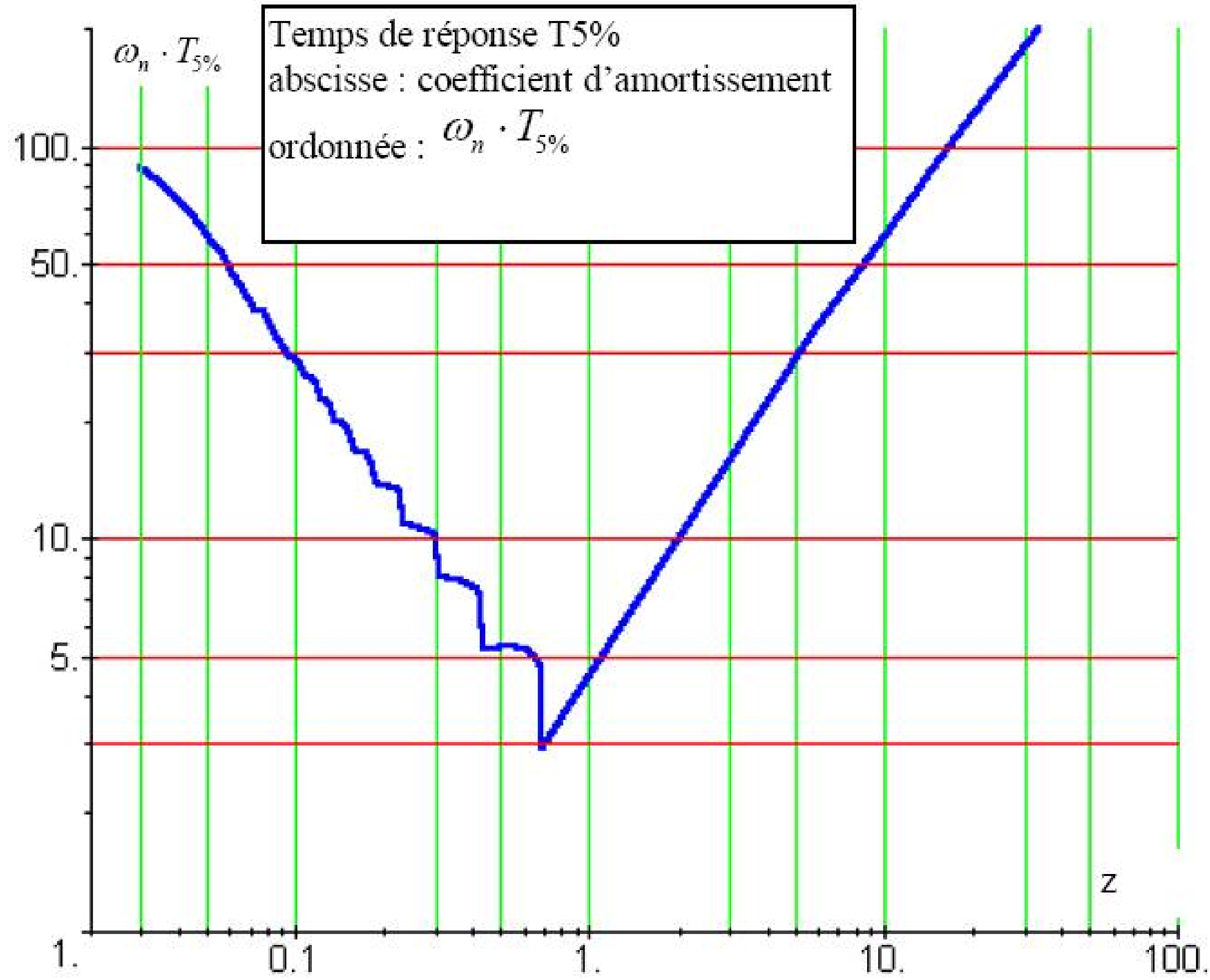
3. Conclusion.

$z \geq 1$	Pas d'oscillations, pas de dépassement. Pour $z = 1$, on a le temps de réponse le plus rapide sans dépassement
$z < 1$	Oscillations, dépassement. Pour $z = 0{,}7$, on a le temps de réponse le plus rapide avec dépassement

Courbes de $s(t)$ en fonction du coefficient d'amortissement z.



Temps de réponse à 5% ($t_{5\%}.\omega_n$) en fonction coefficient d'amortissement z .



4. Bilan.

Il faut savoir :

- ✓ Reconnaître la fonction de transfert d'un système du 2 ème ordre, le mettre sous forme canonique et identifier ses paramètres caractéristiques (K , ω_n , z).
- ✓ A partir du tracé de s(t), réponse d'un système du 2 ème ordre à un échelon, déterminer K , reconnaître si z est supérieur ou inférieur à 1 et dans le cas $z < 1$, déterminer ω_n et z .

V. IDENTIFICATION.

Connaître le comportement d'un système revient à déterminer sa fonction de transfert.
Deux voies sont possibles :

- ✓ Rechercher les équations physiques reliant l'entrée et la sortie. On fait des hypothèses simplificatrices, le modèle est donc approché. Le système n'existe pas forcément, on est en phase de conception.
- ✓ Identifier la réponse à une sollicitation. Le système existe, on est en phase de réglage.

On distingue donc le modèle de connaissance et le modèle de comportement.

Identification d'un système du premier ordre.

En réponse à un échelon ou à une rampe, il faut reconnaître le type de la réponse, puis identifier les paramètres caractéristiques K et τ .

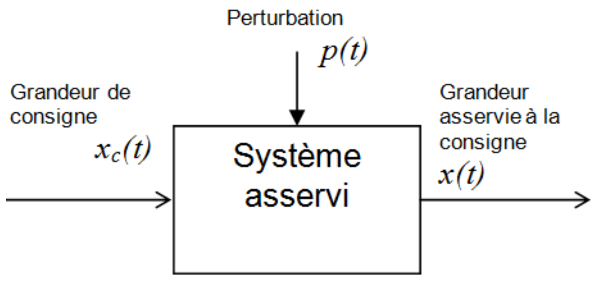
Identification d'un système du deuxième ordre.

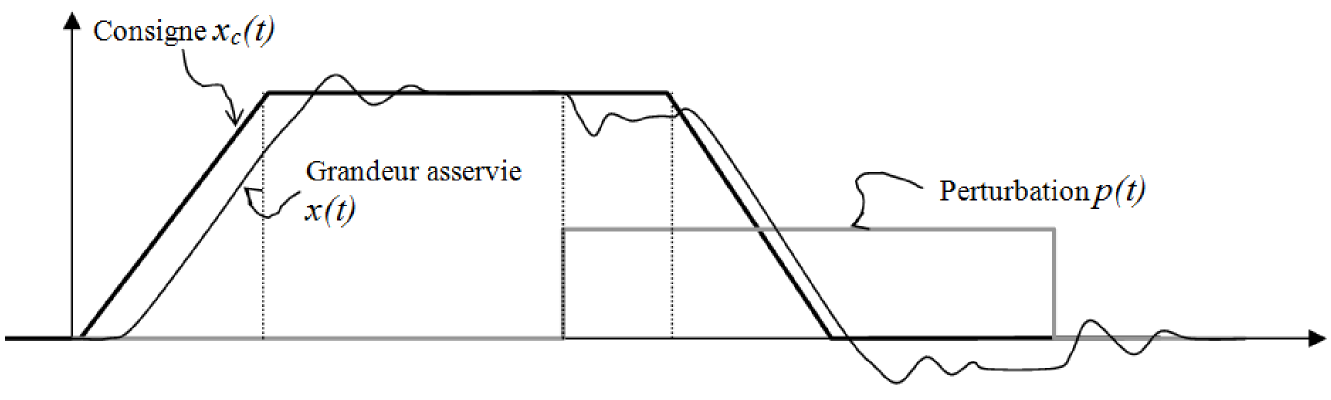
En réponse à un échelon, il faut reconnaître le type de la réponse , reconnaître si z est supérieur ou inférieur à 1, puis dans le cas z inférieur à z , identifier les paramètres caractéristiques K , z et ω_n .

VI. FORME CANONIQUE D'UN SYSTEME QUELCONQUE.

Objet d'un asservissement :

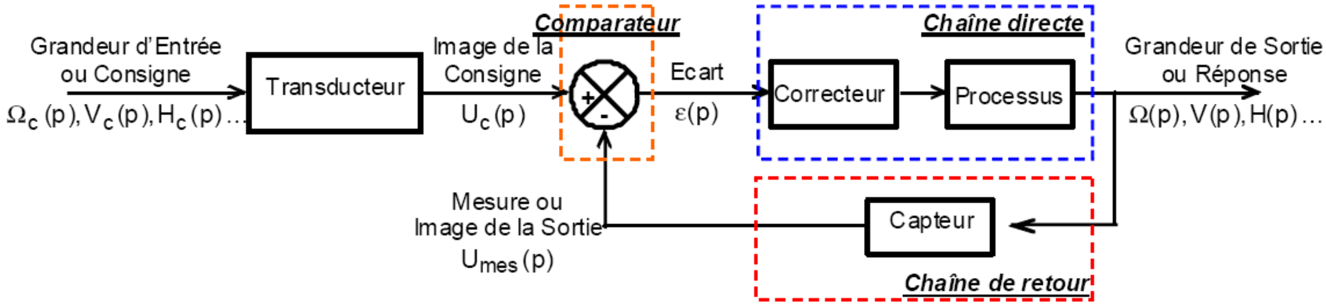
La grandeur asservie x(t) doit suivre au mieux la grandeur de consigne $x_c(t)$ et ce malgré la présence de perturbations (non maîtrisables).
Exemples de grandeur asservie : position, vitesse, température, pression, débit, effort, cap…





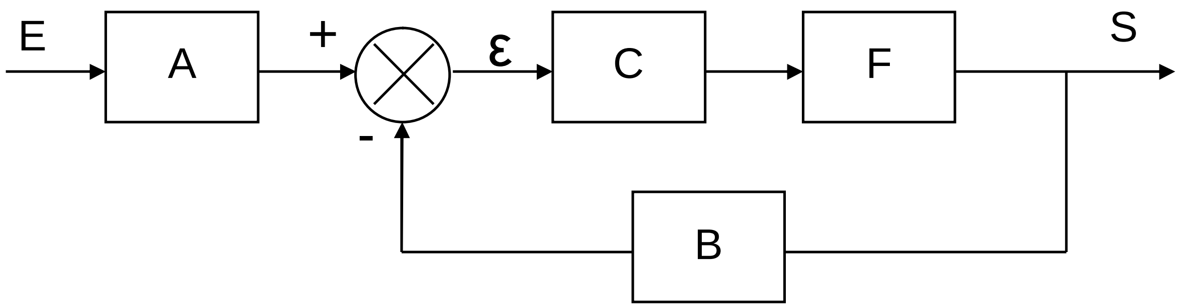
Il faut minimiser l'erreur $\varepsilon(t) = x_c(t) - x(t)$ en régime permanent et aussi dans les transitoires.

Structure type d'un système asservi



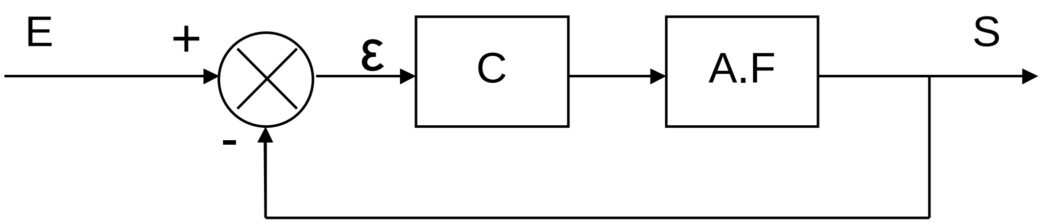
Le processus peut lui même être décomposé en plusieurs blocs (pré actionneur, actionneur, transmetteur …).

Chaque bloc peut être définit par une fonction de transfert (cas des SLCI).



Une condition nécessaire pour que le système soit précis, il faut que A=B.

On peut alors rendre le système à retour unitaire.



Dans le cas d'un asservissement, l'entrée et la sortie sont de même nature (position, vitesse, force, température …).

Fonction de transfert en boucle fermée.

La FTBF a la forme suivante : $$FTBF(p) = \frac{a_n.p^n + a_{n-1}.p^{n-1} + \ldots + a_0}{b_m.p^m + b_{m-1}.p^{m-1} + \ldots + b_0}$$

Avec $n \leq m$. Il n'y a pas d'intégration (pas de 1/p).

$$FTBF(p)=\frac{N(p)}{D(p)}$$ (Numérateur et Dénominateur)

Les poles de la FTBF sont les racines de D(p)

Les zeros de la FTBF sont les racines de N(p)

On peut mettre la FTBF sous la forme : $FTBF(p)=K_{BF}.\frac{...p^n+...p^{n-1}+...+1}{...p^m+...p^{m-1}+...+1}$

$$FTBF(p)=\frac{a_0}{b_0}.\frac{\frac{a_n}{a_0}.p^n+\frac{a_{n-1}}{a_0}.p^{n-1}+...+1}{\frac{b_m}{b_0}.p^m+\frac{b_{m-1}}{b_0}.p^{m-1}+...+1}$$

On fait apparaitre le Gain Statique K_{BF} .

Important : En réponse à un échelon unitaire, la sortie en régime permanent est égale à K_{BF} (Comme pour les systèmes du premier et second ordre).

Fonction de transfert en boucle ouverte.

$$FTBO(p)=\frac{c_i.p^i+c_{i-1}.p^{i-1}+...+c_0}{p^\alpha.(d_j.p^j+d_{j-1}.p^{j-1}+...+d_0)}$$

α : Classe du système (nombre d'intégration de la FTBO)

Exemple de mise sous forme canonique :

$$FTBF(p)=\frac{3.p+2}{7.p^2+4.p+3}=\frac{2.\left(\frac{3}{2}.p+1\right)}{3.\left(\frac{7}{3}.p^2+\frac{4}{3}.p+1\right)}=\frac{2}{3}.\frac{\frac{3}{2}.p+1}{\frac{7}{3}.p^2+\frac{4}{3}.p+1}$$

Système d'ordre 2, de gain statique $K=\frac{2}{3}$,