CINEMATIQUE DU SOLIDE 1 : POSITION D'UN SOLIDE

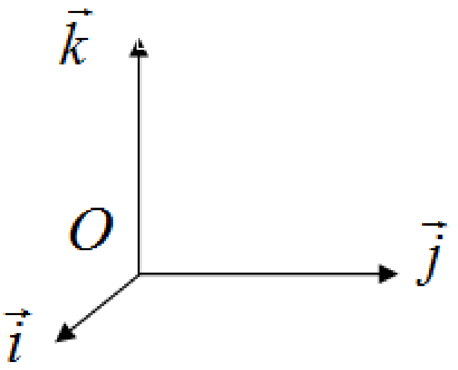
http://perso.numericable.fr/starnaud/

I. Référentiel.

Repère : L'association d'un point origine O et d'une base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ constitue un repère $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

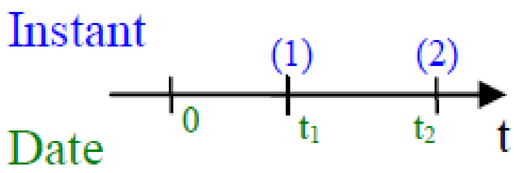
La base est orthonormée directe on a alors :

- ✓ $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$
- ✓ $\vec{k} = \vec{i} \wedge \vec{j}$



Temps : Une position est définie à un instant donné.

Cet instant dépend de l'origine temporelle choisit.



Référentiel : L'association d'un repère et d'une origine des temps constitue un référentiel.

II. Solide indéformable.

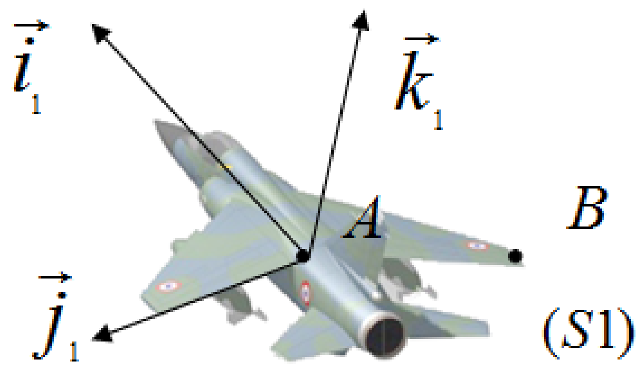
Un solide (S) est indéformable si la distance de deux points quelconques du solide reste constante au cours du temps : $\|\overrightarrow{AB}\| = cte$.

Dans un repère lié au solide, les positions de ces points sont constantes.

Il y a alors équivalence entre la position d'un solide et la position du repère lié au solide.

Solide (S1), Repère $R_1(A, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$

On a équivalence (S1) (R1)

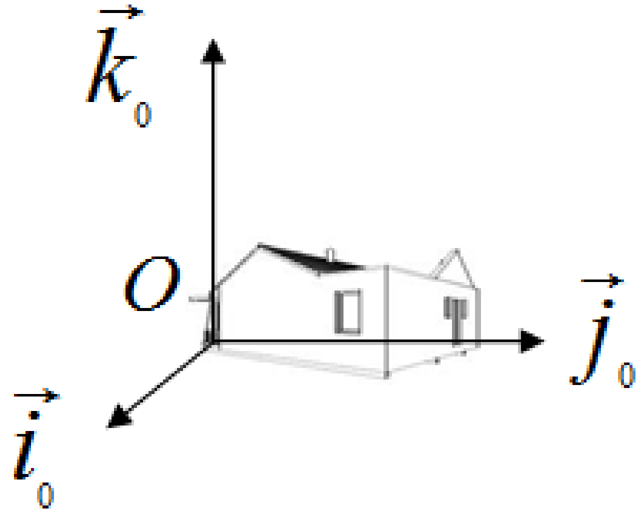


Un solide étant pris comme référence,
son repère lié est le repère d'observation.

Solide (S0)

Repère $R_0(O,\vec{i}_0,\vec{j}_0,\vec{k}_0)$

On a équivalence (S0) (R0)

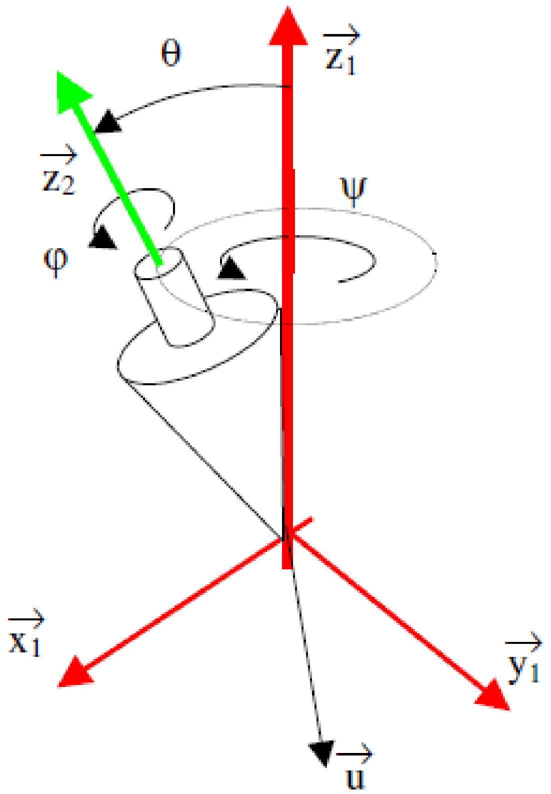


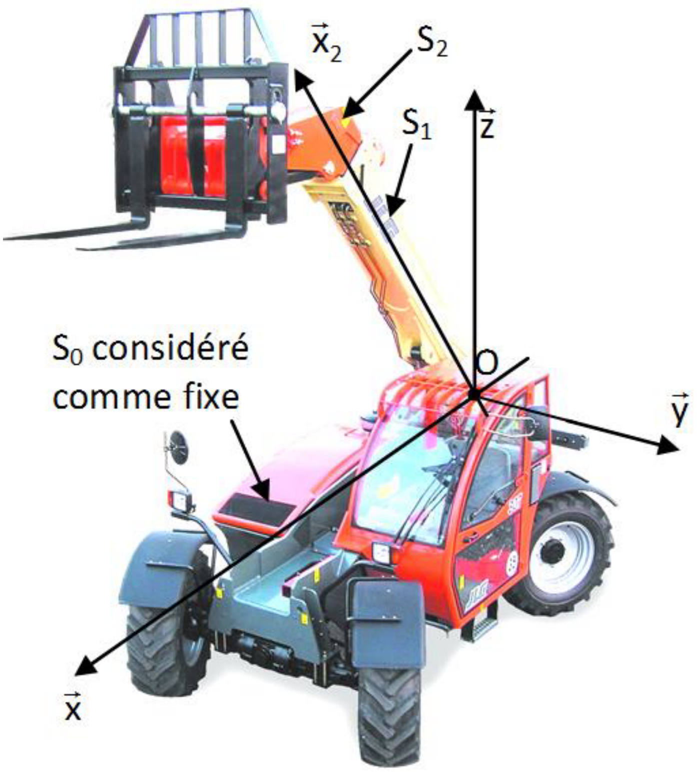
III. Position d'un solide

Pour définir la position d'un solide par rapport à solide de référence, il faut définir la position du repère lié au solide par rapport au repère d'observation.

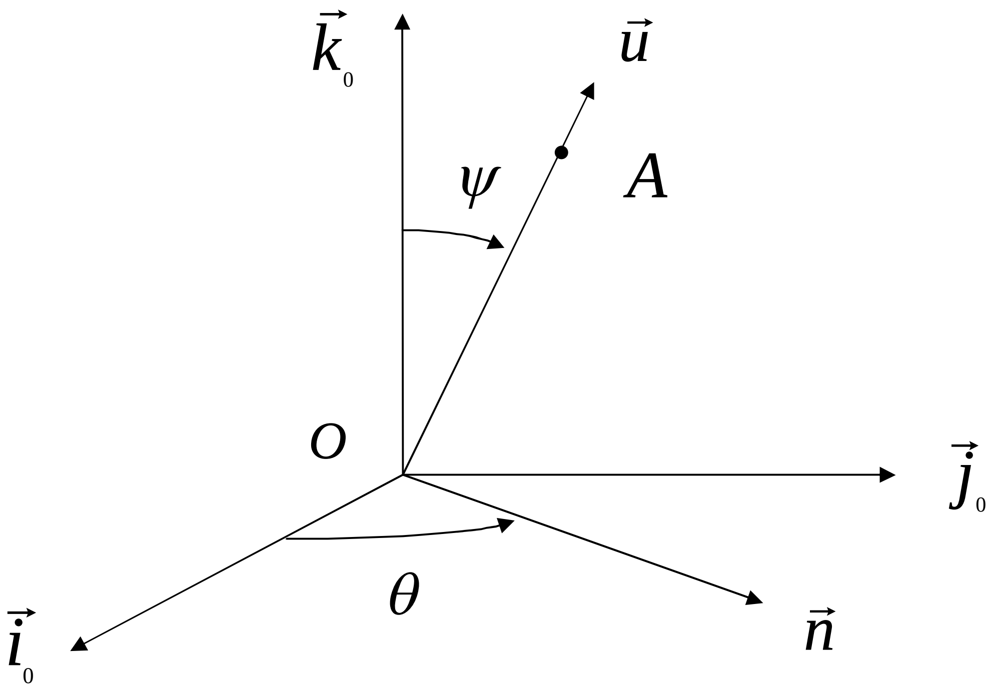
Un repère est constitué d'une origine et d'une base, il faut définir les paramètres permettant de les repérer.

Exemples :





1. Vecteur Position.



On définit la position d'un point de (S1) :

- ✓ En coordonnées cartésiennes : $\overrightarrow{OA} = x.\vec{i}_0 + y.\vec{j}_0 + z.\vec{k}_0$

  x : Abscisse y : Ordonnée z : Cote

- ✓ En coordonnées cylindriques : $\overrightarrow{OA} = r.\vec{n} + z.\vec{k}_0$

  r : Rayon polaire θ : Angle polaire z : Cote

  $\vec{n}$ est un vecteur unitaire

  Retour aux coordonnées cartésiennes : $\vec{n} = \cos\theta.\vec{i}_0 + \sin\theta.\vec{j}_0$

$$\overrightarrow{OA} = r.\cos\theta.\vec{i}_0 + r.\sin\theta.\vec{j}_0 + z.\vec{k}_0$$

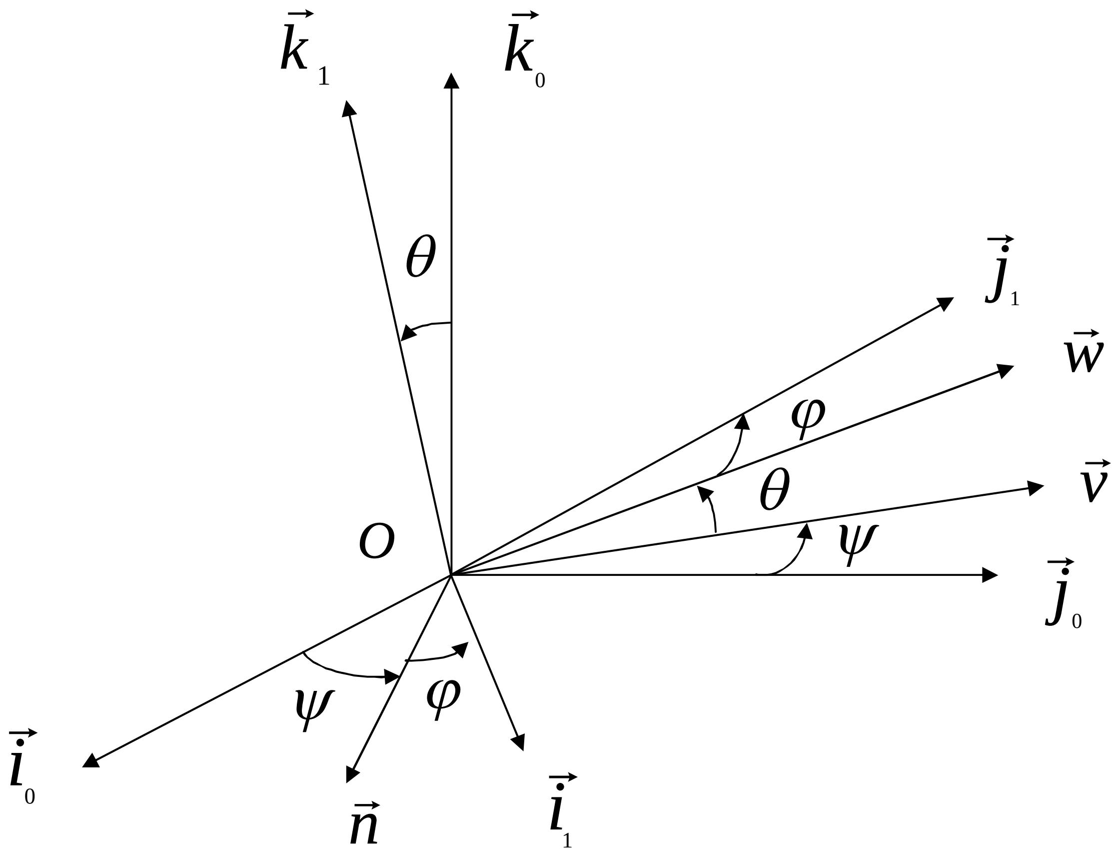
- ✓ En coordonnées sphériques : $\overrightarrow{OA} = \rho.\vec{u}$

2. Orientation.

Une fois paramétrée la position de l'origine du repère, il faut définir les paramètres qui permettent d'orienter la base (B1) par rapport à la base (B0).

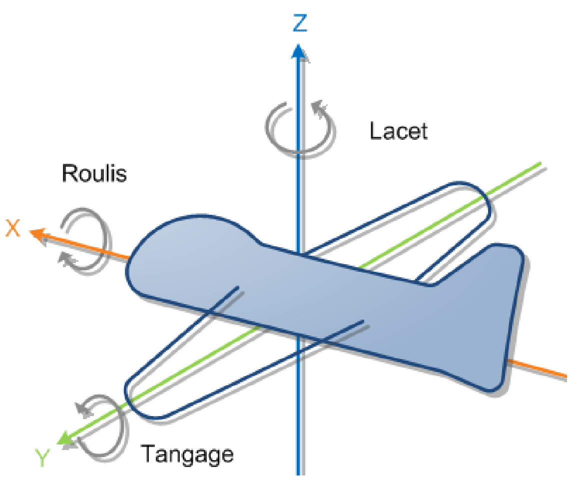
Les angles d'Euler sont une solution pour définir ces paramètres.

On passe de la base (B0) à la base (B1) par 3 rotations successives d'angles ψ, θ et φ.



- ✓ On passe de la base $(\vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$ à la base $(\vec{n}, \vec{v}, \vec{k}_0)$ par une rotation d'angle ψ autour de $\vec{k}_0$ (angle de précession).
- ✓ On passe de la base $(\vec{n}, \vec{v}, \vec{k}_0)$ à la base $(\vec{n}, \vec{w}, \vec{k}_1)$ par une rotation d'angle θ autour de $\vec{n}$ (angle de rotation propre)
- ✓ On passe de la base $(\vec{n}, \vec{w}, \vec{k}_1)$ à la base $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ par une rotation d'angle φ autour de $\vec{k}_1$ (angle de nutation).

On peut aussi utiliser les angles de roulis, lacet et tangage.



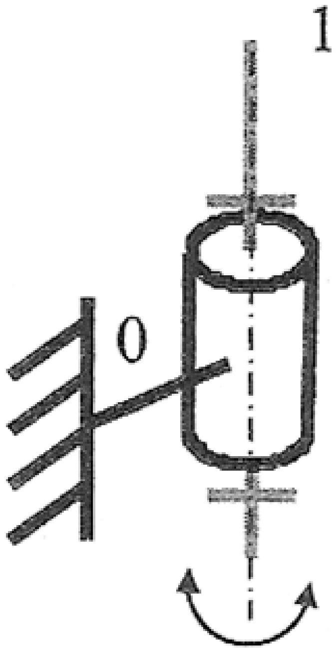
Les angles d'Euler sont en pratique peu employés en cinématique du solide.

En effet, la réalisation technologique d'un mécanisme fait que l'orientation d'un solide (1) par rapport à un solide (0) va résulter d'une succession de liaisons qui engendre des rotations dont les axes matériels sont clairement identifiés.

IV. Position d'un solide (Cas d'un mouvement de rotation).

1. Paramétrage de l'orientation d'une base

Cas d'une rotation :



Le solide (1) est en liaison pivot d'axe $(O,\vec{z}_0)$ par rapport au solide (0).

Le solide (1) a un mouvement de rotation par rapport au solide (0).

Le repère (R0) est lié au solide (0)

Le repère (R1) au solide (1).

On fait par exemple correspondre les vecteurs de base $\vec{z}_0$ et $\vec{z}_1$ avec l'axe de la rotation de (1) par rapport à (0).

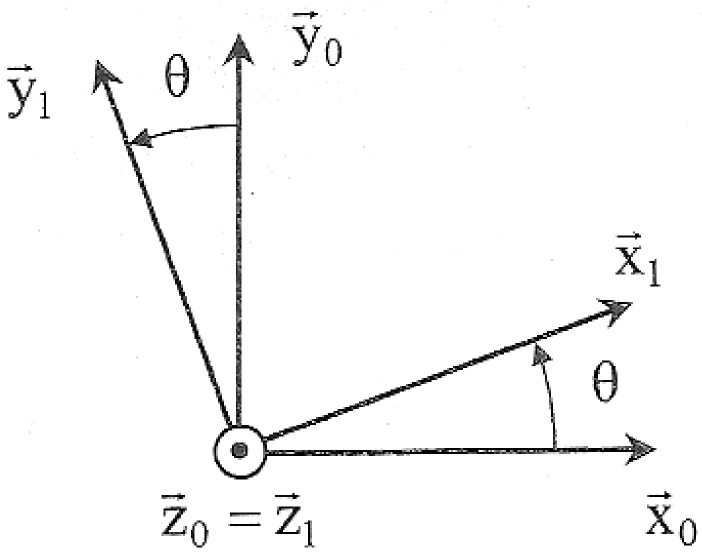
L'orientation de la base (B1) par rapport à la base d'observation (B0) se traduit par la figure suivante :

Cette figure plane traduit le paramétrage de l'orientation de la base (B1) par rapport à la base (B0).

Un seul paramètre angulaire θ est nécessaire.

Cette figure sera toujours représentée de la même façon avec :

- ✓ un vecteur commun sortant
- ✓ un angle positif faible.



Dans le cas général, si on a plusieurs rotations, il faut faire plusieurs figures de ce type en associant à chaque rotation un paramètre angulaire.

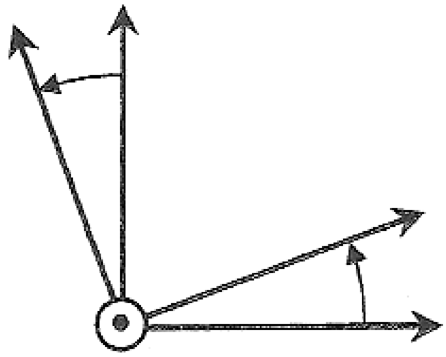
Figure plane :

Les figues planes de changement de base sont incontournables dans un problème de cinématique.

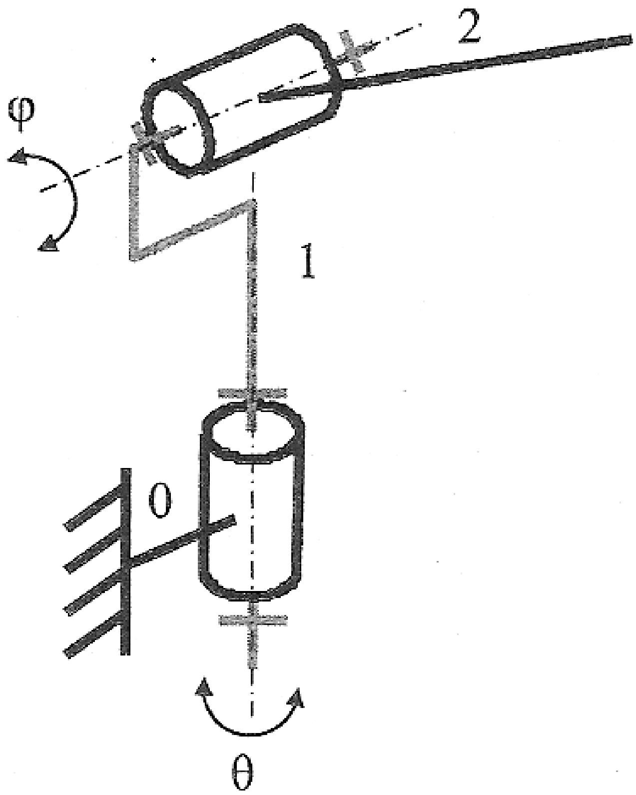
Il faut en dessiner autant qu'il y a de paramètres angulaires.

Pour chaque paramètre :

- ✓ Dessiner la trame avec un angle faible.
- ✓ Identifier le vecteur commun aux deux bases, le faire apparaître sur la figure.
- ✓ Compléter le dessin avec les autres vecteurs de base en respectant l'orientation directe de la base.
- ✓ Indiquer le paramètre angulaire.



Exemple : Robot à 2 axes de rotation



Ce robot est constitué de trois solides et possède deux axes de rotation.

Le bras (2) est en rotation par rapport au corps (1) qui est lui-même en rotation par rapport au bâti (0).

Une base (Bi) est liée à chacun des solides.

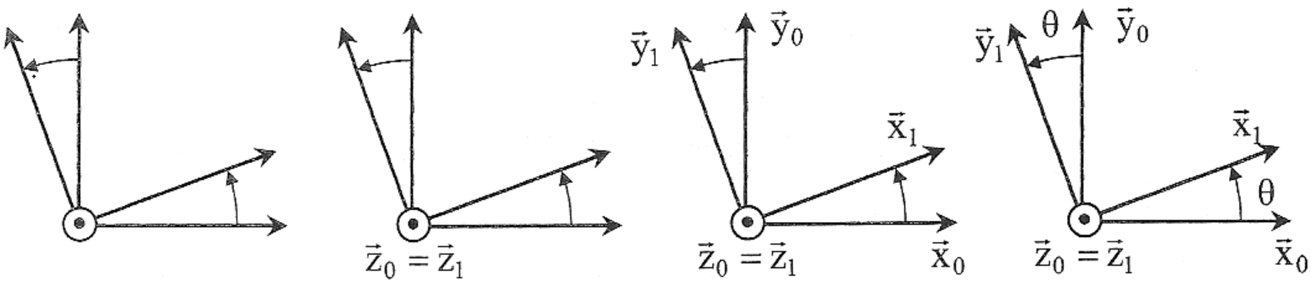
La rotation du corps (1) par rapport au bâti (0) est paramètre par un angle θ autour de $\vec{z}_1 = \vec{z}_0$.

La rotation du bras 2 par rapport au corps 1 est paramètre par un angle φ autour de $\vec{x}_2 = \vec{x}_1$.

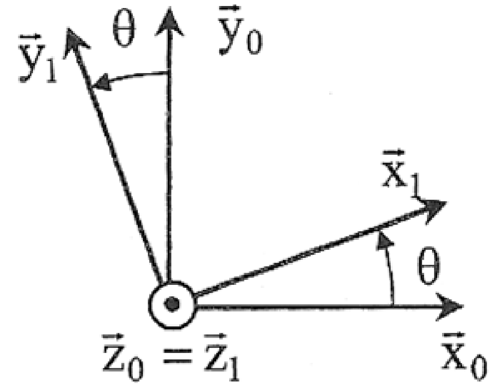
Graphe de structure de ce robot

Remarque : Ce mécanisme est une chaine ouverte de solides

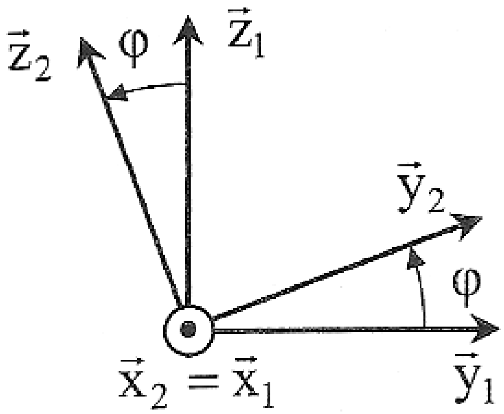
Les quatre étapes de la méthode sont illustrées par les quatre figures suivantes :



Au final, on obtient la figure suivante :



De la même façon, on obtient la figure plane de changement de base entre (B2) et (B1) :



Le vecteur commun aux deux bases est la seule information nécessaire pour dessiner la figure plane de changement de base.

Cette information peut être donnée explicitement dans l'énoncé comme pour l'exemple précédent ou à tirer du schéma cinématique paramétré.

2. Position d'un point

Les paramètres de position sont les paramètres variables en fonction du temps qui déterminent la position relative des solides.

Il faut bien différencier les paramètres de position (variables) des caractéristiques géométriques (constantes).

Exemple : Robot à 2 axes de rotation

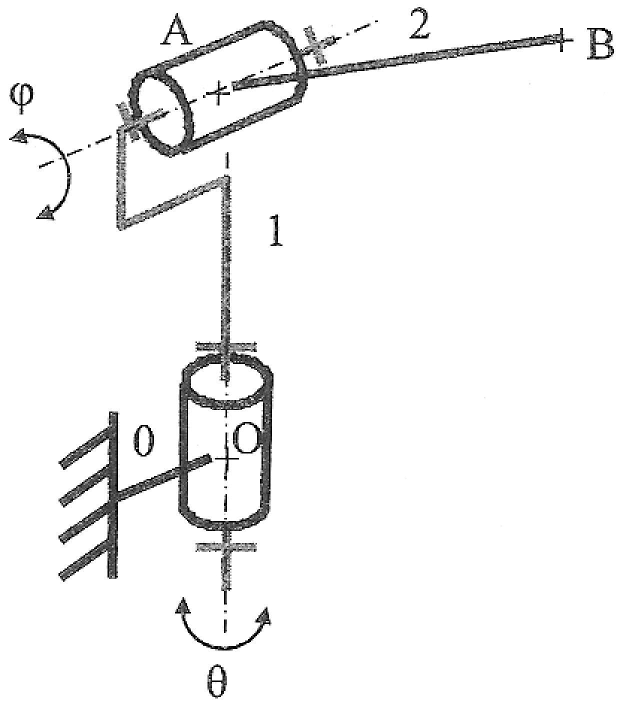
On complète le paramétrage : $\overrightarrow{OA} = H.\vec{z}_0$ et $\overrightarrow{AB} = L.\vec{y}_2$

La position du point B dans le repère (R0) à un instant donné dépend :

- ✓ des dimensions constantes du robot H et L.
- ✓ des paramètres d'orientation θ et φ à l'instant considéré.

La position d'un point est donnée par le vecteur position.

Le vecteur position projeté dans une base fait apparaître les coordonnées associées à cette base.
Le vecteur position s'écrit naturellement :



$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = H.\vec{z}_0 + L.\vec{y}_2$$

Cette expression revient à adopter le système de coordonnées sphériques où le vecteur de base $\vec{y}_2$ est orienté par les deux paramètres angulaires θ et φ.

A l'aide des figures de changement de base, on peut exprimer ce vecteur position dans la base (B1) :

On a en effet :

$$\vec{y}_2 = \cos\varphi.\vec{y}_1 + \sin\varphi.\vec{z}_1 \quad \text{et}$$
$$\vec{z}_0 = \vec{z}_1$$

$$\overrightarrow{OB} = H.\vec{z}_0 + L.\vec{y}_2 = H.\vec{z}_1 + L.(\cos\varphi.\vec{y}_1 + \sin\varphi.\vec{z}_1)$$
$$\overrightarrow{OB} = L.\cos\varphi.\vec{y}_1 + (H + L.\sin\varphi).\vec{z}_1$$

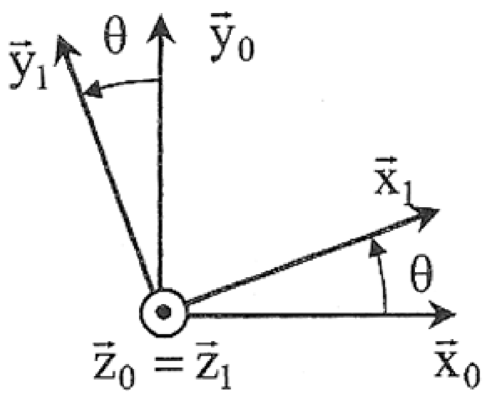
Cette écriture utilise plutôt le système de coordonnées cylindriques avec l'angle polaire φ.

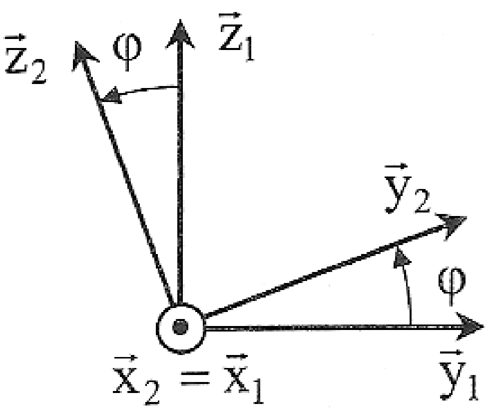
Enfin, en exprimant le vecteur position dans la base (B0), on obtient les coordonnées cartésiennes du point B dans le repère (R0) :

On a en effet : $\vec{y}_1 = -\sin\theta.\vec{x}_0 + \cos\theta.\vec{y}_0$ et $\vec{z}_0 = \vec{z}_1$

$$\overrightarrow{OB} = L.\cos\varphi.(-\sin\theta.\vec{x}_0 + \cos\theta.\vec{y}_0) + (H + L.\sin\varphi).\vec{z}_0$$
$$\overrightarrow{OB} = -L.\cos\varphi.\sin\theta.\vec{x}_0 + L.\cos\varphi.\cos\theta.\vec{y}_0 + (H + L.\sin\varphi).\vec{z}_0$$

Figures de changement de base :





V. Etude géométrique d'une chaine fermée de solides.

Exemple : Bielle manivelle

Le mécanisme bielle manivelle est très fréquent dans les chaines d'action des systèmes : moteur à piston, pompe, mécanisme de barrière…

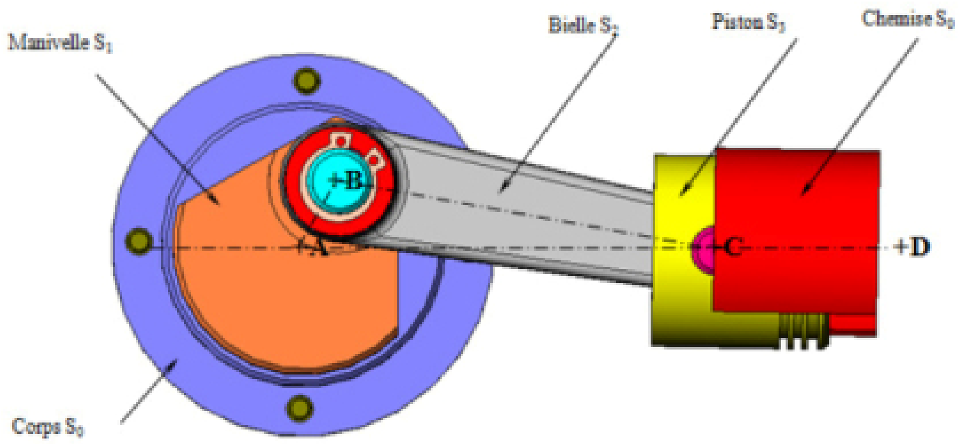
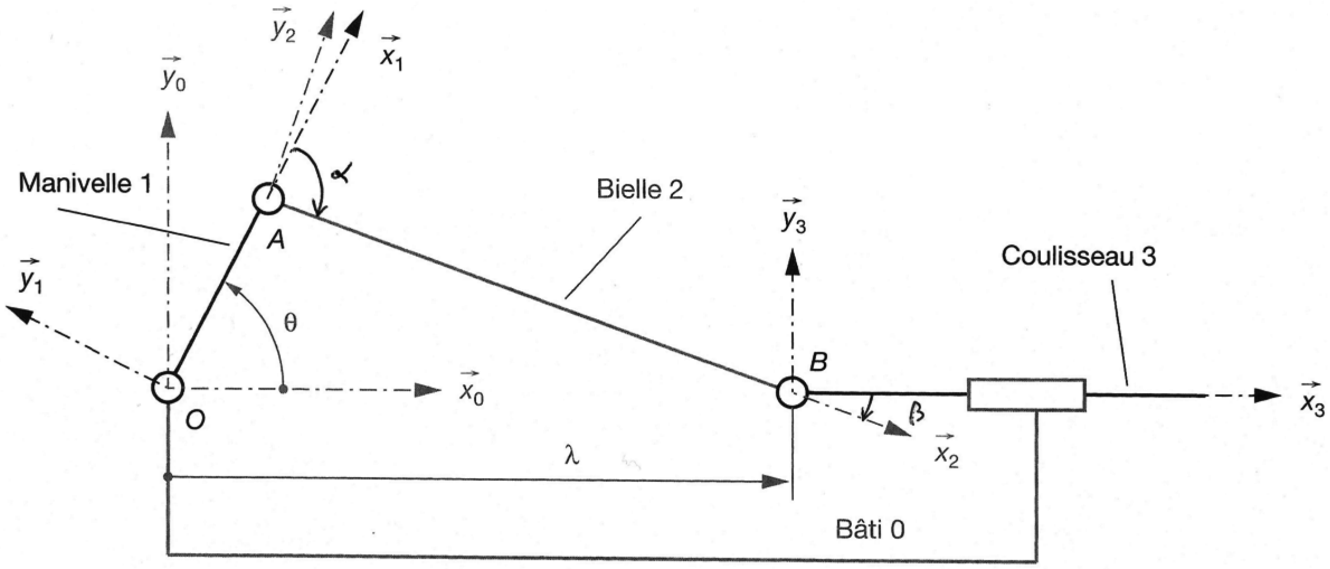


Schéma cinématique :



Paramétrage : $\overrightarrow{OA} = r.\vec{x}_1$ $\overrightarrow{AB} = l.\vec{x}_2$ $\overrightarrow{OB} = \lambda.\vec{x}_3$

$(\vec{x}_0, \vec{x}_1) = \theta$ $(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \alpha$ $(\vec{x}_0, \vec{x}_3) = 0$ $(\vec{x}_0, \vec{x}_2) = \beta$

Remarques :

- ✓ On est dans le cas d'un mécanisme plan.
- ✓ Ce mécanisme transforme un mouvement de rotation continu en un mouvement de translation alternative (ou vis versa).
- ✓ Relation entrée/sortie : θ / λ

Graphe de structure :

Fermeture géométrique :

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad r.\vec{x}_1 + l.\vec{x}_2 - \lambda.\vec{x}_3 = \vec{0}$$

Figures de changement de bases :

$$\vec{x}_1 = \cos\theta.\vec{x}_0 + \sin\theta.\vec{y}_0$$

$$\vec{x}_2 = \cos\beta.\vec{x}_0 + \sin\beta.\vec{y}_0 \qquad \vec{x}_3 = \vec{x}_0$$

$$r.\cos\theta + l.\cos\beta - \lambda = 0$$
$$r.\sin\theta + l.\sin\beta = 0$$

Fermeture angulaire : $\theta + \alpha - \beta = 0$

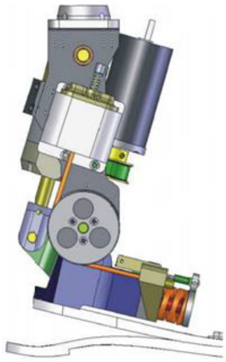
Résolution : Constantes : r et l. entrée : θ sortie : λ variables : α et β

On cherche une relation entre l’entrée et la sortie en fonction des constantes du système.

$$\sin\beta = -\frac{r}{l}.\sin\theta$$

$$\lambda = r.\cos\theta + l.\cos\beta \qquad \lambda = r.\cos\theta + l.\sqrt{1-(\frac{r}{l}.\sin\theta)^2}$$

Exemple 2 : Prothèse de pied active



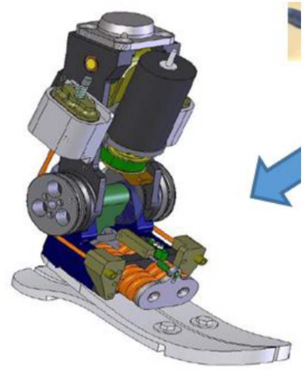


Schéma cinématique :