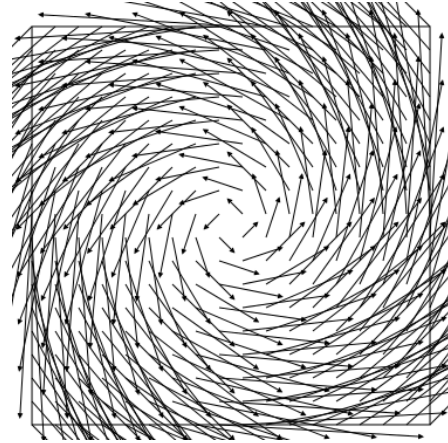


## CINEMATIQUE DU SOLIDE 3 : CHAMPS DES VITESSES ET TORSEUR CINEMATIQUE

### I. CHAMPS DES VITESSES D'UN SOLIDE INDEFORMABLE.

Exemple :

La figure représente le champ des vitesses d'un solide animé d'un mouvement de rotation.



Le champ des vitesses du solide (S1) dans son mouvement par rapport à un repère (R0) est le champ qui associe à tout point M appartenant à (S1) le vecteur vitesse  $\vec{V}(M \in S1/R0)$ .

Relation cinématique du solide :

Soient 2 solides (S0) et (S1) auxquels sont rattachés les repères (R0) et (R1).

$$R_0(O, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0) \quad \text{et} \quad R_1(O_1, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$$

Il existe une relation entre la vitesse de 2 points d'un même solide indéformable (Appelée relation de Varignon) :

$$\vec{V}(M \in S1/R0) = \vec{V}(N \in S1/R0) + \vec{\Omega}(R1/R0) \wedge \overrightarrow{NM}$$

### II. TORSEUR CINEMATIQUE.

Pour connaître le champ des vitesses d'un solide (S1), dans son mouvement par rapport à un repère R0, il suffit de connaître :

- ✓ Le vecteur vitesse de rotation  $\vec{\Omega}(R1/R0)$
- ✓ La vitesse d'un point (la vitesse des autres points est donnée par la relation de Varignon).

C'est ce que l'on appelle le torseur cinématique (ou torseur distributeur des vitesses).

Notations :

$$\{V_{S1/R0}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}(R1/R0) \\ \vec{V}(M \in S1/R0) \end{array} \right\}_M \quad \begin{array}{l} \vec{\Omega}(R1/R0) : \text{résultante du torseur} \\ \vec{V}(M \in S1/R0) : \text{moment du torseur} \end{array}$$

Autre notation :

$$\{V_{S1/R0}\} = \left\{ \begin{array}{ll} \omega_x & v_x \\ \omega_y & v_y \\ \omega_z & v_z \end{array} \right\}_{M, \text{ dans } R0}$$

composantes exprimées dans une base ou un repère précisé.

Torseurs particuliers :

Torseur nul :

$$\{V_{S1/R0}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_M, \quad S1 \text{ fixe / } R0$$

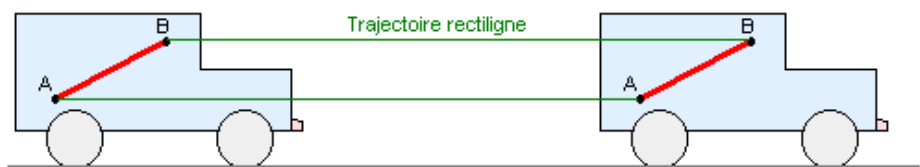
Torseur couple :

$$\{V_{S1/R0}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ \vec{V}(M \in S1/R0) \end{array} \right\}_M, \text{ mouvement de translation}$$

Il existe plusieurs types de mouvement de translation selon la nature de la trajectoire :

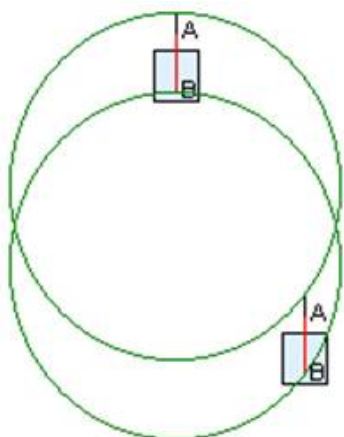
- ✓ Translation rectiligne : les trajectoires des points sont des segments de droite,
- ✓ Translation circulaire : les trajectoires des points sont des arcs de cercle de même rayon
- ✓ Translation curviligne : les trajectoires des points décrivent des courbes

Exemple de translation rectiligne



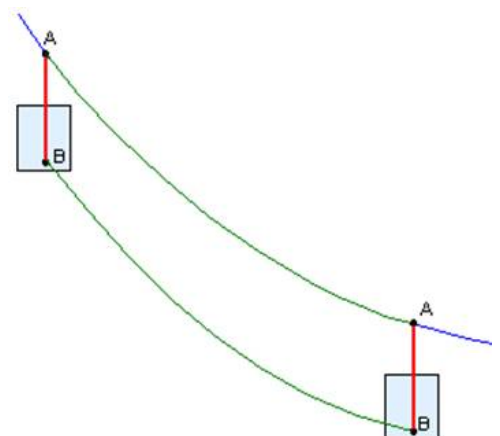
Exemple de translation circulaire :

La grande roue



Exemple de translation curviligne :

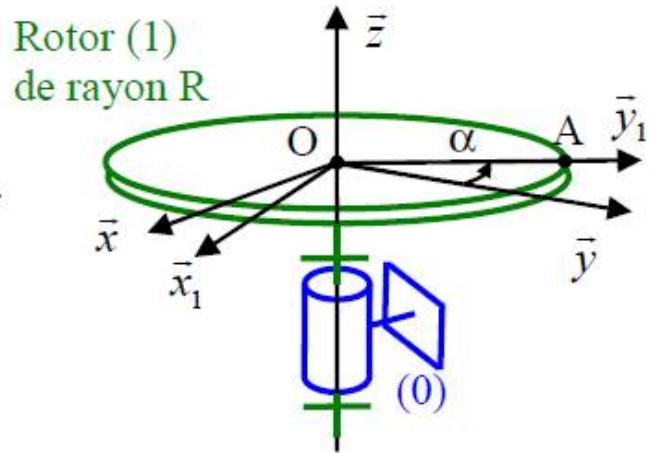
Le téléphérique



Torseur glisseur :  $\{V_{S1/R0}\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{\Omega}(R1/R0) \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_M$ , mouvement de rotation autour d'un axe passant par M, et de direction  $\vec{\Omega}(R1/R0)$

Exemple :

Un rotor



Mouvement hélicoïdal :

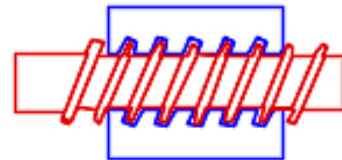
$$\{V_{S1/R0}\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{\Omega}(R1/R0) \\ \vec{V}(M \in S1/R0) \end{matrix} \right\}_M \text{ avec } \vec{V}(M \in S1/R0) = \frac{p}{2\pi} \cdot \vec{\Omega}(R1/R0)$$

p : pas de l'hélice, unités utilisées : mètre et radian par seconde

Exemple : mécanisme vis écrou

La rotation et la translation de la vis sont conjuguées.

Quand la vis tourne d'un tour, elle avance du pas



Point central, axe central du torseur cinématique :

Un point central est un point où le moment  $\vec{V}(M \in S1/R0)$  est soit nul, soit colinéaire à la résultante  $\vec{\Omega}(R1/R0)$ .

L'axe central est constitué de l'ensemble des points centraux.

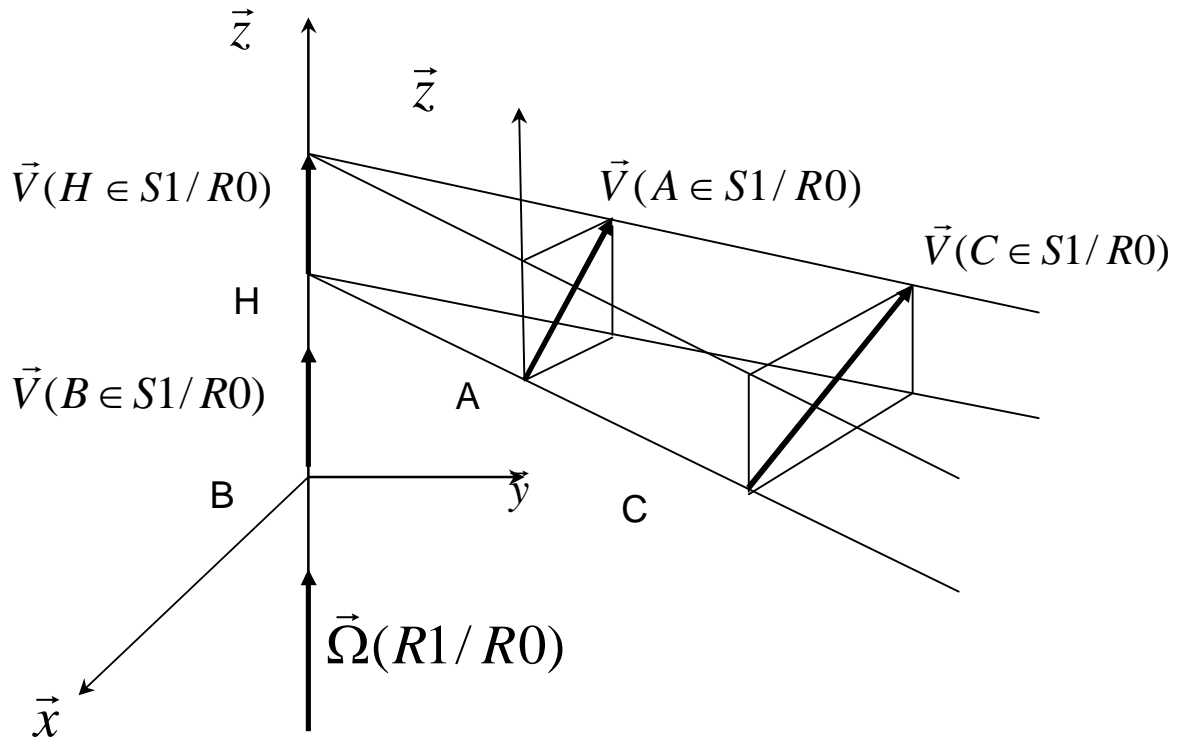
Sur l'axe central,  $\vec{V}(M \in S1/R0)$  est minimal et constante.

Lorsque  $\vec{V}(M \in S1/R0) = \vec{0}$  sur l'axe central et que  $\vec{\Omega}(R1/R0) \neq \vec{0}$  on parle alors d'axe instantanée de rotation.

Illustration : Un mouvement quelconque peut se décomposer en :

- ✓ Un mouvement de translation dans la direction ( $\Delta$ )
- ✓ Un mouvement de rotation autour de ( $\Delta$ ) (mouvement de « vissage »)

Rappels :  $\vec{V}(C \in S1/R0) = \vec{V}(H \in S1/R0) + \vec{\Omega}(R1/R0) \wedge \overline{HC}$



### III. CHAMP DES ACCELERATIONS D'UN SOLIDE INDEFORMABLE.

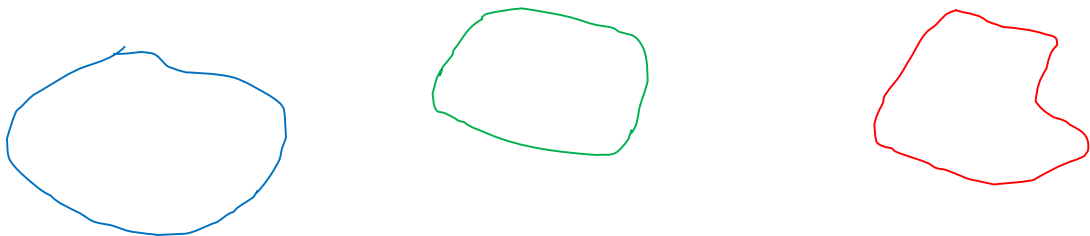
En dérivant la relation de Varignon et après calcul, on trouve :

$$\vec{A}(M \in S1/R0) = \vec{A}(N \in S1/R0) + \left(\frac{d\vec{\Omega}(R1/R0)}{dt}\right)_{R0} \wedge \overline{NM} + \vec{\Omega}(R1/R0) \wedge [\vec{\Omega}(R1/R0) \wedge \overline{NM}]$$

Remarque : Retenir que la relation entre les accélérations de 2 points d'un même solide n'est pas la même que la relation entre les vitesses de 2 points d'un même solide.

### IV. COMPOSITION DE MOUVEMENT.

Soient 3 solides (S0), (S1) et (S2).



(S2) est en mouvement par rapport à (S1) et (S1) est en mouvement par rapport à (S0).

Les repères  $R_0(O, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$ ,  $R_1(O_1, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$  et  $R_2(O_2, \vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2)$  sont lié aux solides (S0), (S1) et (S2).

- ✓ Mouvement de (S2) par rapport à (S0) : mouvement absolu.
- ✓ Mouvement de (S2) par rapport à (S1) : mouvement relatif.
- ✓ Mouvement de (S1) par rapport à (S0) : mouvement d'entraînement.
- ✓

## 1. Composition des vecteurs vitesses de rotation.

$$\vec{\Omega}(S2/R0) = \vec{\Omega}(S2/S1) + \vec{\Omega}(S1/R0)$$

## 2. Composition des vecteurs vitesses.

Démonstration de la relation : Soit M un point appartenant à (S2).

$$\vec{V}(M \in S2/R0) = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{R0} = \left(\frac{d(\overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M})}{dt}\right)_{R0} = \left(\frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt}\right)_{R0} + \left(\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right)_{R0}$$

Premier vecteur :  $\left(\frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt}\right)_{R0} = \vec{V}(O_1 \in S1/R0)$

Deuxième vecteur : On utilise la formule de la base mobile

$$\left(\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right)_{R0} = \left(\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right)_{R1} + \vec{\Omega}(R1/R0) \wedge \overrightarrow{O_1M}$$

$$\left(\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right)_{R0} = V(M \in S2/R1) + \vec{\Omega}(R1/R0) \wedge \overrightarrow{O_1M}$$

$$\vec{V}(M \in S2/R0) = \vec{V}(O_1 \in S1/R0) + V(M \in S2/R1) + \vec{\Omega}(R1/R0) \wedge \overrightarrow{O_1M}$$

$$\vec{V}(M \in S2/R0) = V(M \in S2/R1) + \vec{V}(O_1 \in S1/R0) + \vec{\Omega}(R1/R0) \wedge \overrightarrow{O_1M}$$

On utilise la relation cinématique du solide :

$$\vec{V}(M \in S1/S0) = \vec{V}(O_1 \in S1/S0) + \vec{\Omega}(R1/R0) \wedge \overrightarrow{O_1M}.$$

Finalement :  $\vec{V}(M \in S2/R0) = \vec{V}(M \in S2/S1) + \vec{V}(M \in S1/R0)$

Remarque :  $M \in S2$ ,  $M \notin S1$   $\vec{V}(M \in S1/R0)$  est la vitesse du point M supposé appartenir à (S1) à l'instant t, c'est la vitesse de M « bloqué sur (S1) ».

## 3. Composition des torseurs cinématiques.

$$\{V_{S2/R0}\}_M = \{V_{S2/S1}\}_M + \{V_{S1/R0}\}_M \quad \text{Les torseurs doivent être exprimés au même point.}$$

## 4. Composition des accélérations.

En dérivant la composition des vitesses et après calcul, on trouve :

$$\vec{A}(M \in S2/R0) = \vec{A}(M \in S2/S1) + \vec{A}(M \in S1/R0) + 2.\vec{\Omega}(R1/R0) \wedge V(M \in S2/R1)$$

$2.\vec{\Omega}(R1/R0) \wedge V(M \in S2/R1)$  est l'accélération de Coriolis.

## V. EXEMPLE 1

Soit (S0) un solide de référence auquel est rattaché le repère  $R_0(O, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$

Soit (S1) une barre animée d'un mouvement de rotation d'axe  $(O, \vec{k}_0)$  par rapport à R0.

$R_1(O, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$  est lié à (S1). On a  $\vec{k}_1 = \vec{k}_0$  et  $(\vec{i}_0, \vec{i}_1) = \alpha$

Soit (S2) un solide animé d'un mouvement de translation d'axe  $(O, \vec{i}_1)$  par rapport à (S1).

On a  $\overrightarrow{OM} = r.\vec{i}_1$

### Questions.

1. Déterminer les vitesses absolue, relative et d'entraînement de M.
2. Déterminer les accélérations absolue, relative, d'entraînement et de Coriolis de M.

$$\vec{V}(M \in S2/R0) = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{R0} = \left(\frac{d(r.\vec{i}_1)}{dt}\right)_{R0} = \dot{r}.\vec{i}_1 + r.\left(\frac{d\vec{i}_1}{dt}\right)_{R0} = \dot{r}.\vec{i}_1 + r.\dot{\alpha}.\vec{j}_1$$

$$\vec{V}(M \in S2/S1) = \dot{r}.\vec{i}_1$$

$$\vec{V}(M \in S1/R0) = r.\dot{\alpha}.\vec{j}_1$$

Rappel :  $\vec{V}(M \in S2/R0) = \dot{r} \cdot \vec{i}_1 + r \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{j}_1$

$$\vec{A}(M \in S2/R0) = \ddot{r} \cdot \vec{i}_1 + \dot{r} \cdot \left(\frac{d\vec{i}_1}{dt}\right)_{R0} + \dot{r} \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{j}_1 + r \cdot \ddot{\alpha} \cdot \vec{j}_1 + r \cdot \dot{\alpha} \cdot \left(\frac{d\vec{j}_1}{dt}\right)_{R0}$$

$$\vec{A}(M \in S2/R0) = \ddot{r} \cdot \vec{i}_1 + \dot{r} \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{j}_1 + \dot{r} \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{j}_1 + r \cdot \ddot{\alpha} \cdot \vec{j}_1 - r \cdot \dot{\alpha}^2 \cdot \vec{i}_1$$

$$\vec{A}(M \in S2/R0) = \ddot{r} \cdot \vec{i}_1 + r \cdot \ddot{\alpha} \cdot \vec{j}_1 - r \cdot \dot{\alpha}^2 \cdot \vec{i}_1 + 2 \cdot \dot{r} \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{j}_1$$

$$\vec{A}(M \in S2/S1) = \ddot{r} \cdot \vec{i}_1$$

Accélération relative

$$\vec{A}(M \in S1/R0) = r \cdot \ddot{\alpha} \cdot \vec{j}_1 - r \cdot \dot{\alpha}^2 \cdot \vec{i}_1$$

Accélération d'entraînement

$$2 \cdot \vec{\Omega}(R1/R0) \wedge V(M \in S2/R1) = 2 \cdot \dot{r} \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{j}_1$$

Accélération de Coriolis

## VI. EXEMPLE 2 : CENTRIFUGEUSE.

Une centrifugeuse crée une accélération permettant par exemple de séparer rapidement 2 liquides initialement mélangés.

Autre exemple, la centrifugeuse du Laboratoire central des ponts et chaussées (LCPC) permet l'étude du comportement d'ouvrages à partir de modèles réduits en corrigeant le facteur d'échelle.



Le bâti (1) est fixe. Le solide (2) est animé d'un mouvement de rotation d'axe  $(O_1, \vec{z}_1)$  et d'angle  $\varphi$  par rapport au bâti (1). Ces solides sont liés par une liaison pivot.

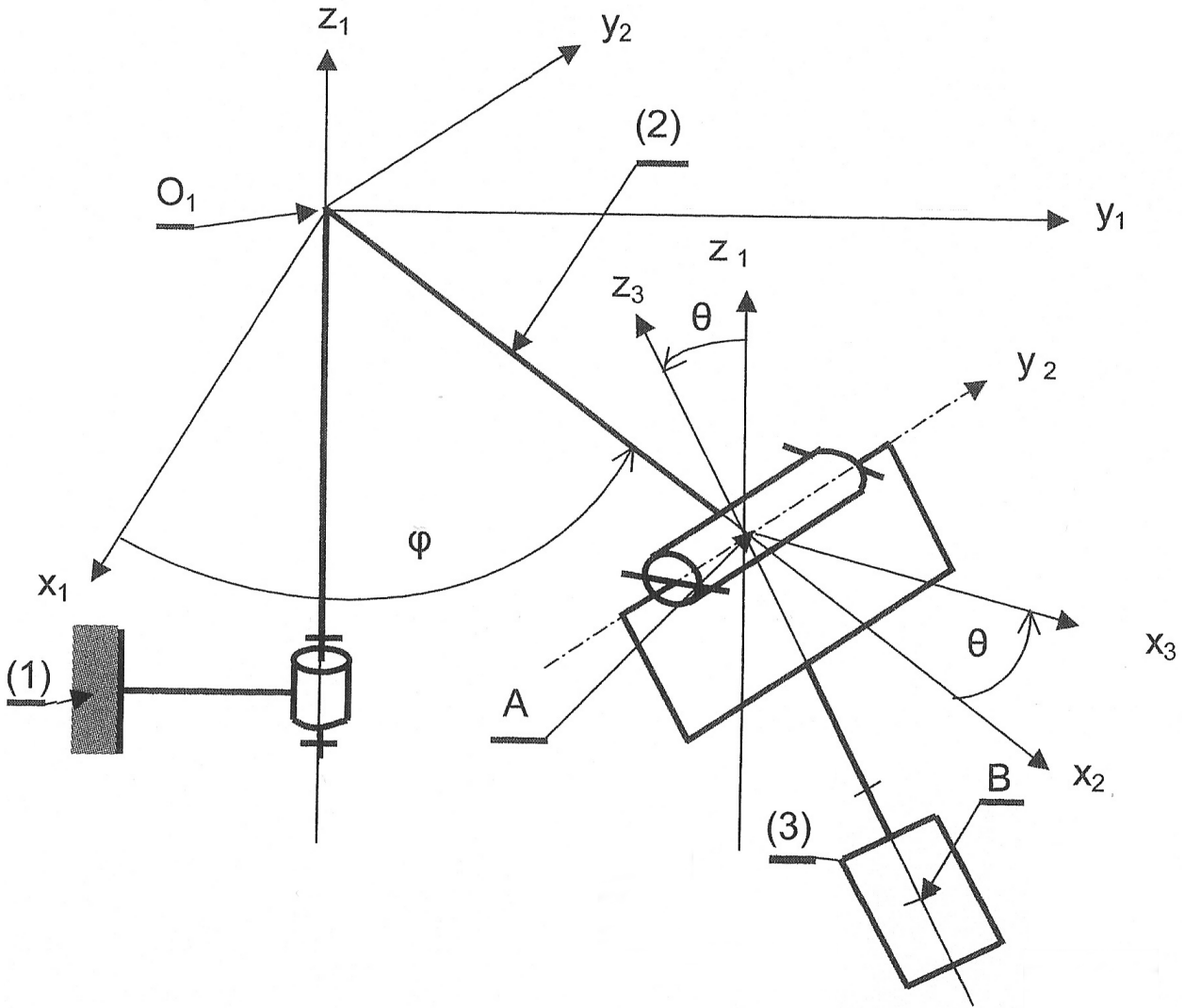
Le solide (3) est animé d'un mouvement de rotation d'axe  $(A, \vec{y}_2)$  et d'angle  $\theta$  par rapport au solide (2). Ces solides sont liés par une liaison pivot.

Les repères  $R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ ,  $R_2(O_1, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  et  $R_3(A, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$  sont liées respectivement aux solides (1), (2) et (3).

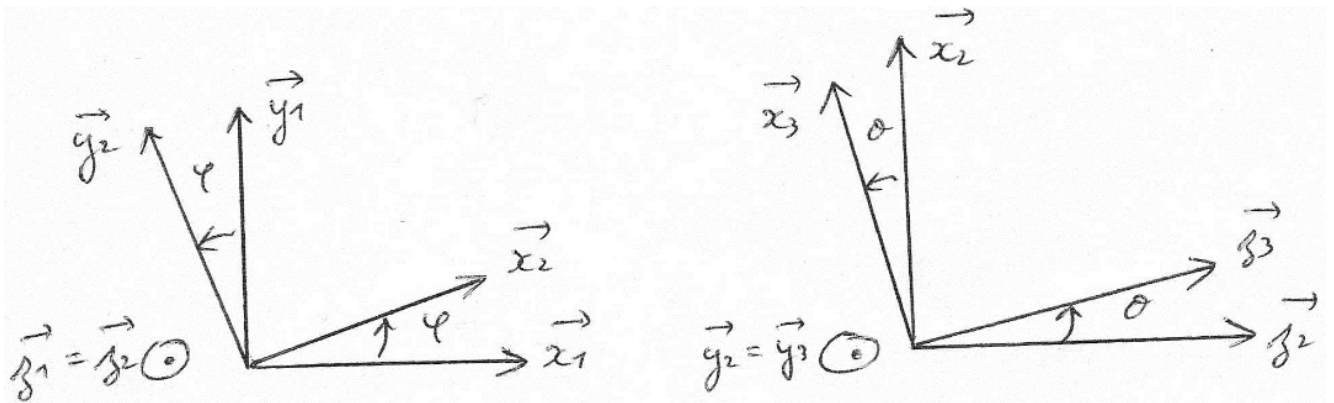
On a  $\vec{z}_1 = \vec{z}_2$  et  $\vec{y}_2 = \vec{y}_3$  On donne :  $\overrightarrow{O_1 A} = a \cdot \vec{x}_2$  et  $\overrightarrow{AB} = -b \cdot \vec{z}_3$

### Questions

1. Déterminer au point B le torseur cinématique du mouvement du solide (3) par rapport au solide (1). Calculer la vitesse de B en utilisant la relation de Varignon.
2. Déterminer les vitesses absolue, relative et d'entraînement de B.



Attention :  $\theta$  est négatif sur le schéma cinématique donné...



Torseur cinématique : 
$$\{V_{3/R1}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}(3/R1) \\ \vec{V}(B \in 3/R1) \end{array} \right\}_B = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\phi} \cdot \vec{z}_1 + \dot{\theta} \cdot \vec{y}_2 \\ \vec{V}(B \in 3/R1) \end{array} \right\}_A$$

$$\vec{V}(B \in 3/R1) = \vec{V}(A \in 3/R1) + \vec{\Omega}(3/R1) \wedge \overline{AB}$$

$$\vec{V}(B \in 3/R1) = \vec{V}(A \in 2/R1) + \vec{\Omega}(3/R1) \wedge \overline{AB}$$



$$\vec{V}(B \in 3/R1) = \vec{V}(O_1 \in 2/R1) + \vec{\Omega}(2/R1) \wedge \overrightarrow{O_1A} + \vec{\Omega}(3/R1) \wedge \overrightarrow{AB}$$

$$\vec{V}(B \in 3/R1) = \vec{0} + (\dot{\phi} \cdot \vec{z}_1) \wedge (a \cdot \vec{x}_2) + (\dot{\phi} \cdot \vec{z}_1 + \dot{\theta} \cdot \vec{y}_2) \wedge (-b \cdot \vec{z}_3)$$

$$\vec{V}(B \in 3/R1) = a \cdot \dot{\phi} \cdot \vec{y}_2 - b \cdot \dot{\phi} \cdot \sin \theta \cdot \vec{y}_2 - b \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{x}_3$$

$$\vec{V}(B \in 3/R1) = (a - b \cdot \sin \theta) \cdot \dot{\phi} \cdot \vec{y}_2 - b \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{x}_3$$

Entrainement :  $\vec{V}(B \in 2/R1) = (a - b \cdot \sin \theta) \cdot \dot{\phi} \cdot \vec{y}_2 \quad B \notin 2$

Relative :  $\vec{V}(B \in 3/R2) = b \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{x}_3$

Accélération du point B dans son mouvement par rapport au repère R<sub>1</sub>.

$$\vec{V}(B \in 3/R1) = \dot{\phi} \cdot (a - b \cdot \sin \theta) \cdot \vec{y}_2 - b \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{x}_3$$

$$\vec{A}(B \in 3/R1) = \ddot{\phi} \cdot (a - b \cdot \sin \theta) \cdot \vec{y}_2 + \dot{\phi} \cdot (-b \cdot \dot{\theta} \cdot \cos \theta) \cdot \vec{y}_2$$

$$+ \dot{\phi} \cdot (a - b \cdot \sin \theta) \cdot (-\dot{\phi} \cdot \vec{x}_2) - b \cdot \ddot{\theta} \cdot \vec{x}_3 - b \cdot \dot{\theta} \cdot \left(\frac{d\vec{x}_3}{dt}\right)_{R1}$$

$$\left(\frac{d\vec{x}_3}{dt}\right)_{R1} = \left(\frac{d\vec{x}_3}{dt}\right)_{R2} + \vec{\Omega}(R2/R1) \wedge \vec{x}_3 = -\dot{\theta} \cdot \vec{z}_3 + \dot{\phi} \cdot \vec{z}_1 \wedge (\cos \theta \cdot \vec{x}_2 - \sin \theta \cdot \vec{z}_1)$$

$$\left(\frac{d\vec{x}_3}{dt}\right)_{R1} = -\dot{\theta} \cdot \vec{z}_3 + \dot{\phi} \cdot \cos \theta \cdot \vec{y}_2$$

$$\vec{A}(B \in 3/R1) = [\ddot{\phi} \cdot (a - b \cdot \sin \theta) - 2 \cdot a \cdot b \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{\theta} \cdot \cos \theta] \cdot \vec{y}_2$$

$$- \dot{\phi}^2 \cdot (a - b \cdot \sin \theta) \cdot \vec{x}_2 - b \cdot \ddot{\theta} \cdot \vec{x}_3 - b \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \vec{z}_3$$

Entrainement :  $\vec{A}(B \in 2/R1) = \ddot{\phi} \cdot (a - b \cdot \sin \theta) \cdot \vec{y}_2 - \dot{\phi}^2 \cdot (a - b \cdot \sin \theta) \cdot \vec{x}_2$

Relative :  $\vec{A}(B \in 3/R2) = -b \cdot \ddot{\theta} \cdot \vec{x}_3 - b \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \vec{z}_3$

De Coriolis :  $\vec{A}(B \in 3/R1) = -2 \cdot a \cdot b \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{\theta} \cdot \cos \theta \cdot \vec{y}_2$