

# MODELISATION CINEMATIQUE ET GEOMETRIQUE DES LIAISONS 1

## I. INTRODUCTION.

### But de la modélisation.

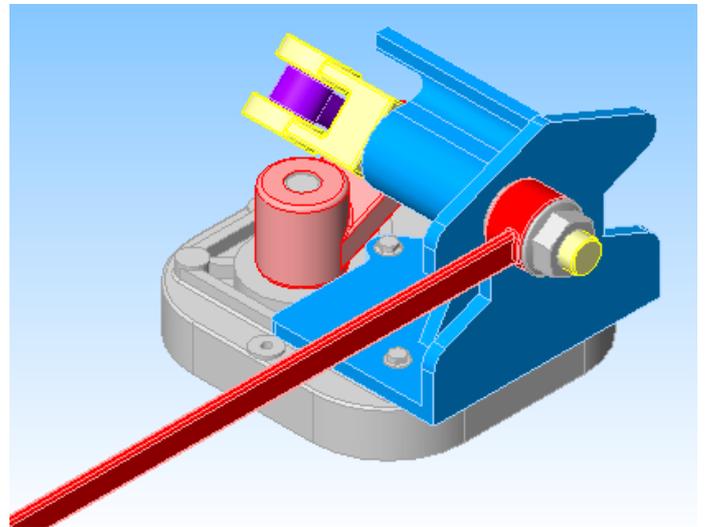
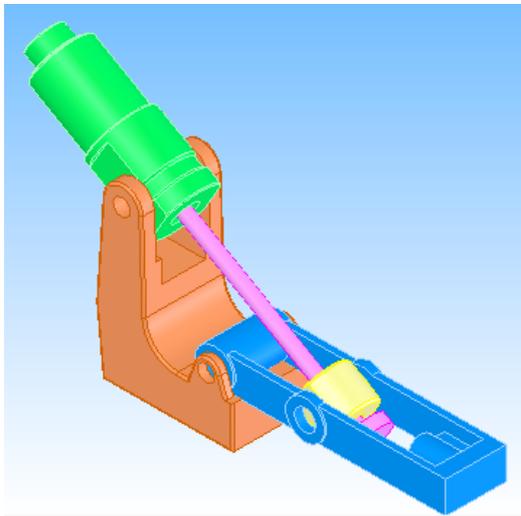
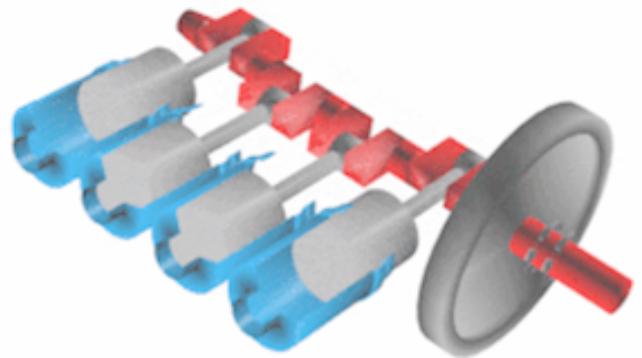
On modélise un mécanisme afin de mettre en évidence :

- ✓ Les mouvements relatifs de ses composants, c'est le domaine de la cinématique.
- ✓ Les efforts mis en jeu, c'est le domaine de la statique et de la dynamique.
- ✓ Les puissances transmises, c'est le domaine de la dynamique.

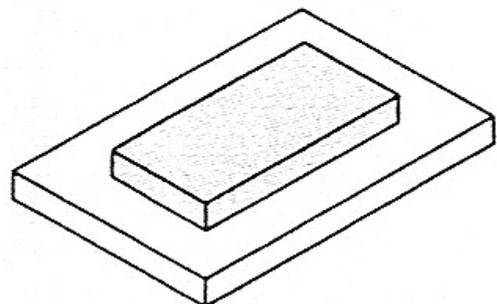
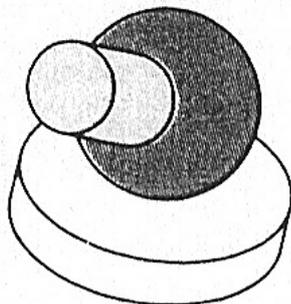
### Modèle de liaison.

Un mécanisme est constitué de solides en mouvement les uns par rapport aux autres.

Ces solides sont en contact les uns par rapport aux autres.



Ces contacts bloquent certains mouvements.



Afin d'en rendre compte et d'étudier le fonctionnement du mécanisme, on utilise un modèle de représentation des mouvements sous la forme de liaisons.

Des symboles normalisés sont associés à ces liaisons.

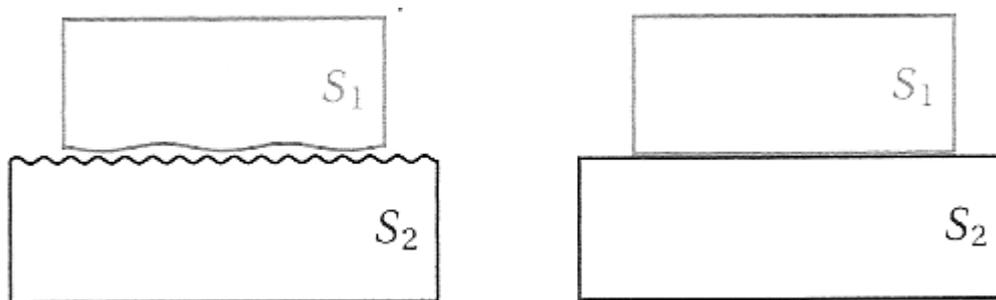
## Hypothèses.

Définir une liaison revient à choisir un modèle caractérisant les mouvements laissés libres par les surfaces de contact entre les deux solides.

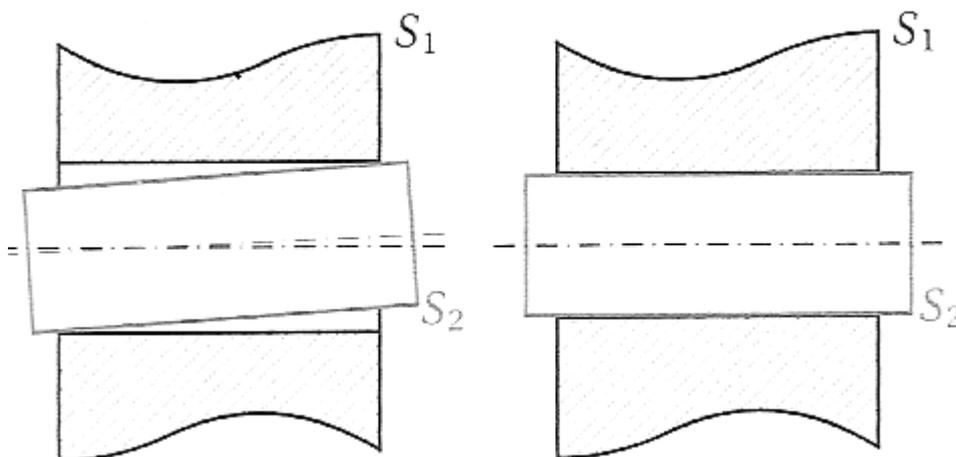
Pour cela, il faut étudier la zone de contact entre les deux solides, en faisant les hypothèses suivantes :

- ✓ Les solides en contact sont indéformables.
- ✓ La zone en contact est géométriquement parfaite (les zones de contact sont des points, des lignes ou des plans).
- ✓ Les jeux sont nuls (les jeux sont les petits espaces laissés libre au niveau de la zone de contact entre les deux solides).
- ✓ Le contact est maintenu et considéré bilatéral.

Surface réelle (défauts amplifiés) et modèle associé.



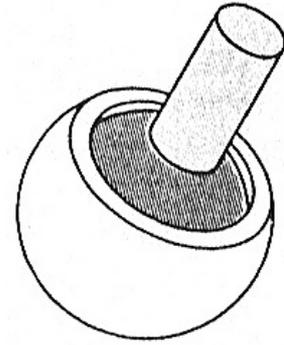
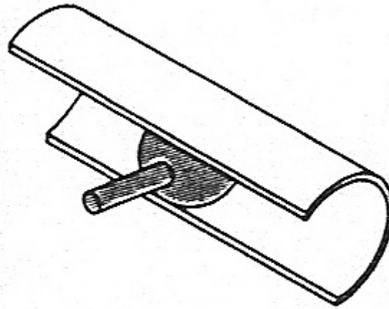
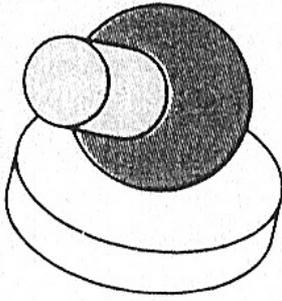
Guidage réel avec jeux (défauts amplifiés) et modèle associé.



## Géométrie du contact entre 2 solides.

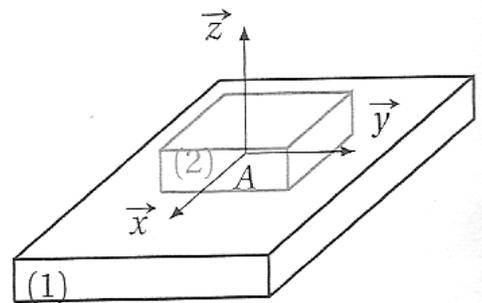
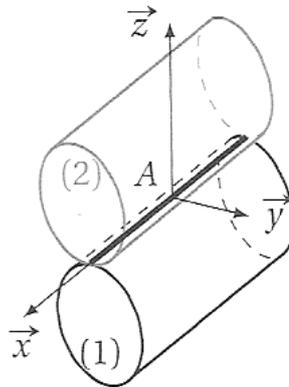
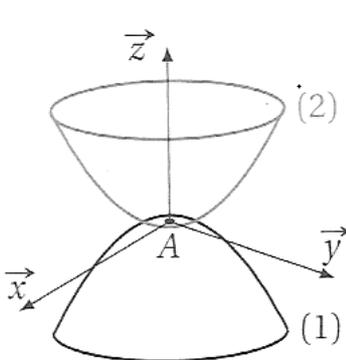
La zone de contact entre 2 solides peut être de 3 types :

- ✓ Ponctuelle (un point).
- ✓ Linéique (une ligne droite ou courbe).
- ✓ Surfaccique (un plan, un cylindre ou une sphère).



Remarque : Dans la réalité, les contacts ponctuel et linéique n'existent pas, car il y a toujours une déformation au niveau du contact. Cependant, elle reste faible.

Afin de définir les mouvements possibles, on associe un repère à partir des caractéristiques de la zone de contact.

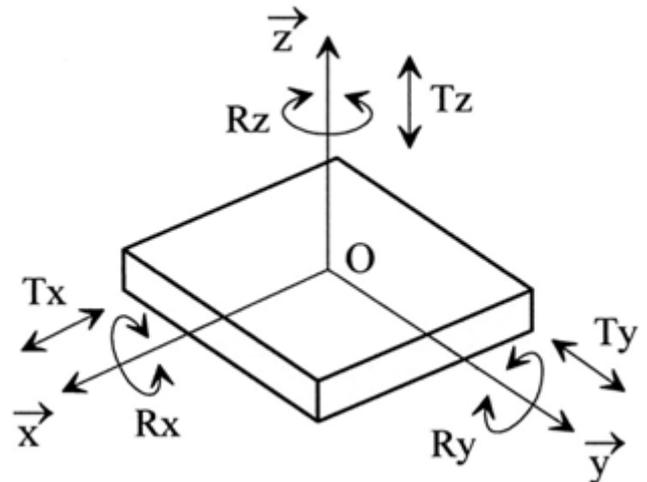


## Degré de liberté :

Une pièce libre dans tous ses déplacements est une pièce qui n'a aucune liaison avec une autre pièce. Elle peut alors se déplacer en translation et en rotation suivant trois axes (6 degrés de liberté).

Définir la liaison entre deux pièces revient à préciser le nombre de degrés de liberté possibles entre ces deux pièces. A un degré de liberté supprimé correspond un degré de liaison.

Dans tous les cas, dans une liaison entre deux pièces : Nbre de degrés de liberté + Nbre degrés de liaison = 6.

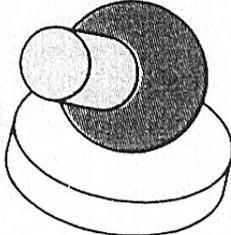
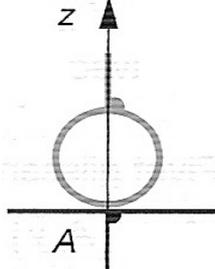
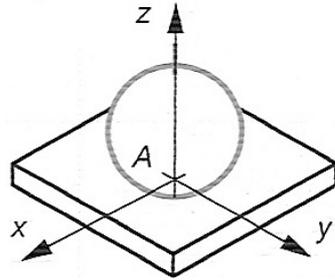


On peut distinguer :

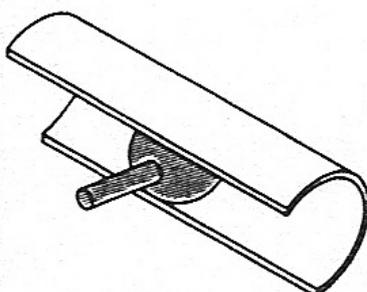
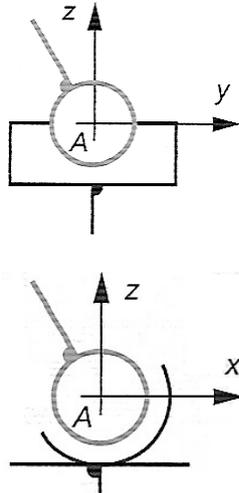
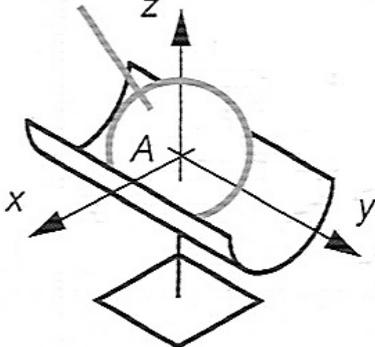
- ✓ Les liaisons élémentaires : obtenues par contact entre des surfaces géométriques élémentaires appartenant aux deux pièces.
- ✓ Les liaisons composées : réalisées par une association de 2 liaisons élémentaires.

## II. LES LIAISONS ELEMENTAIRES.

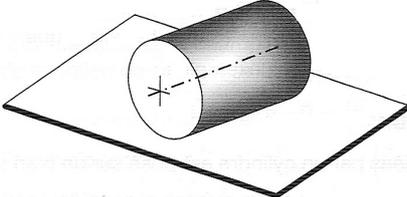
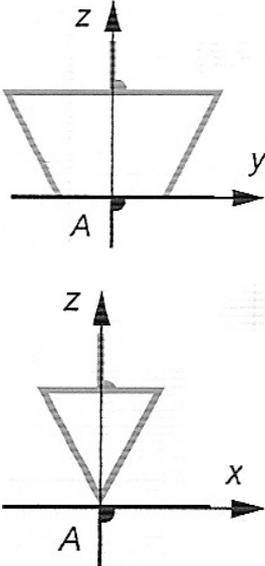
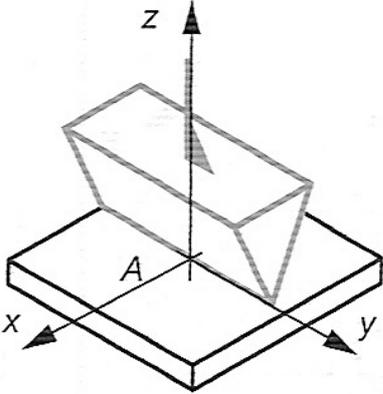
### 2.1. Liaison sphère plan (ponctuelle).

<p>Réalisation : contact sphère/plan</p> 	<p>Schématisation dans le plan</p> 	<p>Schématisation dans l'espace</p> 
<p>Degré de liberté : 5</p> <p>Rotation : 3</p> <p>Translation : 2</p>	<p>Caractéristiques géométriques :</p> <p>Normale <math>(A, \vec{z})</math></p> <p>A : point de contact</p>	<p>Torseur cinématique :</p> $\{V2/1\} = \begin{Bmatrix} \omega_x & v_x \\ \omega_y & v_y \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_A$ <p>Ce torseur a cette forme uniquement au point A</p>

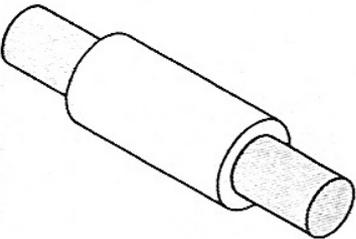
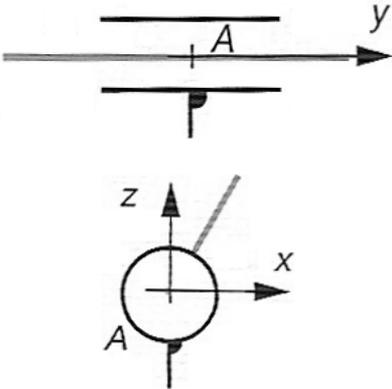
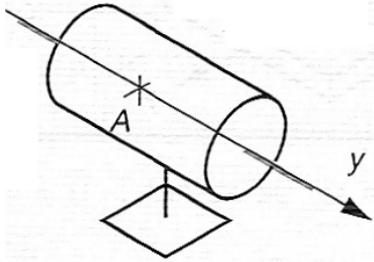
### 2.2. Liaison sphère cylindre (linéaire annulaire).

<p>Réalisation : contact sphère/cylindre</p> 	<p>Schématisation dans le plan</p> 	<p>Schématisation dans l'espace</p> 
<p>Degré de liberté : 4</p> <p>Rotation : 3</p> <p>Translation : 1</p>	<p>Caractéristiques géométriques :</p> <p>Centre A, direction <math>\vec{y}</math></p>	<p>Torseur cinématique :</p> $\{V2/1\} = \begin{Bmatrix} \omega_x & 0 \\ \omega_y & v_y \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_A$ <p>Ce torseur a cette forme uniquement au point A</p>

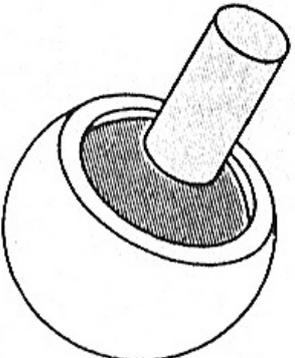
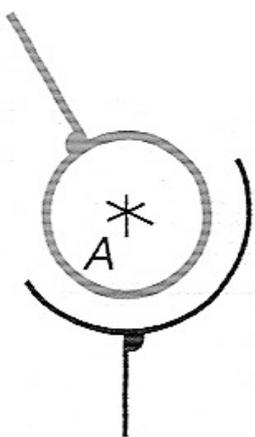
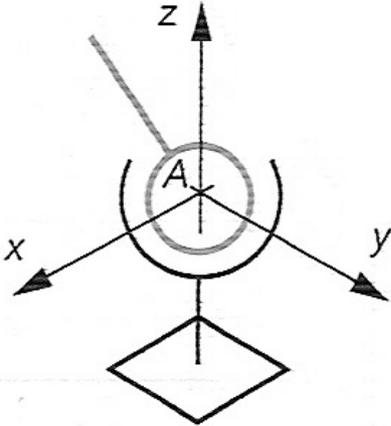
### 2.3. Liaison cylindre plan (linéaire rectiligne).

<p>Réalisation : contact cylindre/plan</p> 	<p>Schématisation dans le plan</p> 	<p>Schématisation dans l'espace</p> 
<p>Degré de liberté : 4</p> <p>Rotation : 2</p> <p>Translation : 2</p>	<p>Caractéristiques géométriques :</p> <p>Ligne de contact <math>(A, \vec{y})</math>, direction normale <math>\vec{z}</math></p>	<p>Torseur cinématique :</p> $\{V_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & v_x \\ \omega_y & v_y \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_A$ <p>Ce torseur a cette forme en tout point de la ligne de contact</p>

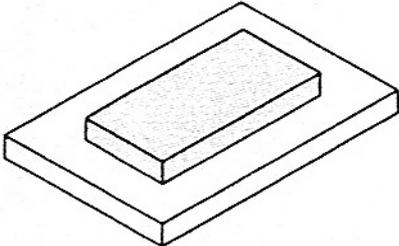
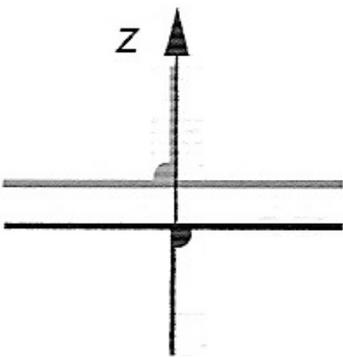
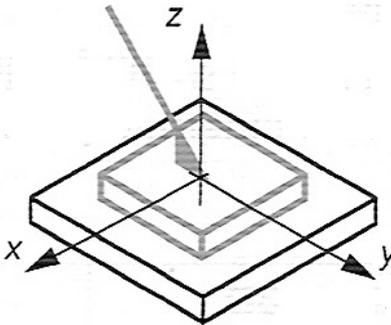
### 2.4. Liaison pivot glissant.

<p>Réalisation : contact cylindre /cylindre</p> 	<p>Schématisation dans le plan</p> 	<p>Schématisation dans l'espace</p> 
<p>Degré de liberté : 2</p> <p>Rotation : 1</p> <p>Translation : 1</p>	<p>Caractéristiques géométriques :</p> <p>Axe <math>(A, \vec{y})</math></p>	<p>Torseur cinématique :</p> $\{V_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \omega_y & v_y \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A$ <p>Ce torseur a cette forme et les mêmes valeurs en tout point de l'axe de rotation</p>

### 2.5. Liaison rotule (sphérique).

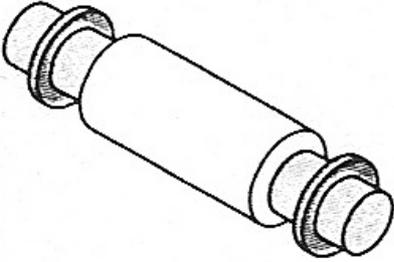
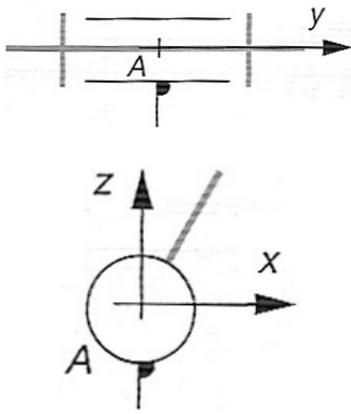
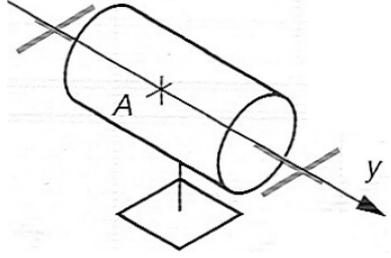
<p>Réalisation : contact sphère/ sphère</p> 	<p>Schématisation dans le plan</p> 	<p>Schématisation dans l'espace</p> 
<p>Degré de liberté : 3 Rotation : 3 Translation : 0</p>	<p>Caractéristiques géométriques : Centre A</p>	<p>Torseur cinématique :</p> $\{V_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} \omega_x & 0 \\ \omega_y & 0 \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_A$ <p>Ce torseur a cette forme uniquement au point A</p>

### 2.5. Liaison appui plan.

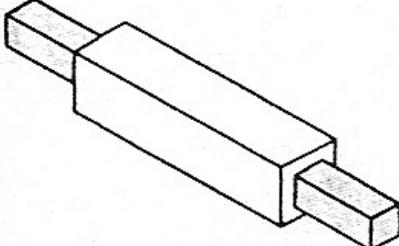
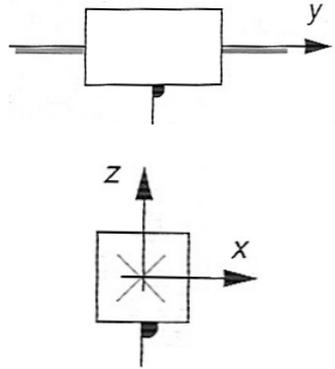
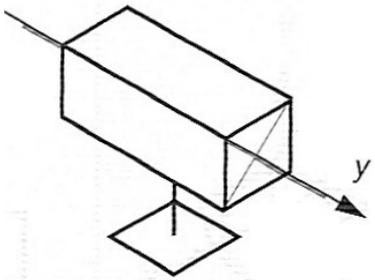
<p>Réalisation : contact plan/plan</p> 	<p>Schématisation dans le plan</p> 	<p>Schématisation dans l'espace</p> 
<p>Degré de liberté : 3 Rotation : 1 Translation : 2</p>	<p>Caractéristiques géométriques : Normale <math>\vec{z}</math></p>	<p>Torseur cinématique :</p> $\{V_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & v_x \\ 0 & v_y \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_M$ <p>Ce torseur a cette forme en tout point</p>

### III. LES LIAISONS COMPOSEES.

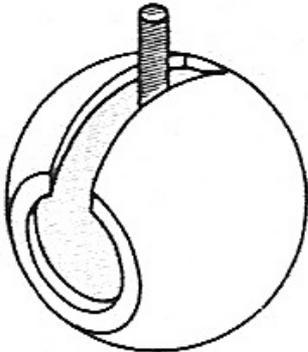
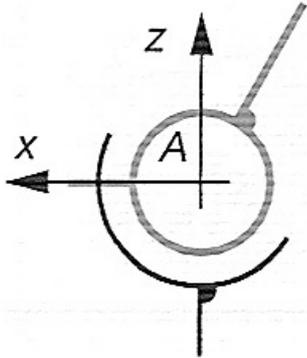
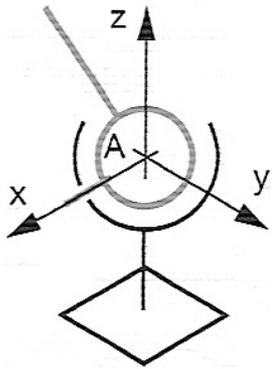
#### 3.1. Liaison pivot.

<p>Réalisation :</p> 	<p>Schématisation dans le plan</p> 	<p>Schématisation dans l'espace</p> 
<p>Degré de liberté : 1</p> <p>Rotation : 1</p> <p>Translation : 0</p>	<p>Caractéristiques géométriques :</p> <p>Axe <math>(A, \vec{y})</math></p>	<p>Torseur cinématique :</p> $\{V_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \omega_y & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A$ <p>Ce torseur a cette forme et les mêmes valeurs en tout point de l'axe de rotation</p>

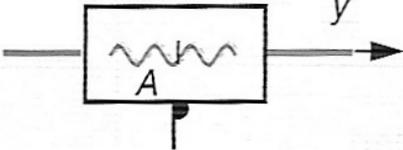
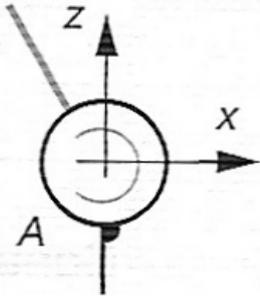
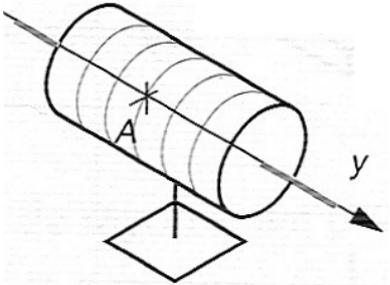
#### 3.2. Liaison glissière.

<p>Réalisation :</p> 	<p>Schématisation dans le plan</p> 	<p>Schématisation dans l'espace</p> 
<p>Degré de liberté : 1</p> <p>Rotation : 0</p> <p>Translation : 1</p>	<p>Caractéristiques géométriques :</p> <p>Direction <math>\vec{y}</math></p>	<p>Torseur cinématique :</p> $\{V_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & v_y \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$ <p>Ce torseur a cette forme et les mêmes valeurs en tout point</p>

### 3.3. Rotule à doigt (sphérique à doigt).

<p>Réalisation :</p> 	<p>Schématisation dans le plan</p> 	<p>Schématisation dans l'espace</p> 
<p>Degré de liberté : 2</p> <p>Rotation : 2</p> <p>Translation : 0</p>	<p>Caractéristiques géométriques :</p> <p>Centre A, rotation <math>(A, \vec{z})</math> interdite</p>	<p>Torseur cinématique :</p> $\{V2/1\} = \begin{Bmatrix} \omega_x & 0 \\ \omega_y & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A$ <p>Ce torseur a cette forme uniquement au point A</p>

### 3.4. Liaison hélicoïdale.

<p>Réalisation :</p> <p>Exemple :</p> <p>une vis et un écrou</p>	<p>Schématisation dans le plan</p>  	<p>Schématisation dans l'espace</p>  <p>Torseur cinématique :</p> $\{V2/1\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \omega_y & v_y \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A$
<p>Degré de liberté : 1</p> <p>Rotation : 1</p> <p>Translation : 1 (conjuguées)</p>	<p>Caractéristiques géométriques :</p> <p>Axe <math>(A, \vec{y})</math>, pas p</p>	<p>Quand on tourne d'un tour, on avance du pas p</p> <p>Ce torseur a cette forme et les mêmes valeurs en tout point de l'axe de rotation</p>

## IV. GRAPHE ET SCHEMA.

### 4.1. Exemples.

Schéma cinématique dans l'espace

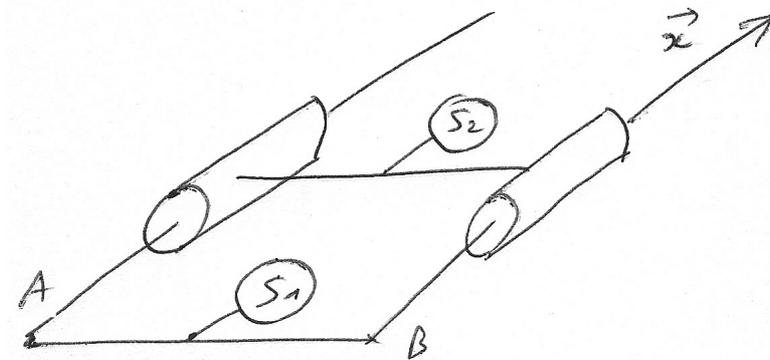
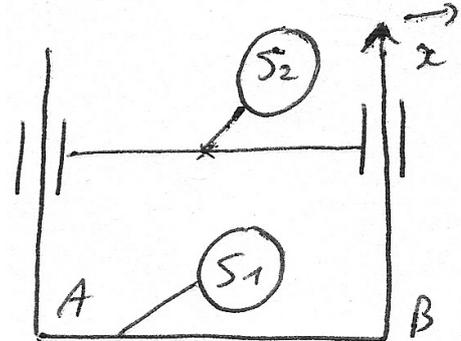
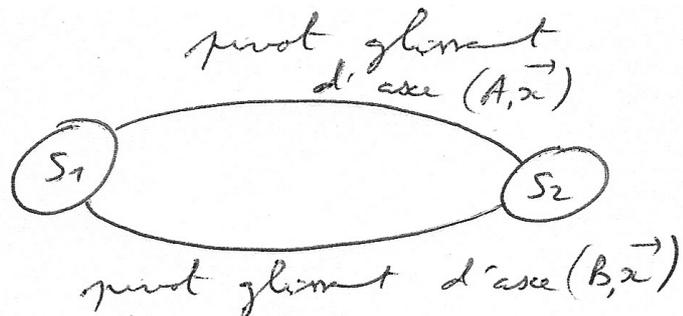


Schéma cinématique dans le plan



Graphe des liaisons :



### 4.2. Graphe des liaisons.

Le graphe de liaisons permet de recenser les solides et les liaisons composant le système.

Les solides sont représentés par des cercles.

Les liaisons sont représentées par des arcs entre les solides.

On indique le nom de la liaison et ses caractéristiques géométriques.

### 4.3. Schéma cinématique.

Le schéma cinématique permet de comprendre les mouvements du mécanisme.

Il représente, dans le plan ou dans l'espace, la disposition des solides et des liaisons.

Les solides sont représentés par des traits.

Les liaisons sont représentées par leurs représentations normalisées.

Le schéma cinématique peut faire apparaître le paramétrage afin de conduire l'étude du mécanisme.

#### 4.4. Exemple : Robot « Roméo ».

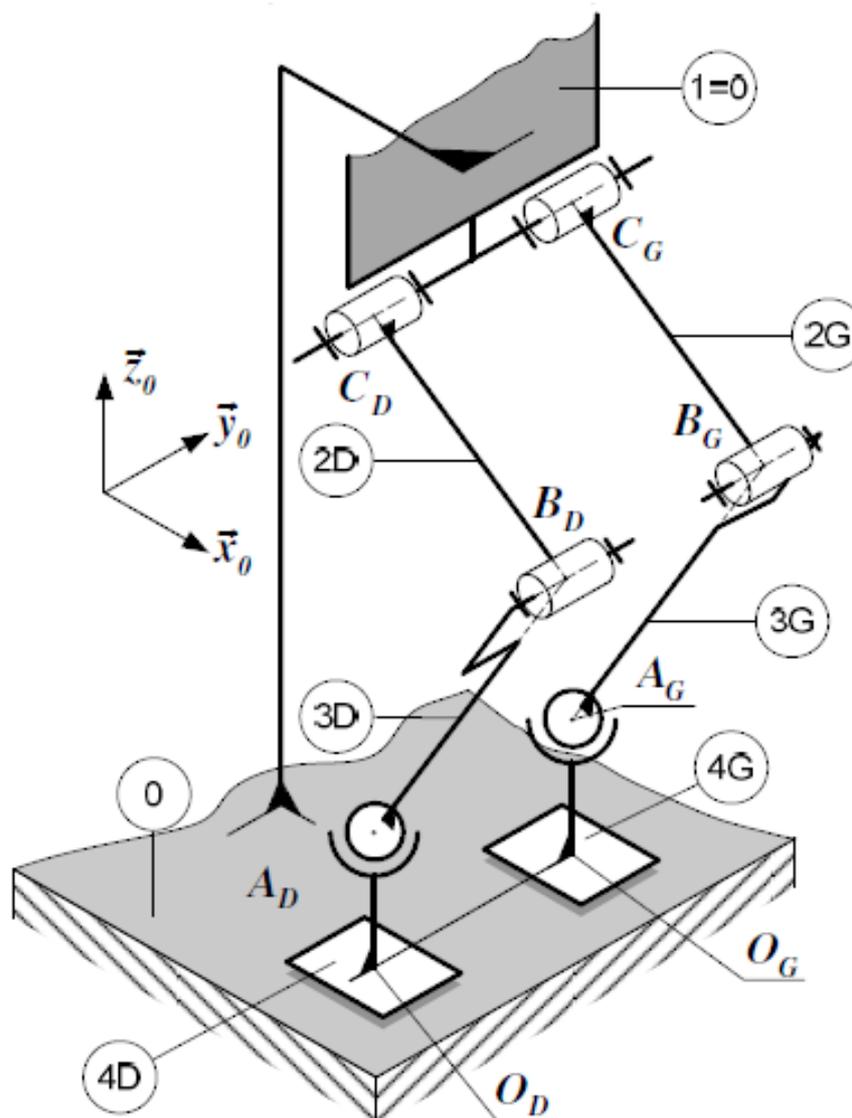
Roméo est un projet de développement d'un robot humanoïde destiné à devenir un véritable assistant des personnes en perte d'autonomie.

Pour cela, il doit être capable d'intervenir sur les objets du quotidien (ouvrir et fermer une porte, manipuler un verre, une bouteille, un trousseau de clés...).

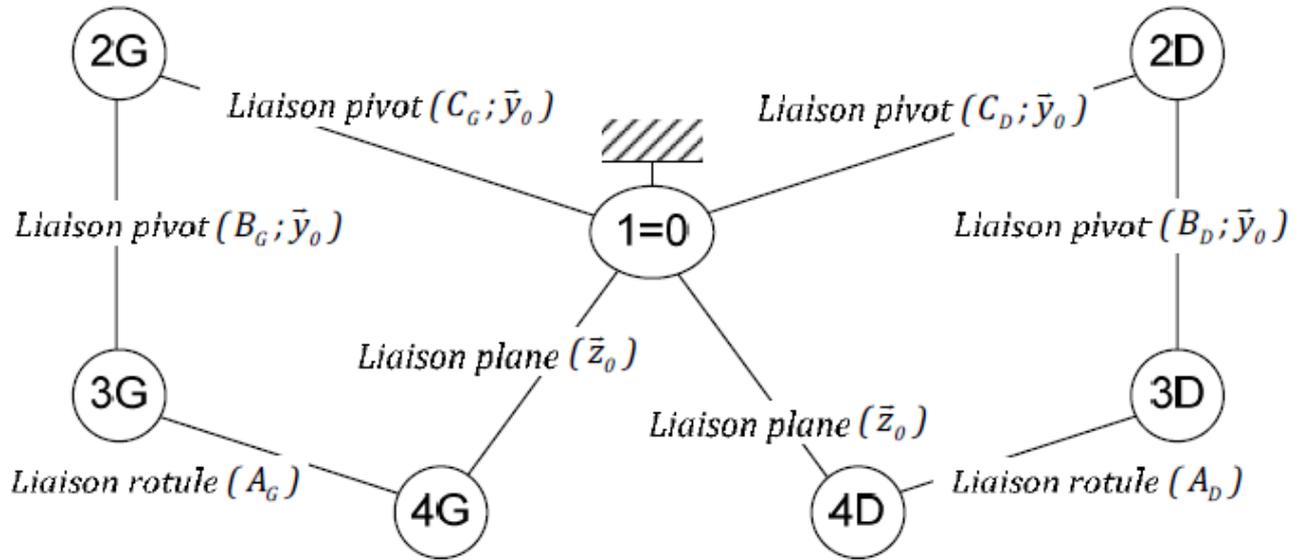
Mais il doit également aider une personne à se déplacer à domicile, et même, lui porter secours en cas de chute.



Schéma cinématique des jambes du robot.



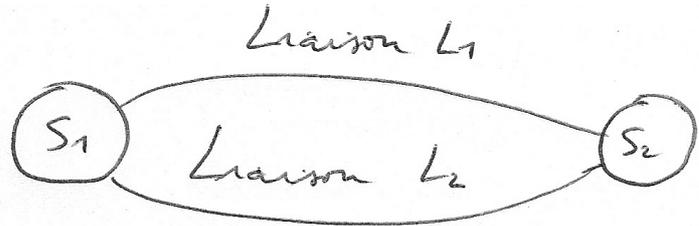
Grphe des liaisons des jambes du robot.



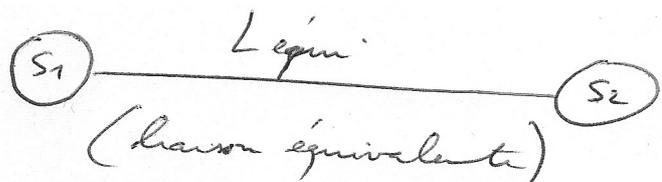
## V. COMPOSITION DE LIAISONS.

### 5.1. Liaisons en parallèle.

Deux solides sont en liaisons parallèles si la chaîne de solide est de la forme :



Liaison équivalente :



Le torseur cinématique de la liaison équivalente doit être compatible avec les torseurs cinématiques des liaisons  $L_1$  et  $L_2$ .

$$\{VL_{équi}\}_M = \{VL_1\}_M = \{VL_2\}_M$$

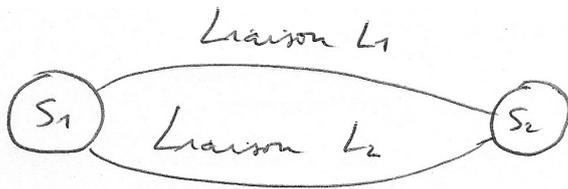
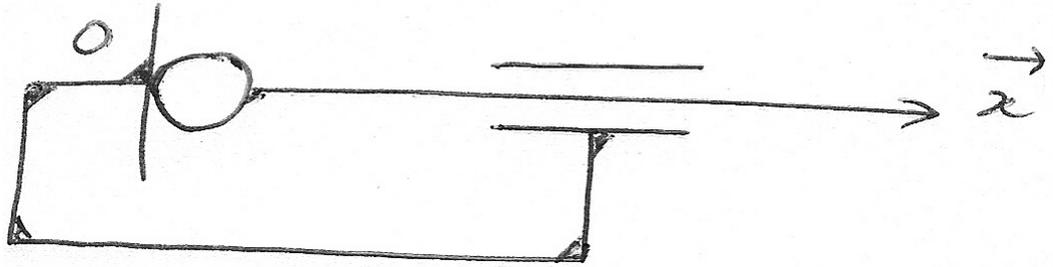
Remarques :

- ✓ Les mobilités s'annulent (si une liaison interdit le mouvement, la liaison équivalente interdit le mouvement).
- ✓ Il faut exprimer les torseurs aux mêmes points.
- ✓ Pour simplifier l'écriture, on utilise des notations particulières :

$$\{VL1\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}(S2/S1) \\ V(M \in S2/S1) \end{array} \right\}_M = \left\{ \begin{array}{ll} \alpha_1 & u_1 \\ \beta_1 & v_1 \\ \gamma_1 & w_1 \end{array} \right\}_M$$

(Les composantes traduisent des mobilités).

Exemple :



L1 : ponctuelle en O de normale  $\bar{x}$

L2 : pivot glissant d'axe  $(O, \bar{x})$

$$\{VL1\} = \left\{ \begin{array}{ll} \alpha_1 & 0 \\ \beta_1 & v_1 \\ \gamma_1 & w_1 \end{array} \right\}_O$$

$$\{VL2\} = \left\{ \begin{array}{ll} \alpha_2 & v_2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_O$$

$$\{VLéqui\} = \left\{ \begin{array}{ll} \alpha & u \\ \beta & v \\ \gamma & w \end{array} \right\}_O$$

$$\{VLéqui\}_O = \{VL1\}_O = \{VL2\}_O \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \alpha_1 = \alpha_2 \\ \beta = \beta_1 = 0 \\ \gamma = \gamma_1 = 0 \\ u = 0 = u_2 \\ v = v_1 = 0 \\ w = w_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \{VLéqui\} = \left\{ \begin{array}{ll} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_O$$

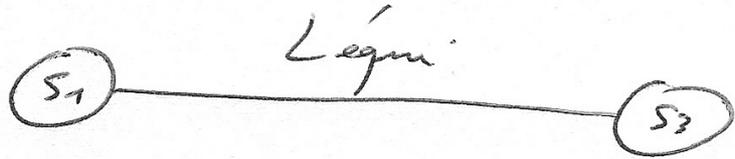
L<sub>équi</sub> : pivot d'axe  $(O, \bar{x})$

### 5.2. Liaisons en séries.

Trois solides sont en liaisons séries si la chaîne de solide est de la forme :



Liaison équivalente :

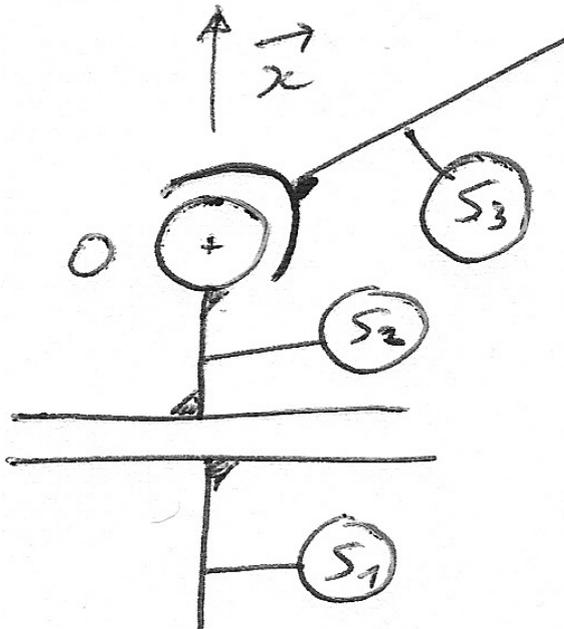
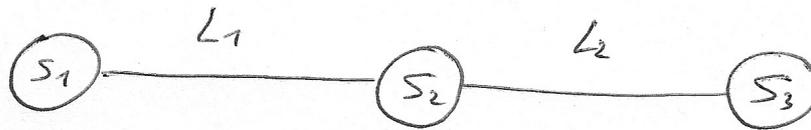


La composition des torseurs cinématiques permet d'écrire :

$$\{VLéqui\}_M = \{VL_1\}_M + \{VL_2\}_M$$

Remarque : Les mobilités s'ajoutent (si une liaison autorise le mouvement, la liaison équivalente autorise le mouvement).

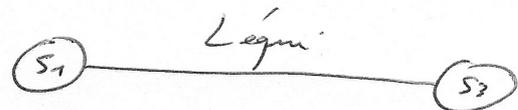
Exemple :



L1 : appui plan de normale  $\vec{x}$

L2 : rotule de centre O.

On cherche :



$$\{VL1\} = \begin{Bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & v_1 \\ 0 & w_1 \end{Bmatrix}_O$$

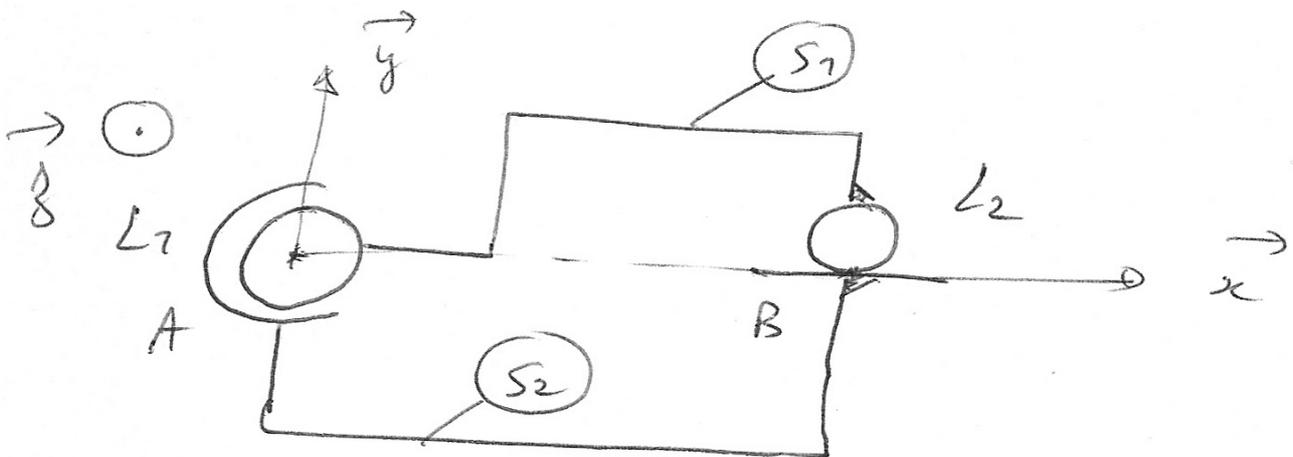
$$\{VL2\} = \begin{Bmatrix} \alpha_2 & 0 \\ \beta_2 & 0 \\ \gamma_2 & 0 \end{Bmatrix}_O$$

$$\{VLéqui\} = \begin{Bmatrix} \alpha & u \\ \beta & v \\ \gamma & w \end{Bmatrix}_O$$

$$\{VL_{\text{équi}}\}_O = \{VL_1\}_O + \{VL_2\}_O \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \\ \beta = 0 + \beta_2 \\ \gamma = 0 + \gamma_2 \\ u = 0 + 0 \\ v = v_1 + 0 \\ w = w_1 + 0 \end{cases} \Rightarrow \{VL_{\text{équi}}\} = \begin{Bmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & v \\ \gamma & w \end{Bmatrix}_O$$

L<sub>équi</sub> : ponctuelle en O de normale  $\vec{x}$

### 5.3. Exemple de composition de liaisons avec changement de point.



$\begin{matrix} \text{Liaison } L_1 \\ \text{Liaison } L_2 \end{matrix}$ 
 $\{VL1\} = \begin{Bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ \beta_1 & 0 \\ \gamma_1 & 0 \end{Bmatrix}_A$ 
 $\{VL2\} = \begin{Bmatrix} \alpha_2 & u_2 \\ \beta_2 & 0 \\ \gamma_2 & w_2 \end{Bmatrix}_B$

On cherche le torseur de la liaison équivalente au point A. Il faut exprimer les torseurs en A.

$$\{VL2\} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega} \\ \vec{V}(B) \end{Bmatrix}_B \text{ on veut } \{VL2\} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega} \\ \vec{V}(A) \end{Bmatrix}_A \quad \vec{V}(A) = \vec{V}(B) + \vec{\Omega} \wedge \vec{BA}$$

$$\vec{V}(A) = \begin{pmatrix} u_2 \\ 0 \\ w_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 \\ -l \cdot \gamma_2 \\ w_2 + l \cdot \beta_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{VL2\} = \begin{Bmatrix} \alpha_2 & u_2 \\ \beta_2 & -l \cdot \gamma_2 \\ \gamma_2 & w_2 + l \cdot \beta_2 \end{Bmatrix}_A$$

$$\{VLéqui\} = \left\{ \begin{array}{cc} \alpha & u \\ \beta & v \\ \gamma & w \end{array} \right\}_A \quad \{VLéqui\}_A = \{VL_1\}_A = \{VL_2\}_A \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \alpha_1 = \alpha_2 \\ \beta = \beta_1 = \beta_2 \\ \gamma = \gamma_1 = \gamma_2 \\ u = 0 = u_2 \\ v = 0 = -l.\gamma_2 \\ w = 0 = w_2 + l.\beta_2 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \{VLéqui\} = \left\{ \begin{array}{cc} \alpha & 0 \\ \beta & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_A \Rightarrow \text{Rotule à doigt de centre A, rotation } (A, \vec{z}) \text{ interdite}$$

#### 5.4. Remarque.

Une approche intuitive basée sur l'analyse des mouvements relatifs possibles permet généralement de déterminer la liaison équivalente.

## VI. SCHEMA CINEMATIQUE..

### Utilité du schéma cinématique en ingénierie.

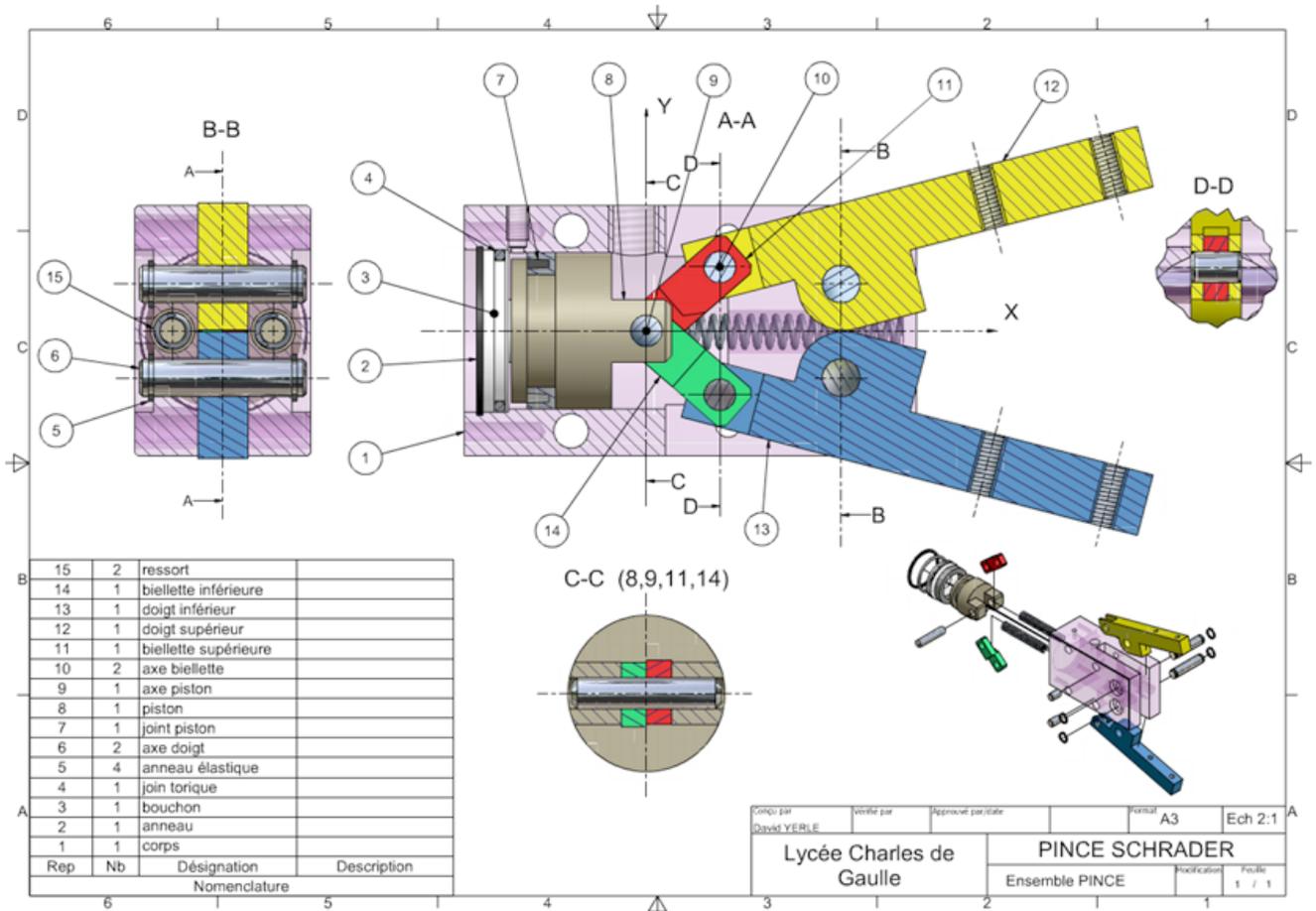
- ✓ Comprendre le fonctionnement d'un mécanisme (cas de mécanismes existants).  
La lecture des plans d'ensemble n'est pas toujours aisée et il est utile d'en simplifier la représentation.
- ✓ Lorsque le mécanisme n'existe pas (phase de conception), on a besoin d'un schéma illustrant le fonctionnement attendu sans toutefois limiter le concepteur dans les formes et dimensions à concevoir.

Le schéma cinématique minimal est la schématisation préliminaire de toute conception d'un mécanisme.

Seules les liaisons entre solides et les positions relatives des liaisons vont influencer les mouvements du mécanisme. La forme des pièces et la réalisation des liaisons ne sont pas prises en compte.

Le schéma cinématique minimal rend compte uniquement des mouvements possibles entre les différents sous-ensembles qui constituent le mécanisme.

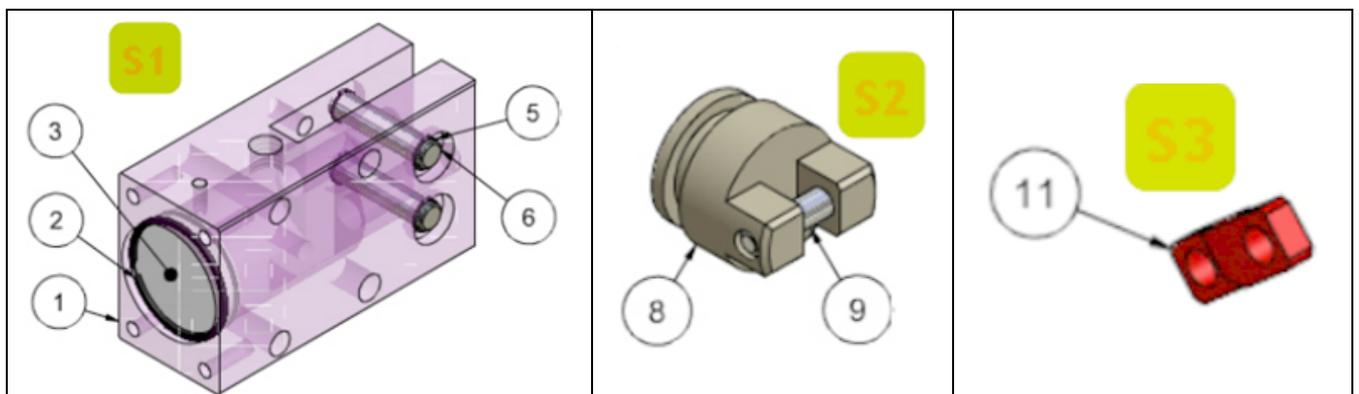
# Réalisation d'un schéma cinématique minimal à partir d'un dessin de définition : exemple d'une pince de robot.

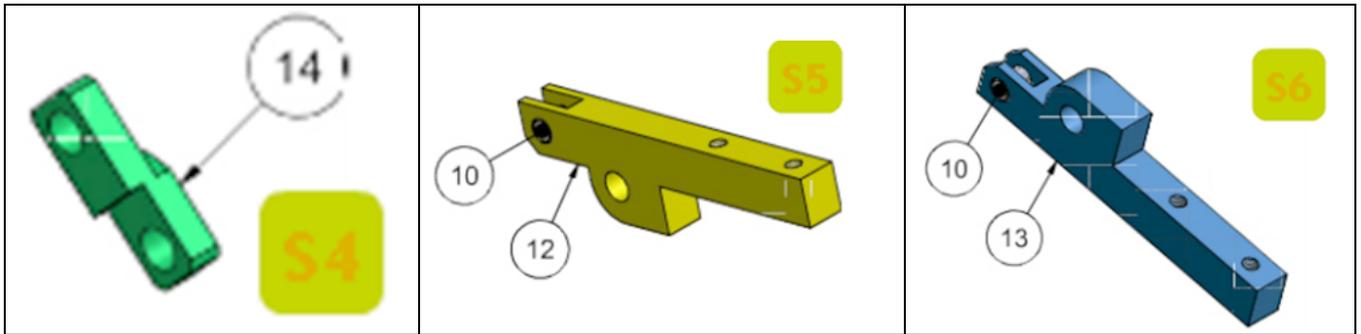


## ⇒ Etape 1: définition des classes d'équivalence cinématiques.

Il s'agit de regrouper les pièces n'ayant aucun mouvement relatif les unes par rapport aux autres en sous-ensemble « cinématiquement lié », appelé classes d'équivalences cinématiques.

Chaque sous-ensemble est désigné par le repère de la pièce la plus importante. On obtient ainsi pour la pince de préhension étudiée :





S1 : corps {1,2,3,4,5,6}

S2 : piston {8,9}

S3 : bielle supérieure {11}

S4 : bielle inférieure {14}

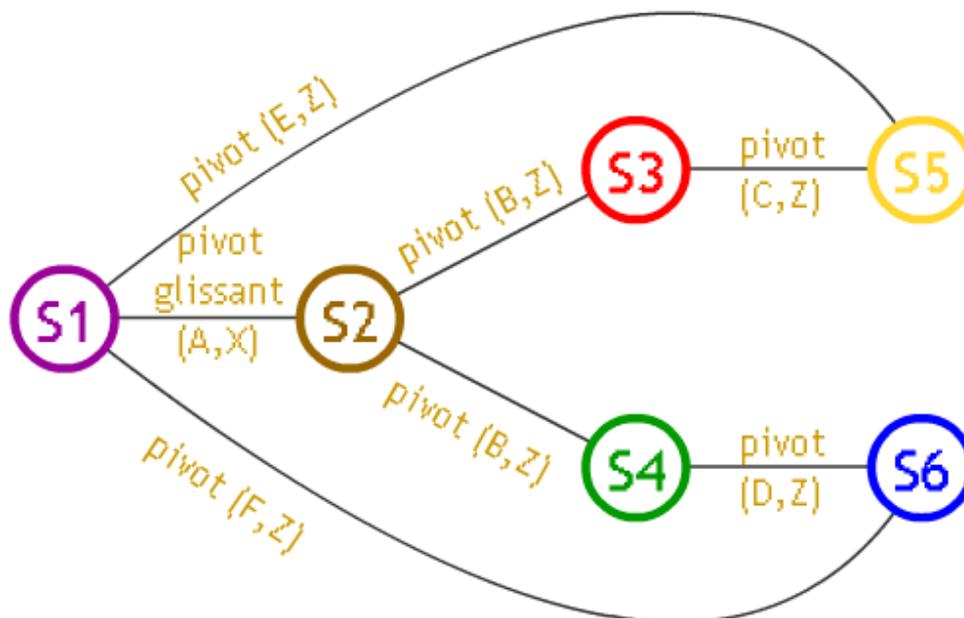
S5 : doigt supérieur {10,12}

S6 : doigt inférieur {10,13}

⇒ Etape 2: définition des liaisons et élaboration du graphe de structure

Il s'agit d'analyser la géométrie des surfaces de contact et les mouvements relatifs associés entre les sous-ensembles « cinématiquement liés » afin d'en déduire une modélisation des liaisons.

On peut alors établir le graphe de structure du mécanisme.



#### Remarques :

- ✓ Lorsqu'on étudie la liaison entre deux classes, il faut imaginer le reste du mécanisme retiré et analyser uniquement les mouvements relatifs entre les deux classes par l'intermédiaire de la liaison étudiée.
- ✓ On étudie les mouvements relatifs autorisés dans le repère local de la liaison.
- ✓ Une modélisation est toujours imparfaite et sujet à discussions. On pourra selon l'étude et la finalité du schéma négliger les jeux et petits mouvements autorisés par une liaison ou au contraire les considérer pour une étude plus complexe et précise. Il faut donc pouvoir justifier le modèle.

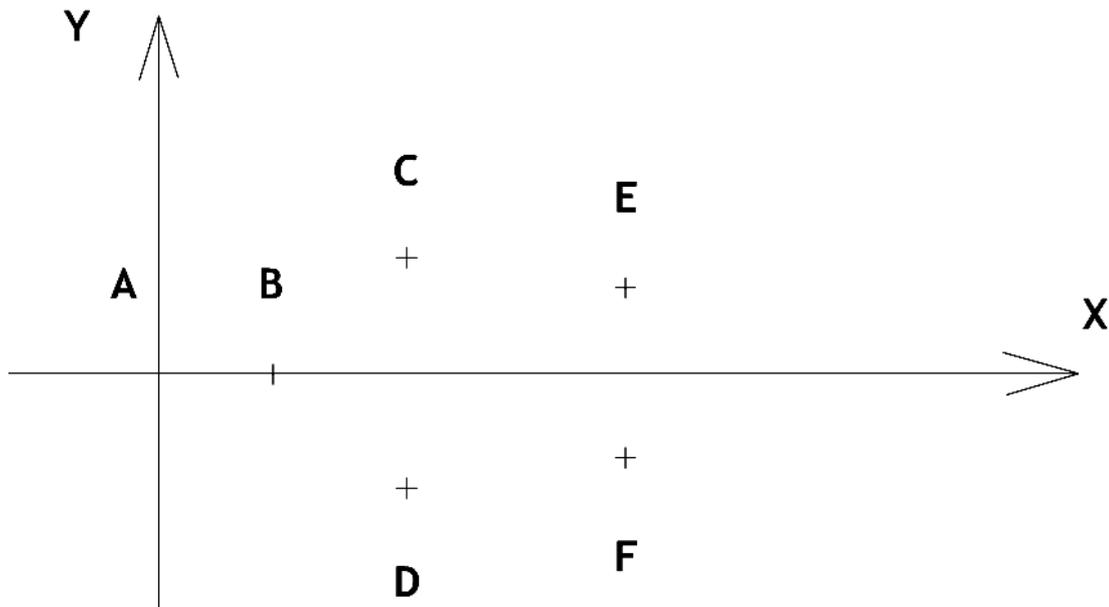
⇒ Etape 3: définition des liaisons et élaboration du graphe de structure.

La dernière étape consiste à tracer le schéma cinématique minimal dans le plan ou dans l'espace.

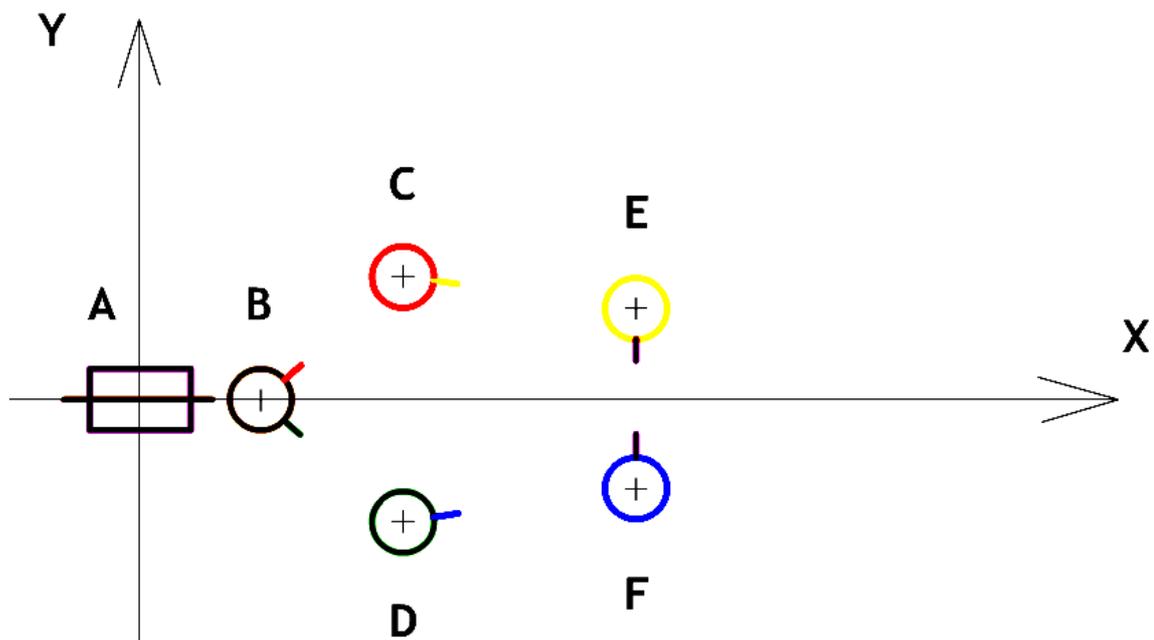
Il faut de positionner un à un les symboles de chaque liaison en respectant leur position et orientation relative. Puis on relie les liaisons entre elles en respectant les classes d'équivalence.

Pour la représentation du schéma cinématique, trois étapes sont conseillés :

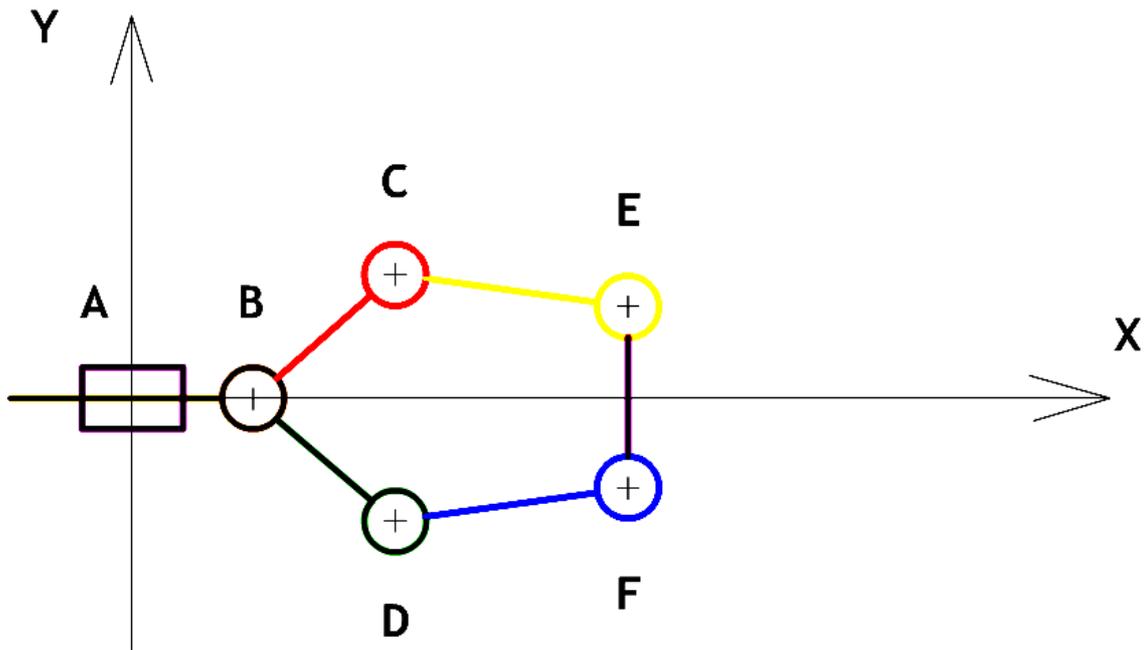
1. Positionner, en respectant les proportions, les centres ou les axes des liaisons.



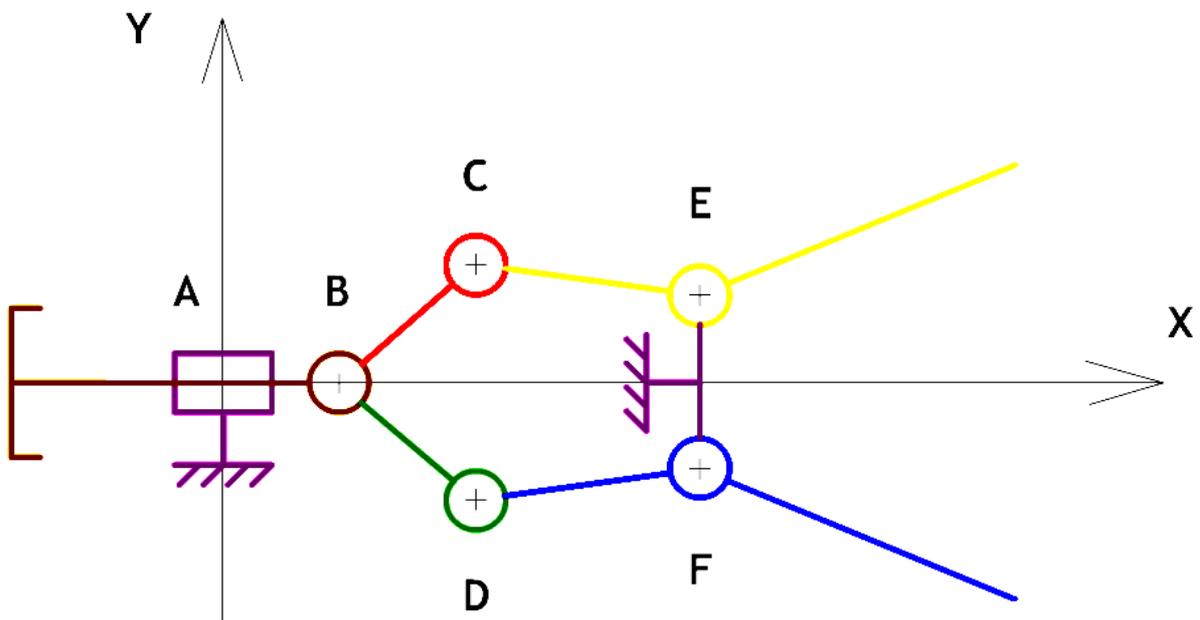
2. Mettre en place les représentations des liaisons entre les classes d'équivalence en respectant l'orientation de chaque liaison.



Représenter les sous-ensembles par des traits en les connectant aux symboles des liaisons.



On peut améliorer la lisibilité en schématisant la forme de classes d'équivalences associées à des pièces importantes (piston, pinces ...)



#### Remarques :

- ✓ Le sous-ensemble qui fait office de référence (souvent le bâti ou le corps du mécanisme) est identifié dans le schéma par un trait bordé de hachures.
- ✓ L'utilisation de couleurs dans le schéma est un facteur important de lisibilité.

## VII. Exemple de réalisation d'une liaison pivot avec des roulements à billes.

Dessin de définition.

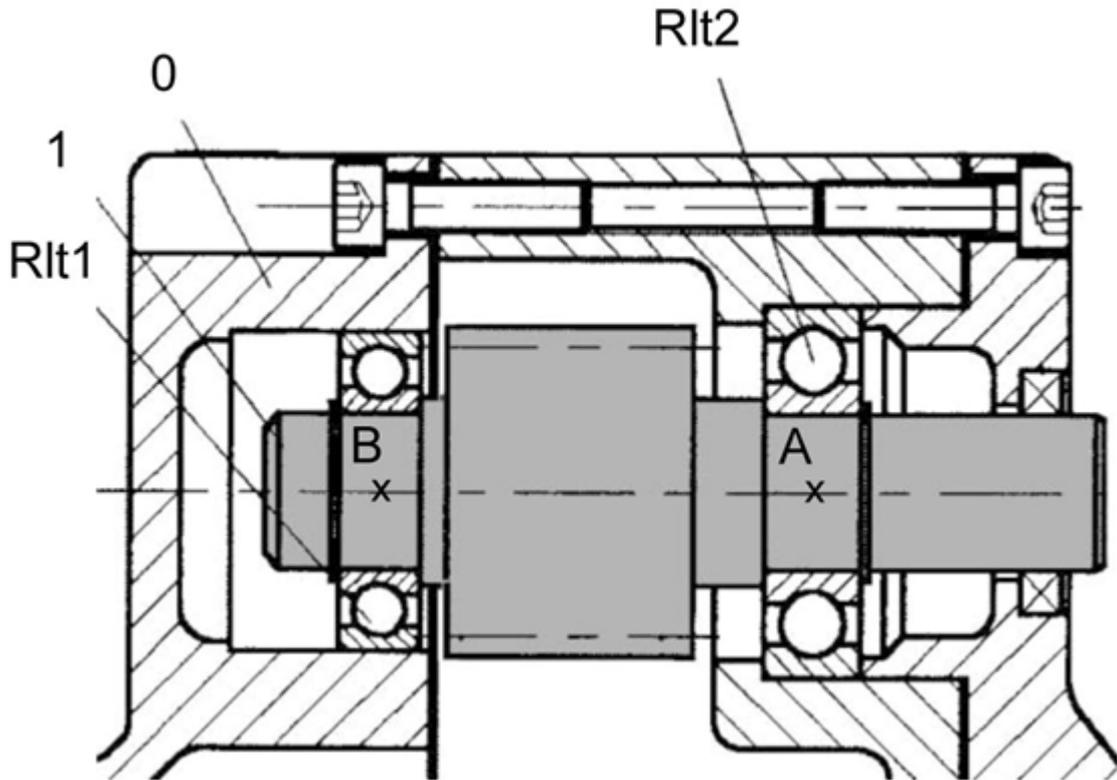


Schéma cinématique

