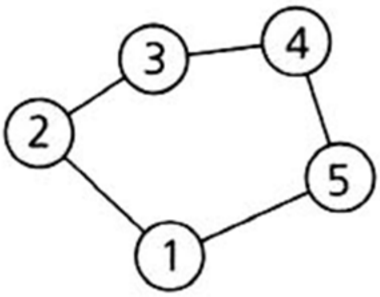
LIAISONS 2 : ETUDE DES CHAINES DE SOLIDES

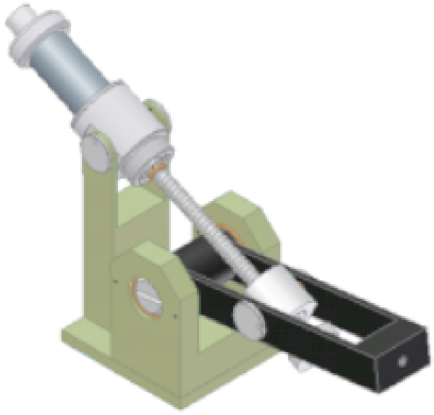
ETUDE DES CHAINES DE SOLIDES.

1. Les différentes chaines de solides.

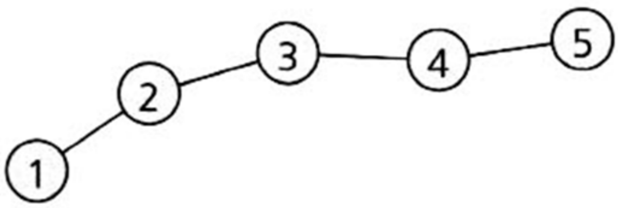
Selon la forme du graphe de structure d'un mécanisme, on parle de chaîne de liaisons fermée, complexe ou ouverte.

Chaîne fermée.

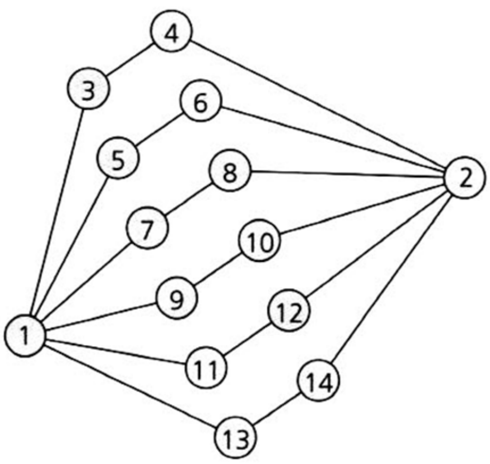


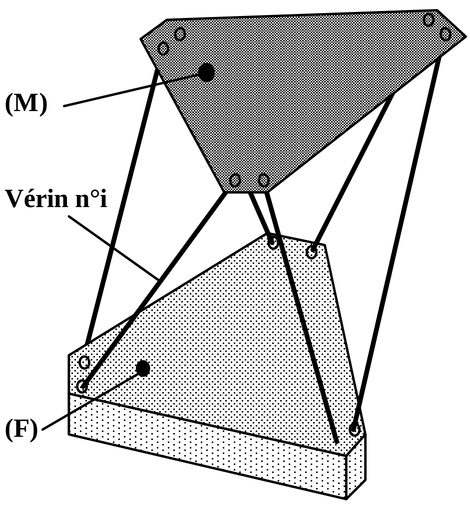


Chaîne ouverte.



Chaîne complexe.





2. Loi entrée/sortie.

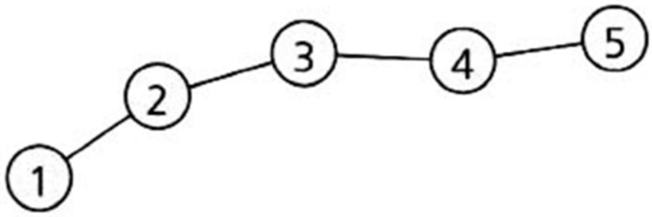
On appelle « loi entrée/sortie » d'un système mécanique, l'ensemble des relations entre les paramètres de position et d'orientation du « solide d'entrée » et ceux du « solide de sortie ».

Le « solide d'entrée » est entrainé par un actionneur (moteur, vérin…).

Le « solide de sortie » est le solide que l'on souhaite positionner ou mettre en mouvement.

La manière dont on obtient cette loi entrée-sortie dépend de la configuration de la chaine cinématique.

3. Loi entrée/sortie d'une chaîne ouverte.



Dans ce type de mécanisme les paramètres cinématiques sont tous indépendants, il faut donc piloter chaque paramètre cinématique.

Il est difficile d'implanter plus d'un actionneur pour piloter le mouvement d'une liaison, ce qui conduit le plus souvent à construire ces mécanismes sur la base de liaisons à un degré de liberté. On utilise principalement des liaisons pivots et glissières. Chaque liaison ainsi pilotée peut s'appeler un axe et on parle alors de robots trois axes, quatre axes, etc.…

Pour ce type de système, on s'intéresse donc généralement à l'effecteur (une pince, une caméra, un pistolet de peinture…) placé en bout de chaine cinématique ouverte c'est le solide de sortie).

Notion de modèle géométrique

La loi entrée-sortie concerne la relation entre les coordonnées articulaires (c'est-à-dire les paramètres pilotant les actionneurs) et les coordonnées opérationnelles (ou généralisées) (c'est-à-dire les coordonnées d'un point de l'effecteur en bout de chaine).

Entrée : coordonnées articulaires (pilotées par des actionneurs).

Sortie : coordonnées opérationnelles ou généralisées (position et orientation de l'effecteur : x, y, z, α, β, γ y).

On distingue le modèle géométrique direct et le modèle géométrique indirect:

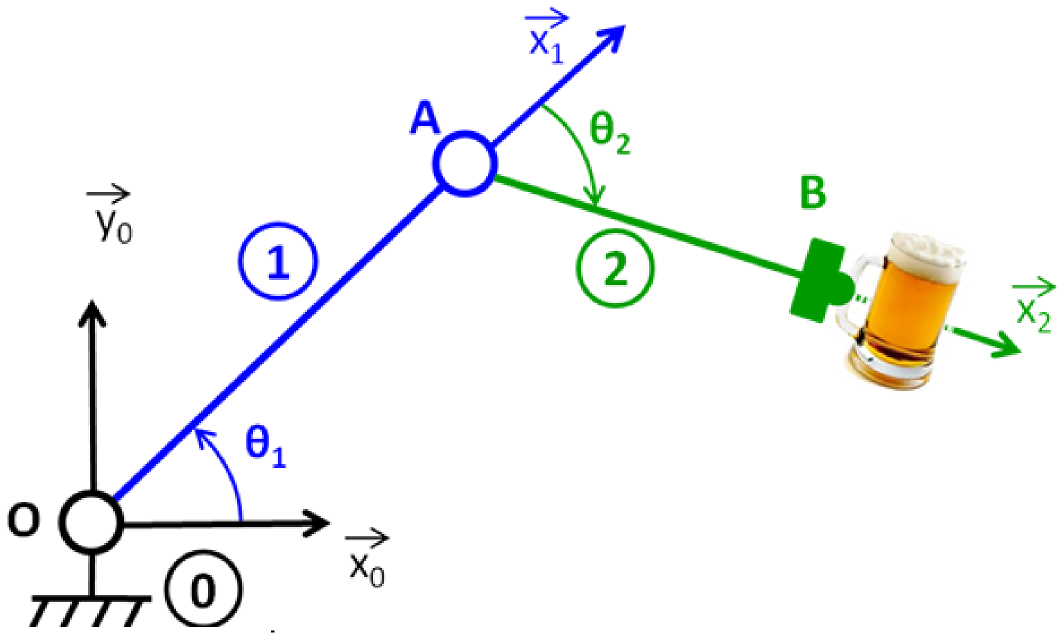
- ✓ Le modèle géométrique direct permet de lier les coordonnées opérationnelles (ou généralisées) aux coordonnées articulaires.
- ✓ Le modèle géométrique indirect (ou inverse) permet de lier les coordonnées articulaires aux coordonnées opérationnelles (ou généralisées).

Méthode : calcul de modèle géométrique direct

Le modèle géométrique direct permet de lier les coordonnées opérationnelles aux coordonnées articulaires.

Il s’obtient généralement à partir d’une relation de Chasles dont l’expression est ensuite projetée dans la base dans laquelle sont exprimées les coordonnées opérationnelles.

Exemple : robot manipulateur 2 axes.



Objectif : Trouver les coordonnées de l'effecteur caractérisant la position de la pince $\overrightarrow{OB} = x_B.\vec{x}_0 + y_B.\vec{y}_0$ en fonction des paramètres d'entrée θ_1 et θ_2 qui sont pilotées par des moteurs.

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = a.\vec{x}_1 + b.\vec{x}_2 .$$

On projette dans la base de référence.

$$\vec{x}_1 = \cos\theta_1.\vec{x}_0 + \sin\theta_1.\vec{y}_0$$

$$\vec{x}_2 = \cos(\theta_1 + \theta_2).\vec{x}_0 + \sin(\theta_1 + \theta_2).\vec{y}_0$$

⇨ $$\overrightarrow{OB} = \left(a.\cos\theta_1 + b.\cos(\theta_1 + \theta_2)\right).\vec{x}_0 + \left(a.\sin\theta_1 + b.\sin(\theta_1 + \theta_2)\right).\vec{y}_0$$

Calcul de modèle géométrique indirect (= inverse)

Le modèle géométrique indirect permet de lier les coordonnées articulaires aux coordonnées opérationnelles (ou généralisées).

Ce modèle est indispensable pour définir les consignes de position articulaires à émettre vers les actionneurs (moteurs par exemple).

Le modèle géométrique indirect se construit en inversant le modèle géométrique direct.

Exemple : robot manipulateur 2 axes

Objectif : Trouver des paramètres d'entrée θ_1 et θ_2 en fonction des coordonnées de l'effecteur x_B et y_B .

Il faut inverser le modèle géométrique direct :

$x_B = a.\cos\theta_1 + b.\cos(\theta_1 + \theta_2)$ et $y_B = a.\sin\theta_1 + b.\sin(\theta_1 + \theta_2)$

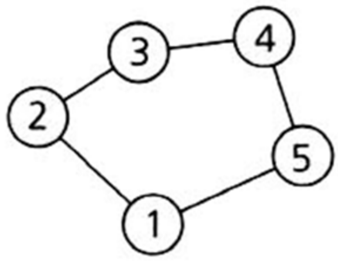
Exemple de calcul :

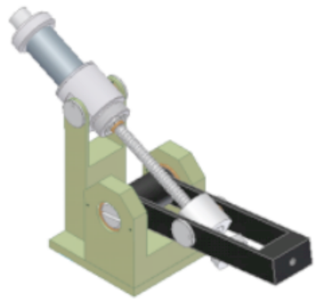
$$(x_B)^2 + (y_B)^2 = a^2 + b^2 + 2.a.b.(\cos\theta_1.\cos(\theta_1+\theta_2) + \sin\theta_1 + b.\sin(\theta_1+\theta_2))$$
$$(x_B)^2 + (y_B)^2 = a^2 + b^2 + 2.a.b.\cos\theta_2$$
$$\Rightarrow \quad \theta_2 = \arccos\left(\frac{(x_B)^2 + (y_B)^2 - a^2 - b^2}{2.a.b}\right)$$

De même il faut chercher θ_1 en fonction de x_B et y_B et des constantes...

Remarque : L’orientation de la pince est donnée par l’angle : $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_2) = \theta_1 + \theta_2$

4. Loi entrée/sortie d’une chaîne fermée.





Certaines caractéristiques géométriques (longueur de bielles…) du système sont invariantes et sont supposées connues.

D’autres paramètres (angle de rotation d’un arbre…) permettent de caractériser les mouvements des solides les uns par rapport aux autres.

La loi entrée-sortie est une loi exprimant le(s) paramètre(s) de sortie du système uniquement en fonction du(des) paramètre(s) d’entrée et des caractéristiques géométriques invariantes du système.

Entrée/Sortie d'une chaîne de solide fermée par fermeture géométrique

La méthode consiste à écrire une relation vectorielle (relation de Chasles) en passant par les points caractéristiques des différentes liaisons en parcourant la chaîne fermée.

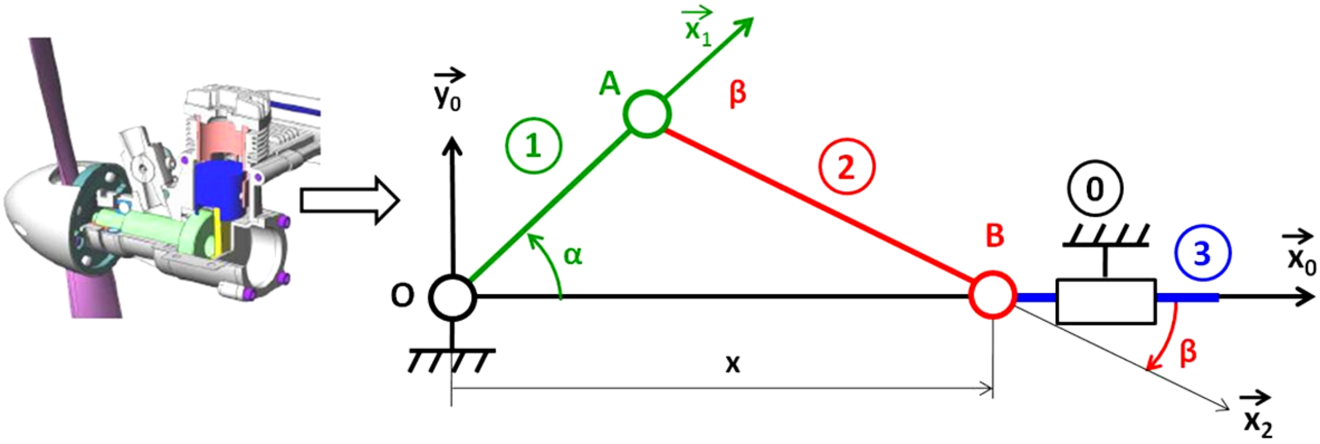
On projette ensuite la relation obtenue dans une base judicieusement choisie, on obtient alors des équations scalaires (2 dans le plan ou 3 dans l’espace).

On choisit en général la base de référence ou une base intermédiaire entre toutes les bases définies pour limiter les projections.

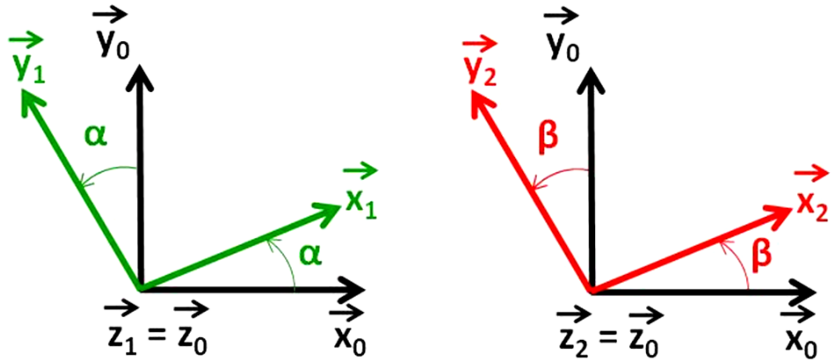
On élimine enfin les paramètres intermédiaires en combinant les équations afin d’obtenir une relation exprimant la sortie en fonction de l’entrée et des constantes du mécanisme.

Exemple: loi entrée-sortie d'un système bielle-manivelle (micromoteur 2T)

Schéma cinématique du moteur :



Figures planes de changement de Base :



La longueur de la manivelle 1 (OA=r) et de la bielle 2 (AB=l) sont des caractéristiques géométriques connues et invariantes.

Les paramètres α , β et x sont des paramètres de position caractérisant les mouvements du mécanisme.

Le paramètre d'entrée est α , il traduit la rotation de la manivelle 1 par rapport à 0.

Le paramètre de sortie est x , il traduit la translation du piston 3 par rapport à 0.

Le paramètre β est un paramètre intermédiaire qui traduit la rotation de la bielle 2 par rapport à 0.

Fermeture géométrique : $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$ ⇨ $x.\vec{x}_0 = r.\vec{x}_1 + l.\vec{x}_2$

Projection dans la Base B0 :

$$\vec{x}_1 = \cos\alpha.\vec{x}_0 + \sin\alpha.\vec{y}_0$$

$$\vec{x}_2 = \cos\beta.\vec{x}_0 + \sin\beta.\vec{y}_0$$

Obtient 2 équations scalaires :

$$x = r.\cos\alpha + l.\cos\beta$$

$$r.\sin\alpha + l.\sin\beta = 0$$

On retrouve donc un système avec 3 paramètres et 2 équations, soit un système à un degré de liberté.

On cherche une équation qui correspond à la loi entrée-sortie du système, x en fonction de α et des constantes du mécanisme.

Il faut utiliser les 2 relations et faire « disparaitre » le paramètre intermédiaire β .

Avec la deuxième équation : $$\sin\beta = \frac{-r.\sin\alpha}{l}$$

On utilise : $(\cos\beta)^2 + (\sin\beta)^2 = 1$ ⇨ $\cos\beta = \sqrt{1-(\sin\beta)^2}$

Avec la première équation : $$x = r.\cos\alpha + l.\sqrt{1-(\frac{r.\sin\alpha}{l})^2}$$

5. Fermeture cinématique

Dans le cas d'un mécanisme à chaine fermée, on peut aussi écrire la fermeture cinématique.

Exemple: loi entrée-sortie géométrique d'un système bielle-manivelle (micromoteur 2T)

La fermeture cinématique s'écrit :

$$\{V3/0\}_M = \{V3/2\}_M + \{V2/1\}_M + \{V1/0\}_M$$

Remarques :

- ✓ Les équations obtenues par fermeture de chaîne cinématique correspondent aux dérivées des équations obtenues par fermeture géométrique.
- ✓ Les torseurs doivent être exprimés au même point.

6. Cas particulier.

Calcul d'une loi d'entrée/sortie par produit scalaire de 2 vecteurs d'orientation relative constante.

La loi entrée sortie dans le cas de chaines fermées peut parfois se faire en tenant compte de la particularité angulaire du système (conservation d'une valeur angulaire lors du mouvement par exemple).

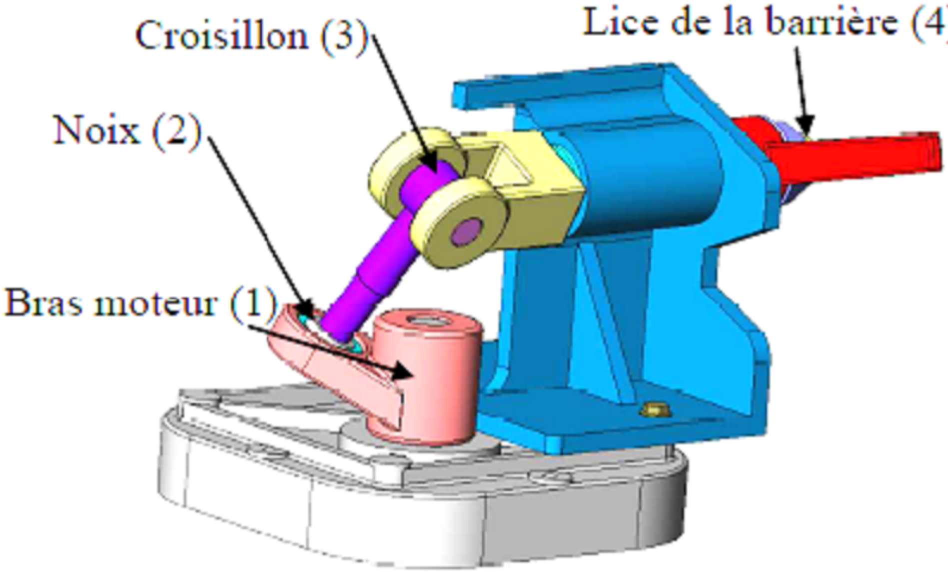
Exemple: mécanisme de barrière de péage « sinusmatic ».

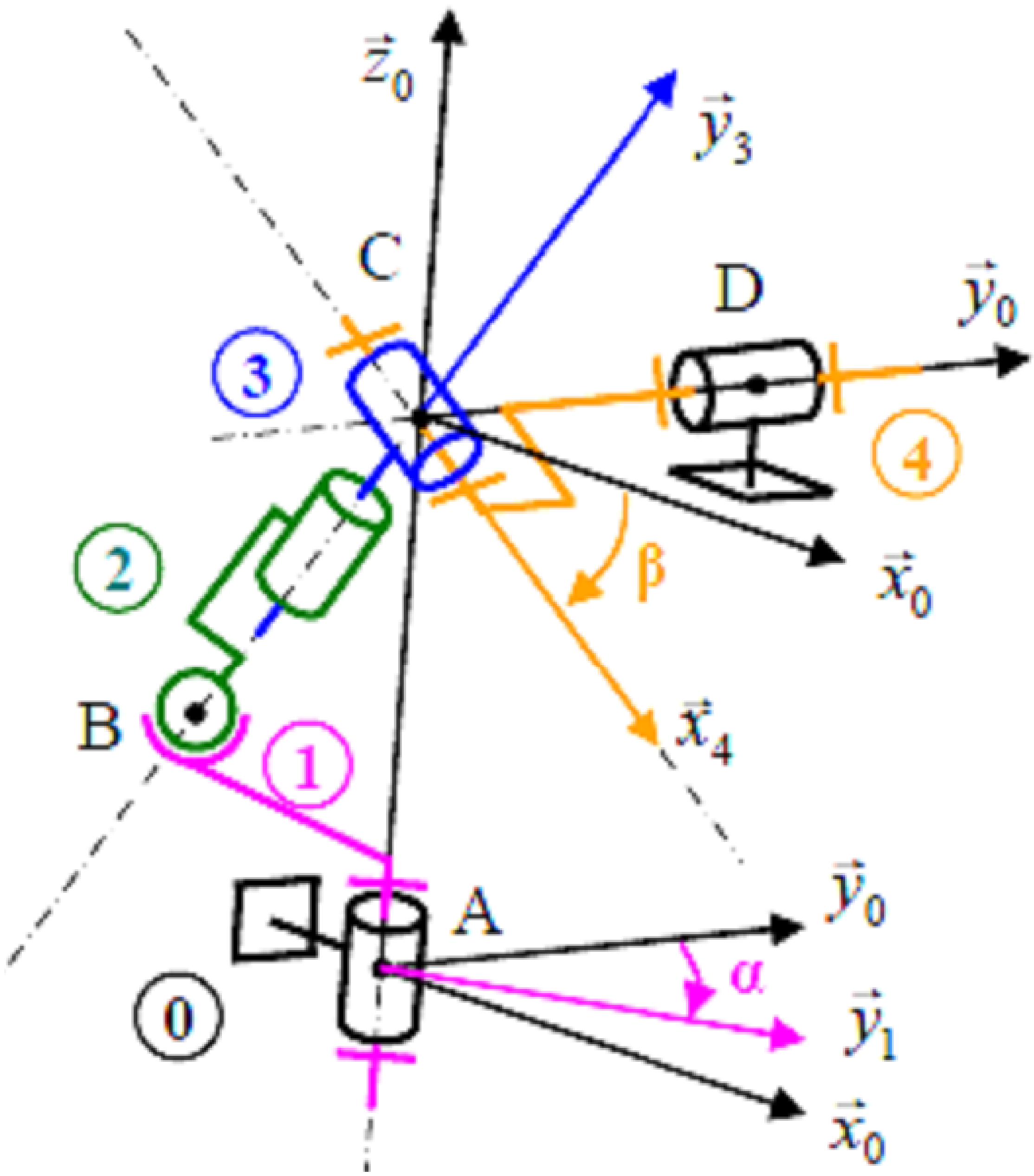
Le mécanisme « Sinusmatic » est un système de transformation de mouvement qui s'adapte sur un motoréducteur.

Il permet de transformer le mouvement d'entrée du moteur (rotation continue) en un mouvement de rotation alternative d'amplitude 90° de la barrière.

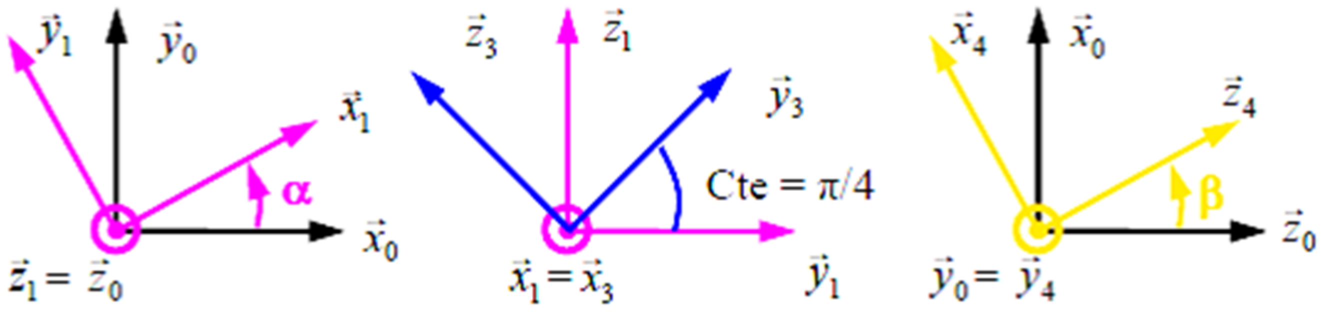
Le système est constitué :

- ✓ D'un bras moteur 1 en liaison pivot avec le bâti 0.
- ✓ D'une noix 2 en liaison rotule en B avec le bras moteur 1.
- ✓ D'un croisillon 3 en liaison pivot glissant avec la noix 2.
- ✓ D'une barrière 4 en liaison pivot suivant l'axe avec le croisillon 3 et en liaison pivot suivant l'axe avec le bâti 0.


Croisillon (3)
Lice de la barrière (4)
Noix (2)
Bras moteur (1)


$\vec{z}_0$
$\vec{y}_3$
C
D
$\vec{y}_0$
3
4
$\vec{x}_0$
β
2
$\vec{x}_4$
B
1
A
$\vec{y}_0$
0
α
$\vec{y}_1$
$\vec{x}_0$

Figures de changement de bases



Le paramètre d'entrée est α .
Le paramètre de sortie est β .

La particularité angulaire de ce système est que le vecteur $\overrightarrow{BC}$ est toujours orthogonal avec l'axe $\vec{x}_4$. On a donc le produit scalaire $\vec{y}_3.\vec{x}_4 = 0$.

$$\vec{x}_4 = \cos\beta.\vec{x}_0 - \sin\beta.\vec{z}_0$$

$$\vec{y}_3 = \cos\frac{\pi}{4}.\vec{y}_1 + \sin\frac{\pi}{4}.\vec{z}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}.(\vec{y}_1 + \vec{z}_1)$$

$$\vec{z}_1 = \vec{z}_0$$

$$\vec{y}_1 = -\sin\alpha.\vec{x}_0 + \cos\alpha.\vec{y}_0$$

$$\vec{y}_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}.(-\sin\alpha.\vec{x}_0 + \cos\alpha.\vec{y}_0 + \vec{z}_0)$$

$$\vec{y}_3.\vec{x}_4 = 0 \quad ⇨ \quad -\sin\alpha.\cos\beta - \sin\beta = 0 \quad ⇨ \quad \tan\beta = -\sin\alpha$$

Soit la loi entrée-sortie : $\tan\beta = \arctan(-\sin\alpha)$