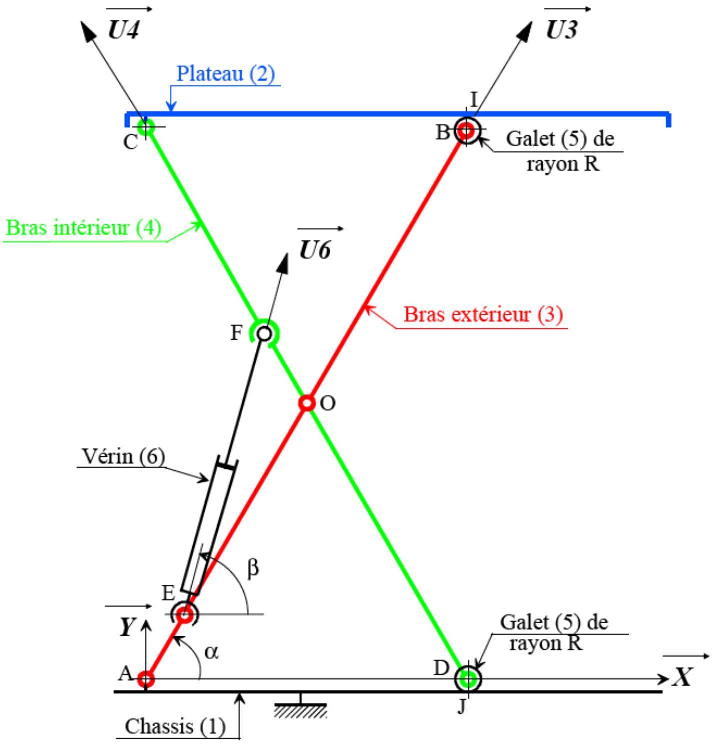
Mécanique du solide : Table élévatrice (corrigé)

Exercice de fermeture géométrique, concernant un mécanisme à chaine fermée bien connu. On cherche la loi entrée/sortie, c'est-à-dire la relation entre la longueur du vérin et la hauteur du plateau.



1. On écrit la fermeture géométrique

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EO} + \overrightarrow{OF}.$$

On utilise les bases liées aux solides.

$$\lambda.\overrightarrow{U6} = (a-b).\overrightarrow{U3} + b.\overrightarrow{U4}$$

On écrit les formules de changement de base :

$$\overrightarrow{U6} = \cos\beta.\vec{X} + \sin\beta.\vec{Y}$$

$$\overrightarrow{U3} = \cos\alpha.\vec{X} + \sin\alpha.\vec{Y}$$

$$\overrightarrow{U4} = -\cos\alpha.\vec{X} + \sin\alpha.\vec{Y}$$

Remarque : Faire une figure de changement de base pour $\overrightarrow{U4}$.

On projette dans la base liée au châssis (1) :

$$\left|\begin{array}{l} \lambda\cos\beta = (a-b)\cos\alpha - b\cos\alpha \\ \lambda\sin\beta = (a-b)\sin\alpha + b\sin\alpha \end{array}\right. . \qquad \left|\begin{array}{l} \lambda\cos\beta = (a-2.b).\cos\alpha \\ \lambda\sin\beta = a.\sin\alpha \end{array}\right.$$

On a 2 équations, 3 inconnues ⇨ 1 seule mobilité.

λ : Longueur du vérin (entrée, que l'on peut faire varier avec le débit d'huile).

α : Angle de la table (sortie, directement liée à la hauteur du plateau (2))

On cherche à « éliminer » le paramètre β (orientation du vérin), afin d'avoir une relation entre l'entrée, la sortie et les constantes du mécanisme.

On élève au carré et on additionne :

$$\lambda^2 = a^2 - 4.b.(a-b).\cos^2\alpha \qquad \cos^2\alpha = \frac{\lambda^2 - a^2}{4.b.(b-a)}.$$

$$\alpha = Arc\cos\left(\sqrt{\frac{\lambda^2 - a^2}{4.b.(b-a)}}\right)$$

Les questions 2 et 3 sont des rappels de cinématique sur les torseurs et les calculs de vitesses.

2. Le mouvement de 2/1 est une translation de direction $\vec{Y}$, donc le vecteur vitesse de rotation : $\overrightarrow{\Omega_{2/1}} = \vec{0}$.

$$\overrightarrow{AC} = 2.a.\sin\alpha.\vec{Y} \qquad \vec{V}(C \in 2/1) = \left(\frac{d\,\overrightarrow{AC}}{dt}\right)_1 = 2.a.\dot{\alpha}.\cos\alpha.\vec{Y}.$$

Torseur cinématique $\{V_{2/1}\} = \left\{\begin{matrix} \vec{0} \\ 2a\dot{\alpha}\cos\alpha.\vec{Y} \end{matrix}\right\}_C$.

3. $\overrightarrow{CB} = 2.a.\cos\alpha.\vec{X} \qquad \vec{V}(B \in 3/2) = \left(\dfrac{d\,\overrightarrow{CB}}{dt}\right)_2 = -2a\dot{\alpha}.\sin\alpha.\vec{X}$

4. La table peut monter et descendre, il y a une position basse et une position haute.

On a trouvé à la question 1: $\lambda^2 = a^2 - 4b(a-b)\cos^2\alpha$.

Course du vérin : $Cu = \lambda_{\max} - \lambda_{\min}$

$$Cu = \sqrt{a^2 - 4b(a-b)\cos^2\alpha}_{\max} - \sqrt{a^2 - 4b(a-b)\cos^2\alpha}_{\min}.$$

5. Le galet (5) va se déplacer le long du plateau (2), la course correspond au déplacement entre les 2 positions extrêmes :

$$Lu = CB_{\max} - CB_{\min}.$$

Avec $CB = 2.a.\cos\alpha \qquad Lu = 2.a.(\cos\alpha_{\min} - \cos\alpha_{\max})$

6. Rappel : λ est la longueur du vérin. $\dot{\lambda}$ est la vitesse du vérin directement liée au débit d'huile.

$\dot{\lambda} = \dfrac{d\lambda}{dt} = cte \quad \Rightarrow \quad \lambda(t) = \dot{\lambda} \times t \qquad$ Temps de montée : $tm = \dfrac{Cu}{\dot{\lambda}}$.

7. Soit q le débit d'huile (en m^3/s), on a $q = \dot{\lambda} \times S \quad \Rightarrow \quad \dot{\lambda} = \dfrac{q}{S}$.

L'automaticien peut agir sur le débit d'huile pour régler la vitesse.
En général, on préfère limiter le débit à l'échappement car la pression relative est faible.