

DS de SI, MPSI1 PCSI1, novembre 2024

Durée : 2h

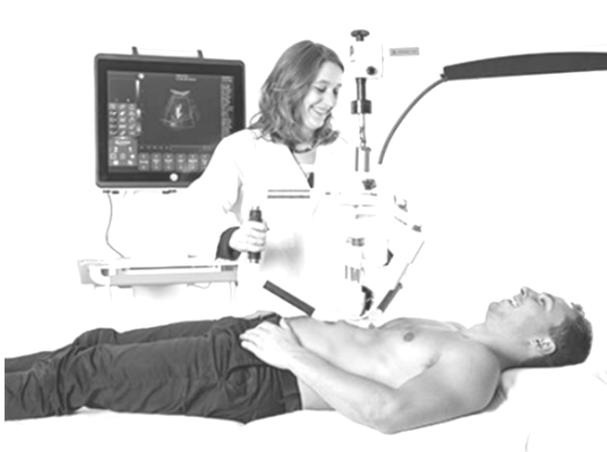
Corrigé sur le site : <http://perso.numericable.fr/starnaud/>

Problème 1 : Système de télé-échographie (CCINP MP 21)

L'échographie est une technique d'imagerie médicale basée sur l'exploitation de la réflexion d'une onde ultrasonore au niveau des interfaces physiologiques entre organes.

Sa réalisation nécessite cependant un manipulateur expert en imagerie médicale, capable d'analyser les images échographiques en temps réel afin d'orienter la sonde en conséquence.

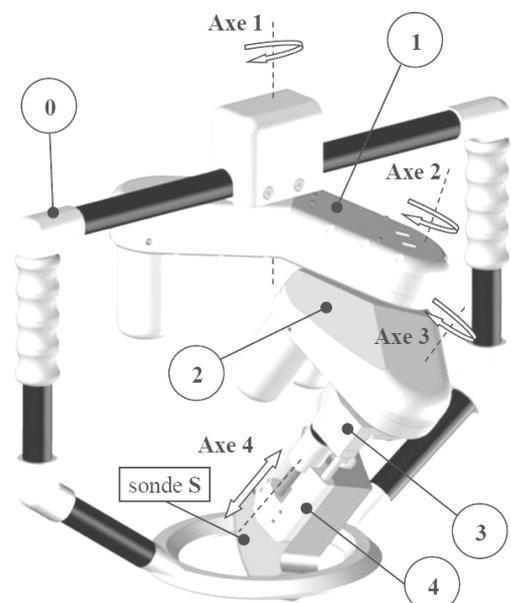
La robotisation de cette technique permet d'en élargir le champ d'application. Grâce à la télé-échographie robotisée, il devient possible de réaliser une échographie sur un patient situé sur un site isolé, alors même que le spécialiste en imagerie médicale se trouve sur un site distant de celui où est pratiqué l'examen.



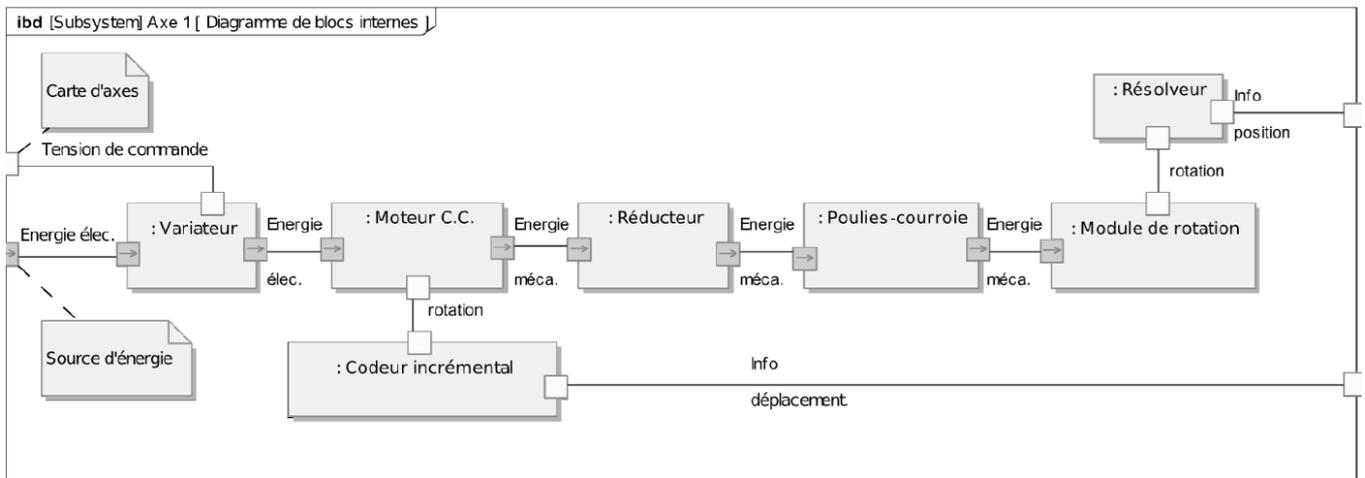
Analyse système partielle.

Le robot porte-sonde est constitué :

- ✓ D'une structure porteuse (0).
- ✓ D'un module de rotation, composé des sous-ensembles (1), (2) et (3) permettant d'orienter la sonde en lui imposant trois rotations (R_1 , R_2 , R_3) suivant les axes (1) à (3).
- ✓ Du porte-sonde (4) sur lequel est fixé la sonde échographique (S). La translation T suivant l'axe (4) permet de contrôler l'effort de contact sonde/peau du patient.



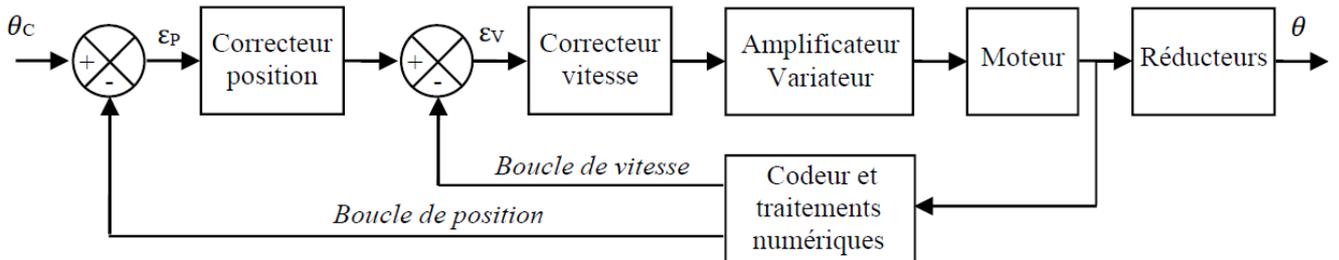
La chaîne fonctionnelle assurant la rotation de l'ensemble (1, 2, 3, 4) autour de l'axe (1) est décrite par le diagramme de blocs internes suivant.



Commande de l'axe 1

La structure de commande de la position angulaire est composée de deux boucles imbriquées disposant chacune d'un correcteur :

- ✓ Une boucle interne de vitesse, gérée par le variateur.
- ✓ Une boucle externe de position, gérée par la carte d'axes.
- ✓ Un codeur incrémental, solidaire de l'axe moteur permet après traitement numérique d'obtenir une image de la position angulaire et de la vitesse angulaire de l'axe (1).



Modélisation de la motorisation

La motorisation de l'axe (1) est réalisée à l'aide d'un moteur électrique à courant continu et aimants permanents, dont le comportement peut être modélisé par les équations suivantes :

$$u(t) = R.i(t) + L.\frac{di(t)}{dt} + e(t) \qquad e(t) = k_e.\omega_m(t)$$

$$C_m(t) = k_c.i(t) \qquad J.\frac{d\omega_m(t)}{dt} = C_m(t) - C_{re}(t)$$

Les différentes grandeurs intervenant dans le modèle sont définies dans le tableau suivant :

Symbole	Désignation	Unités / valeurs
$u(t)$	Tension d'induit	V
$e(t)$	Force contre-électromotrice	V
$i(t)$	Courant d'induit	A
$\omega_m(t)$	Vitesse de rotation du moteur	rad/s
$C_m(t)$	Couple moteur	N·m
$C_{re}(t)$	Couple résistant équivalent ramené sur l'axe moteur	N·m
R	Résistance de l'induit	4,1 Ω
L	Inductance de l'induit	0,18 mH
k_e	Constante de force contre-électromotrice	$1,6 \cdot 10^{-2}$ V/(rad/s)
k_c	Constante de couple	$1,6 \cdot 10^{-2}$ N·m/A
J	Inertie équivalente ramenée sur l'axe moteur	$\in [7,2 \cdot 10^{-6}, 8,6 \cdot 10^{-6}]$ kg·m ²

Q1. Déterminer les transformées de Laplace des équations du moteur définies en considérant des conditions initiales nulles. Compléter les blocs correspondants sur le schéma bloc du document réponses.

Q2. Déterminer les expressions littérales des fonctions de transfert $H_1(p)$ et $H_2(p)$ tels que : $\Omega_m(p) = H_1(p) \cdot U_m(p) + H_2(p) \cdot C_{re}(p)$.

On pose $\tau_e = \frac{L}{R}$ et $\tau_{em} = \frac{R \cdot J}{k_e \cdot k_c}$, respectivement constantes de temps électrique et électromécanique du moteur à courant continu.

Q3. Déterminer les valeurs numériques des constantes de temps τ_e et τ_{em} pour les valeurs extrêmes de J . En déduire qu'une constante de temps peut être considérée comme négligeable devant l'autre.

Q4. Montrer, en précisant l'expression de K_m que la fonction $H_1(p)$ peut alors être

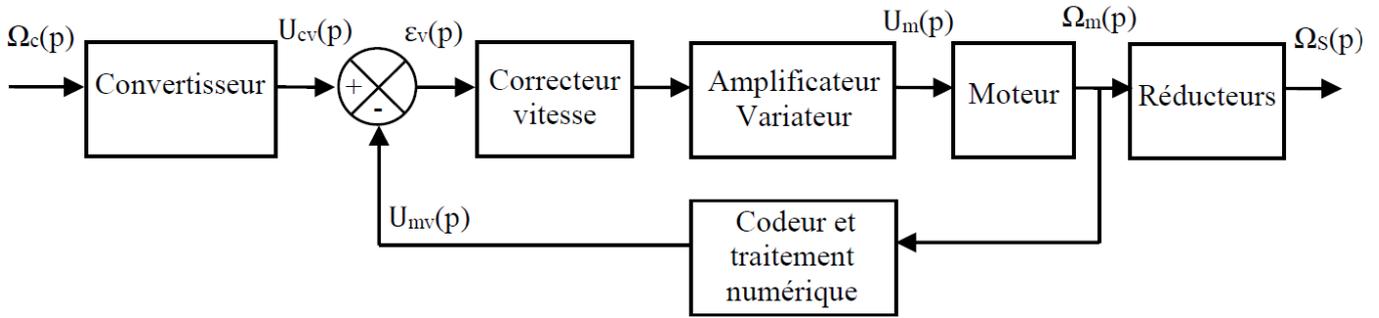
approximée par la forme :
$$H_1(p) = \frac{K_m}{(1 + \tau_e \cdot p) \cdot (1 + \tau_{em} \cdot p)}$$

Modélisation de la boucle de vitesse

La figure suivante présente la structure de la boucle de vitesse associée à la commande de l'axe 1. Pour une consigne de vitesse de rotation $\omega_c(t)$, un convertisseur génère une tension de consigne de rotation à appliquer au moteur $u_{cv}(t)$.

Un traitement numérique de la vitesse relevée sur l'axe du moteur fournit une tension mesurée $u_{mv}(t)$, image de la vitesse de rotation du moteur $\omega_m(t)$.

Un correcteur adapte le signal écart entre la tension de consigne et la tension mesurée, ce qui permet après correction et amplification, de définir la tension d'alimentation $u_m(t)$ à appliquer au moteur.



Le tableau suivant liste les gains des différents composants intervenant.

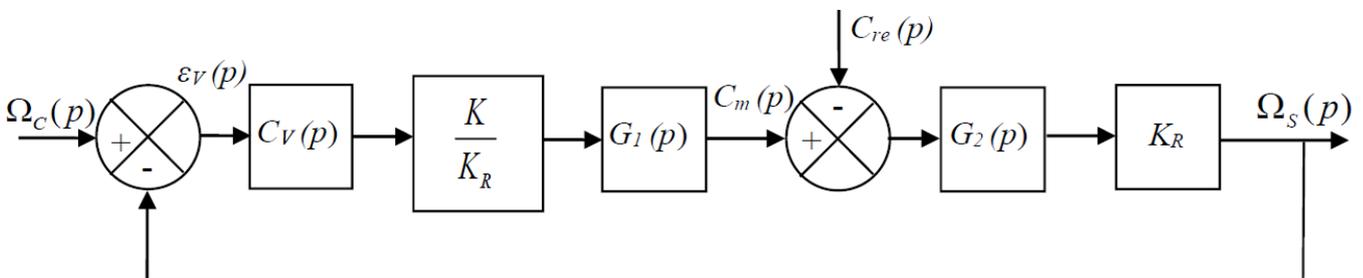
Blocs	Fonctions de transfert
Convertisseur	K_{conv} (à déterminer)
Correcteur vitesse	$C_V(p)$ (réglé par la suite)
Amplificateur/variateur	$K_A = 9,4$
Codeur et traitement	$K_{vit} = 8,3 \cdot 10^{-3}$ V/(rad/s)
Réducteurs	$K_R = 0,01$

Q5. Déterminer l'expression du gain K_{conv} , sa valeur numérique et son unité.

Q6. Compléter le schéma-bloc sur le document réponses en y faisant figurer les fonctions de transfert.

On peut montrer que le schéma-bloc peut se ramener au schéma blocs à retour unitaire

suivant avec : $G_1(p) = \frac{k_c}{R} \cdot \frac{1}{1 + \tau_e \cdot p}$, $G_2(p) = \frac{R}{k_c} \cdot \frac{1}{1 + \tau_{em} \cdot p}$ et $K = K_{vit} \cdot K_A \cdot K_m$.



Q7. À partir du schéma-bloc à retour unitaire, déterminer l'expression de la fonction de

transfert en boucle ouverte $H_{BO}(p) = \frac{\Omega_s(p)}{\varepsilon_v(p)}$ (on considère $C_{re}(p) = 0$).

Synthèse de la commande : boucle de vitesse

Le système est à présent considéré en l'absence de perturbation, soit $C_{re}(p) = 0$.

Le correcteur de la boucle de vitesse est un correcteur Proportionnel Intégral (PI), de fonction

de transfert : $C_V(p) = K_i \cdot \frac{1 + T_i \cdot p}{T_i \cdot p}$.

La constante de temps T_i est choisie de manière à compenser le pôle dominant de la fonction de transfert du moteur, soit $T_i = \tau_{em}$.

Q8. Déterminer, en fonction des paramètres K_i , K , τ_{em} et τ_e , l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(p)$ puis de la fonction de transfert en boucle fermée $H_{BF}(p) = \frac{\Omega_s(p)}{\Omega_c(p)}$.

La mettre sous la forme canonique :
$$H_{BF}(p) = \frac{K_{BF}}{\frac{p^2}{\omega_0^2} + \frac{2 \cdot z}{\omega_0} \cdot p + 1}$$

Déterminer ses paramètres caractéristiques.

On donne un extrait du cahier des charges de l'asservissement en vitesse :

- ✓ Temps de réponse inférieur à 5 ms pour une consigne de 0,2 rad/s.
- ✓ Erreur nulle en régime permanent.
- ✓ Pas de dépassement avec une consigne de type échelon.

Le gain K_i du correcteur est fixé de manière à obtenir la réponse la plus rapide sans dépassement en boucle fermée.

On rappelle que pour un modèle du second ordre, la réponse la plus rapide sans dépassement est obtenue pour un facteur d'amortissement $z=1$, valeur pour laquelle on a $t_{5\%} \cdot \omega_0 = 5$.

On se place dans le cas où l'inertie équivalente est maximale, soit $J_{eq} = 8,6 \cdot 10^{-6}$.

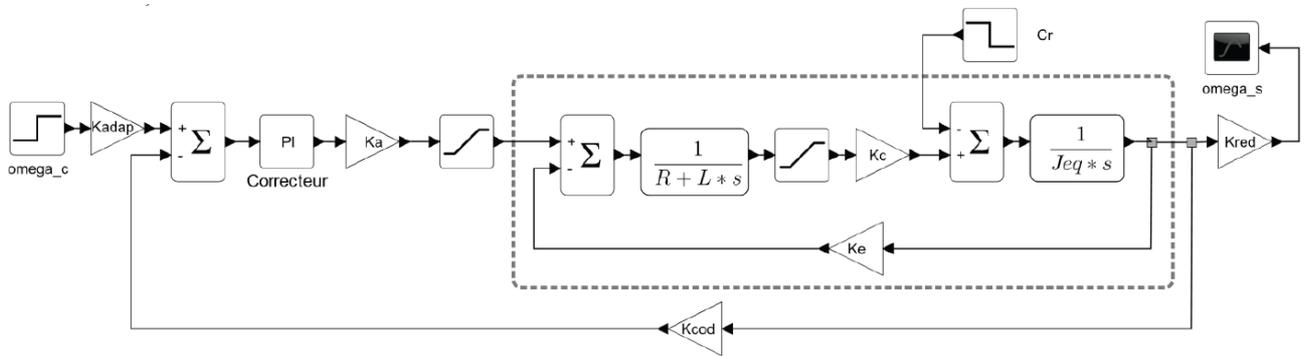
Q9. Déterminer l'expression de K_i ainsi que sa valeur numérique.

En déduire la valeur du temps de réponse $t_{5\%}$ de la boucle de vitesse.

Conclure sur le respect des performances.

Prise en compte des non-linéarités dans la commande.

On souhaite simuler la réponse en vitesse de l'axe (1) en intégrant dans le modèle certaines non linéarités : le variateur délivre une tension comprise entre ± 10 V et le courant moteur est limité à 5A. À cet effet, on construit le modèle numérique présenté en figure suivante.

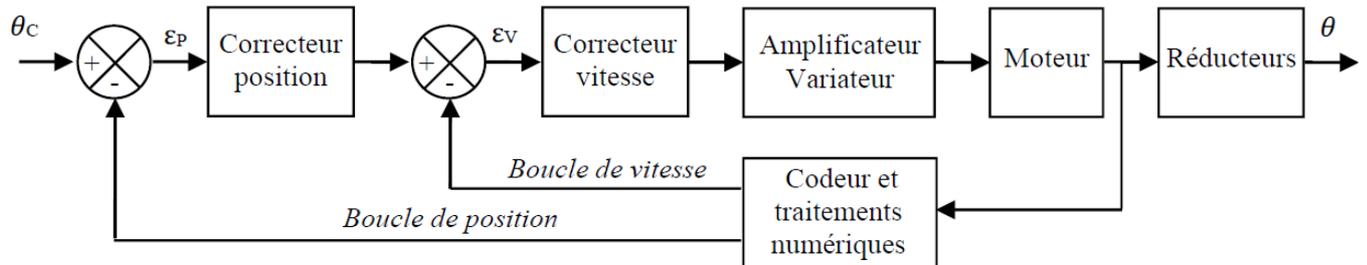


Les courbes du document réponses présentent les réponses en vitesse de l'axe (1), pour une entrée en échelon d'amplitude 0,1 rad/s ainsi que l'évolution de la tension aux bornes du moteur, sans et avec prise en compte de ces non-linéarités.

- Q10.** Sur le document réponses, identifier les courbes correspondant aux simulations sans et avec prise en compte des non-linéarités.
Commenter l'évolution des performances en termes de rapidité.

Performances de la commande en position

Les performances de la boucle de vitesse étant validées, on complète le modèle numérique avec la boucle de position.



On donne un extrait du cahier des charges de l'asservissement en position :

- ✓ Temps de réponse inférieur à 0,05 s pour une consigne de 10°.
- ✓ Erreur nulle en régime permanent.
- ✓ Pas de dépassement avec une consigne de type échelon.

Les paramètres du correcteur Proportionnel Intégral Dérivé (PID) de la boucle de position sont déterminés à l'aide de l'outil de simulation numérique.

La réponse temporelle en position de l'axe (1), pour une consigne en échelon de 10°, est représentée sur la figure du document réponses.

- Q11.** Déterminer graphiquement sur le document réponse le temps de réponse à 5% du système. Conclure sur le respect des performances.

Problème 2 : Skypod (CCINP MP 24)

Le système Skypod est une solution d'aide à la préparation de commande dans des zones de stockage de grande capacité.

L'une de ses spécificités est son robot manipulateur de bac qui peut évoluer dans les trois dimensions. Il peut ainsi se déplacer sur le sol pour circuler dans les allées et rejoindre les postes de livraison. Mais il peut également évoluer verticalement pour atteindre les bacs dans lesquels les produits sont stockés.



Analyse structurelle du robot

Ce robot est constitué d'un châssis et de différents sous-systèmes.

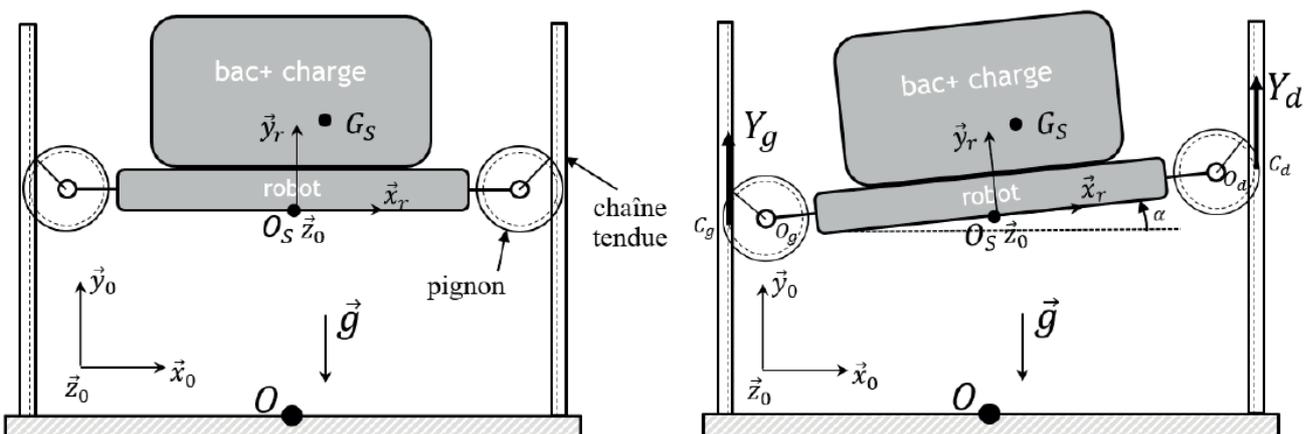
- ✓ La partie commande contrôle le robot, communique avec le serveur et fournit des consignes aux autres sous-systèmes.
- ✓ Le système de déplacement au sol.
- ✓ Deux systèmes de déplacement vertical (droit et gauche).
- ✓ Deux systèmes de bras rétractables.
- ✓ Un système de prise et dépose de bac.

Asservissement de l'inclinaison du robot.

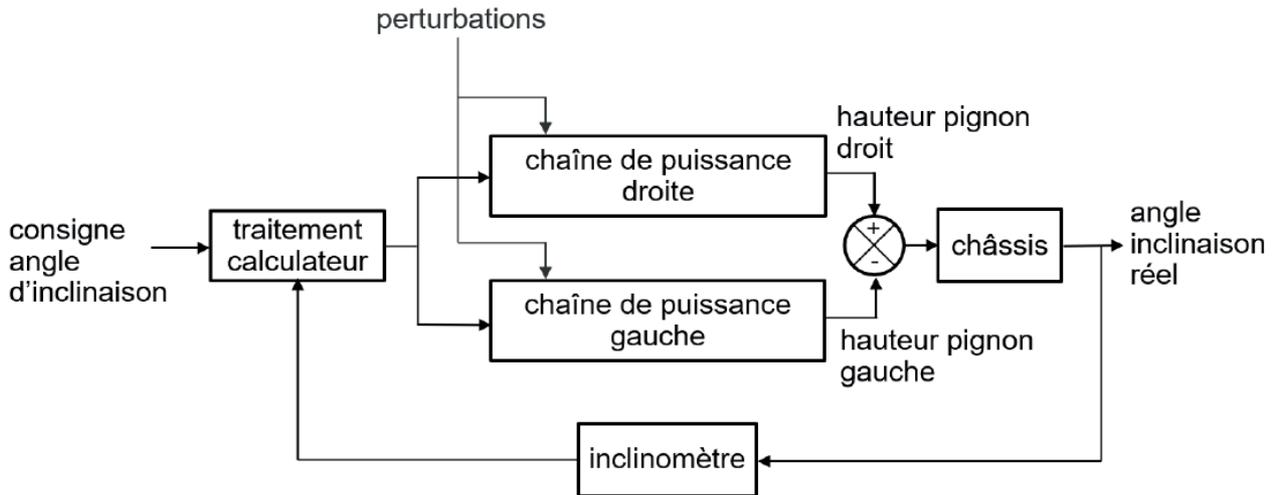
Cette partie s'intéresse au contrôle de l'inclinaison du robot lors de la phase d'ascension, repérée par son angle d'inclinaison par rapport à l'horizontale, noté $\alpha(t)$.

Cette phase est schématisée, dans le cas horizontal ($\alpha = 0$) et dans le cas incliné ($\alpha \neq 0$).

Cette inclinaison est modifiée grâce au différentiel de vitesse et de position des pignons gauche et droit. Un inclinomètre mesurant l'inclinaison du robot permet au calculateur de gérer l'asservissement.



Structure générale de l'asservissement :



Modélisation de la motorisation.

Un moteur d'ascension peut se modéliser comme une machine à courant continu dont on rappelle les équations :

$$u_m(t) = R_m \cdot i_m(t) + L_m \cdot \frac{di_m(t)}{dt} + e(t) \qquad e(t) = K_e \cdot \omega_{m1}(t)$$

$$C_m(t) = K_c \cdot i_m(t) \qquad J_{eq} \cdot \frac{d\omega_{m1}(t)}{dt} = C_m(t) - C_r - C_f(t)$$

Les notations sont détaillées dans le tableau suivant :

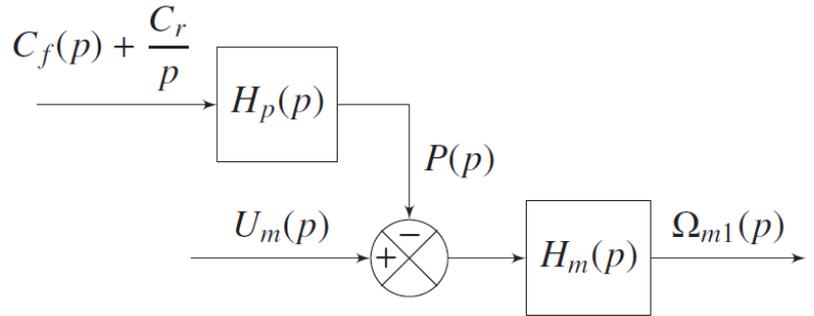
Variables	Constantes
$u_m(t)$: tension moteur (V)	$R_m = 3 \Omega$: résistance de l'induit
$i_m(t)$: intensité moteur (A)	$L_m = 1 \text{ mH}$: inductance de l'induit
$e(t)$: force contre-électromotrice (V)	$K_c = 2 \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{A}^{-1}$: constante de couple
$C_m(t)$: couple électromagnétique (N·m)	$K_e = 2 \text{ V}\cdot\text{s}\cdot\text{rad}^{-1}$: constante électrique
C_r : couple résistant dû à la pesanteur ramené sur l'arbre moteur (N·m)	$J_{eq} = 1,14 \cdot 10^{-1} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$: inertie équivalente des pièces mobiles entraînées par le moteur, ramenée sur l'arbre moteur
$C_f(t)$: couple résistant dû à l'ensemble des frottements secs ramené sur l'arbre moteur (N·m)	

Le schéma-blocs correspondant est ébauché dans le document réponses.

Q1. Compléter les blocs du document réponses avec les fonctions de transfert manquantes dans le schéma-blocs du moteur.

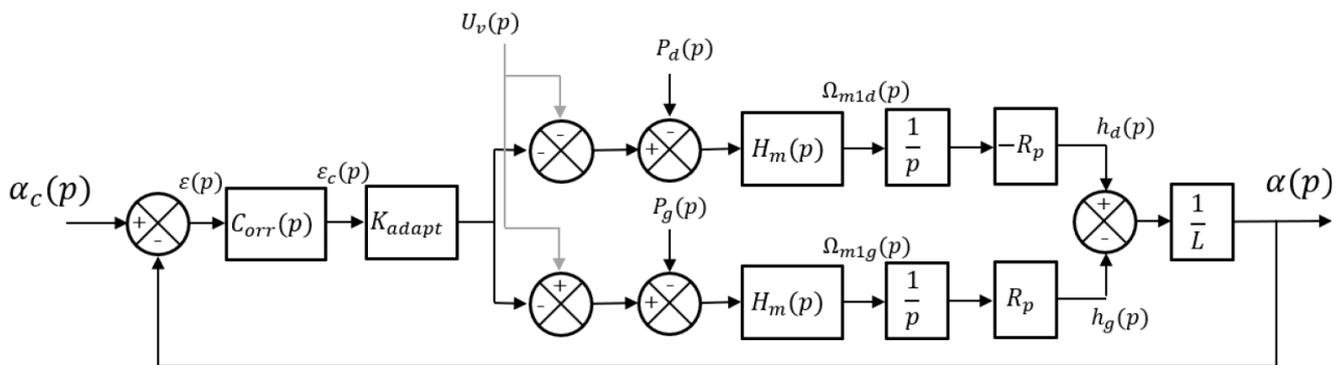
Il est alors possible de modifier le schéma-blocs initial du moteur pour le mettre sous la forme proposée suivante.

Q2. Exprimer $H_p(p)$ et $H_m(p)$ en fonction des caractéristiques du moteur. Préciser l'unité de $P(p)$.



Dans la suite, le signal $P(p)$ sera distingué en un signal $P_d(p)$ pour le moteur droit et $P_g(p)$ pour le moteur gauche.

Mise en place et correction de l'asservissement



Les différentes variables dans le domaine de Laplace introduites sont détaillées dans le tableau suivant.

Variables	
$\alpha_c(p)$: consigne angulaire d'inclinaison	$\alpha(p)$: angle d'inclinaison du robot
$\varepsilon(p)$: écart	$\Omega_{m1d}(p)$: vitesse de rotation moteur droit
$\varepsilon_c(p)$: écart corrigé	$\Omega_{m1g}(p)$: vitesse de rotation moteur gauche
$P_g(p)$: perturbation moteur gauche	$P_d(p)$: perturbation moteur droit
$h_g(p)$: altitude point O_g	$h_d(p)$: altitude point O_d
$U_v(p)$: tension de consigne correspondant à la vitesse d'ascension souhaitée	K_{adapt} : gain adaptateur
Fonctions de transfert	
$H_m(p)$: fonction de transfert du moteur	$C_{corr}(p)$: correcteur
R_p : rayon primitif du pignon	$L = \ \vec{O_g O_d}\ $

Q3. Justifier les signes du comparateur ayant pour entrées $h_d(p)$ et $h_g(p)$.

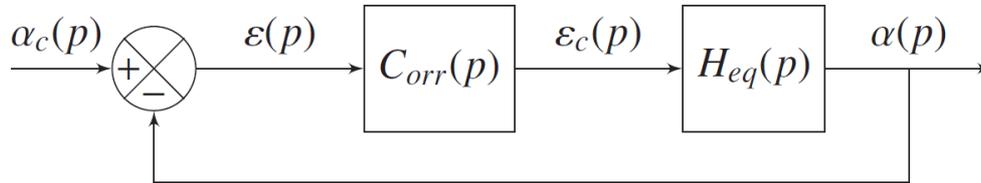
Q4. Exprimer $h_d(p)$ et $h_g(p)$ en fonction des variables $\varepsilon_c(p)$, $U_v(p)$ et $P_d(p)$ ou $P_g(p)$.

On suppose maintenant que la charge contenue dans le bac est centrée sur le robot, c'est-à-dire $P_d(p) = -P_g(p)$.

Q5. Montrer qu'il est alors possible de mettre le schéma-blocs initial sous la forme du schéma blocs à retour unitaire suivant.

Pour cela, exprimer $H_{eq}(p)$ en fonction du contenu des blocs du schéma précédent.

Donner la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(p)$ de ce système en fonction de $C_{orr}(p)$, $H_m(p)$, K_{adapt} , R_p et L .



On donne un extrait des exigences des performances de l'asservissement en inclinaison.

- ✓ Erreur statique nulle.
- ✓ Dépassement maximal autorisé 10%.
- ✓ Temps de réponse à 5% inférieur à 0,1s.

On donne sur le document réponses, la réponse indicielle du système non corrigé.

Q6. Vérifier si les exigences associées à l'asservissement en inclinaison sont vérifiées.

Quels que soient les résultats précédents, la fonction de transfert en boucle ouverte corrigé

sera désormais prise de la forme : $H_{BO}(p) = \frac{C}{p \cdot (1 + \tau \cdot p)}$ avec $\tau = 0,001 \text{ s}$

Q7. Calculer la fonction de transfert en boucle fermée $H_{BF}(p)$.

La mettre sous la forme canonique :

$$H_{BF}(p) = \frac{K_{BF}}{\frac{p^2}{\omega_0^2} + \frac{2 \cdot z}{\omega_0} \cdot p + 1}$$

Déterminer ses paramètres caractéristiques.

Déterminer la valeur de C afin d'avoir la réponse le plus rapide sans dépassement.

Dans ce cas on a $t_{5\%} \cdot \omega_0 = 3$, en déduire les performances de cet asservissement.

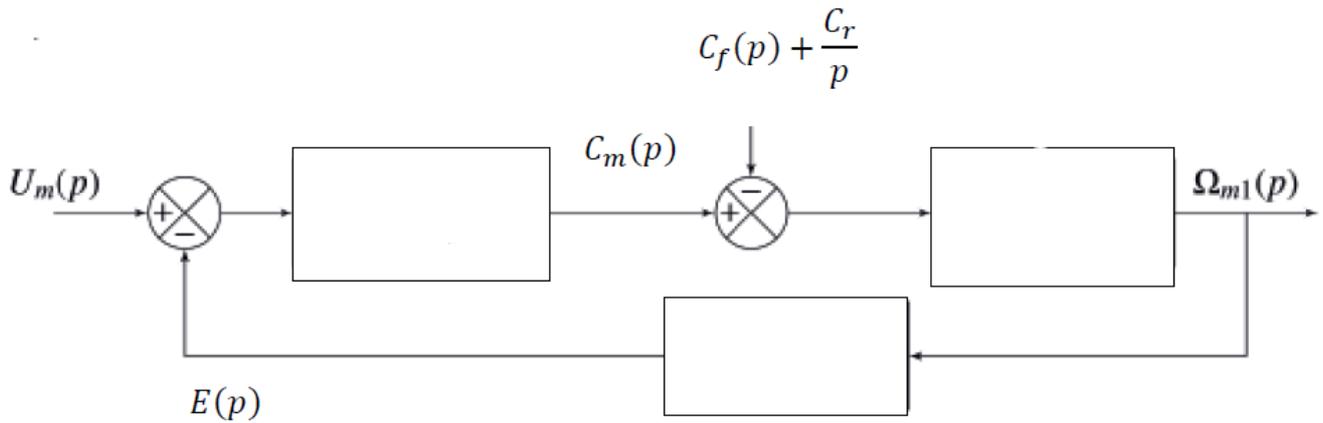
Conclure sur le respect des exigences.

En utilisant un autre correcteur, on donne dans le document réponses, les réponses à une consigne de 5° avec différents réglage du paramètre K_p .

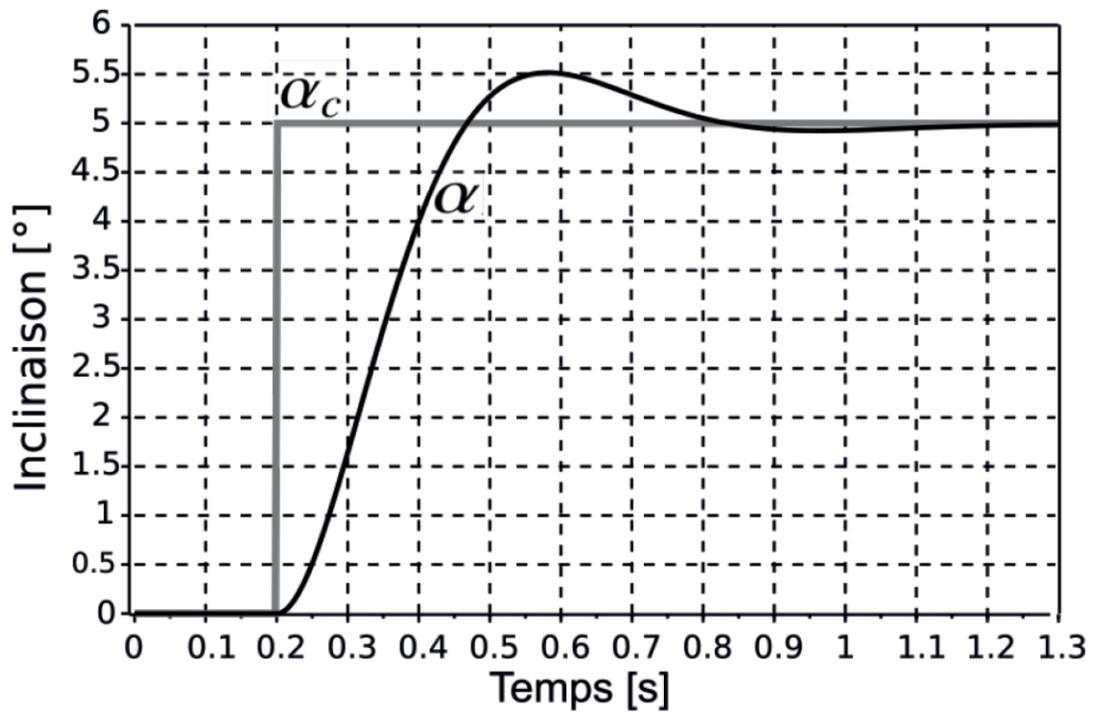
Q8. À l'aide de la figure, donner une valeur approchée de K_p permettant de respecter les exigences observables. Préciser ces exigences.

Document réponses, Problème 2 : Skypod (CC INP MP 24)

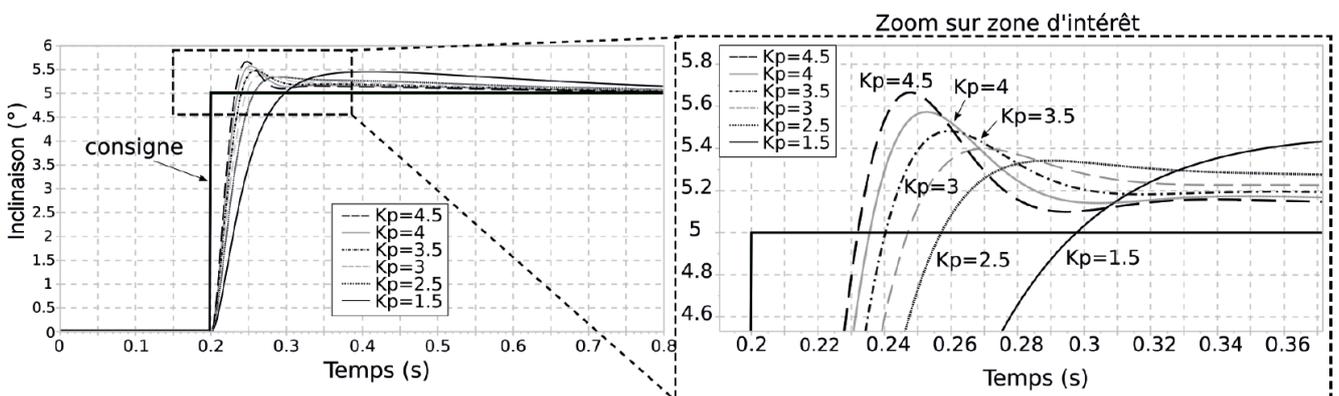
Q1



Q6

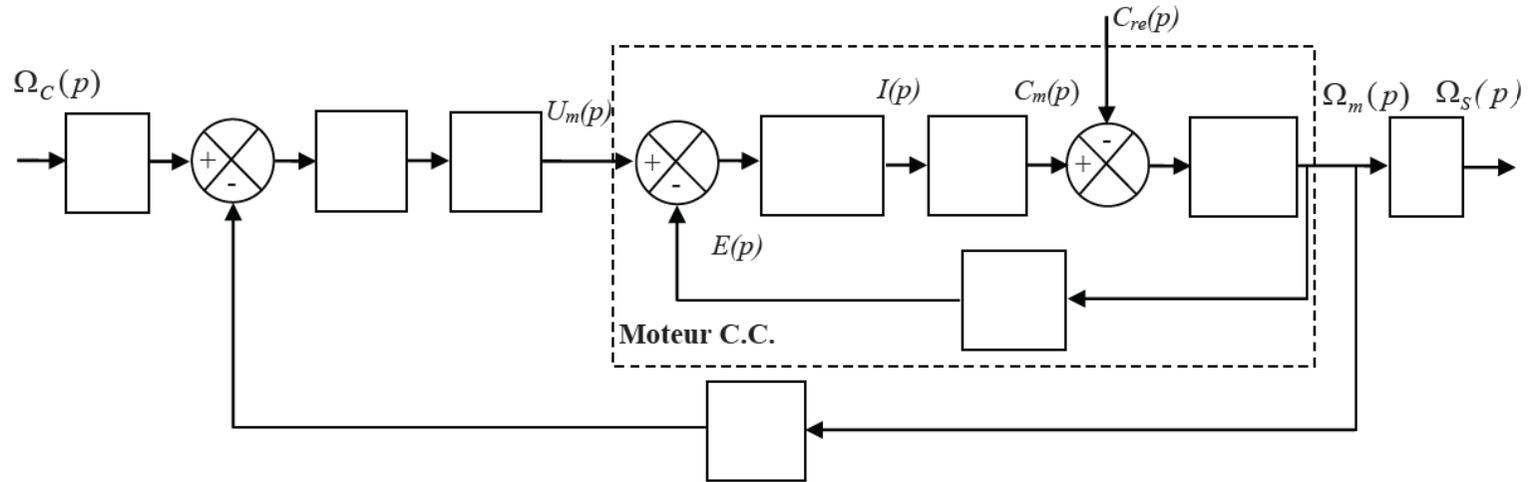


Q8.

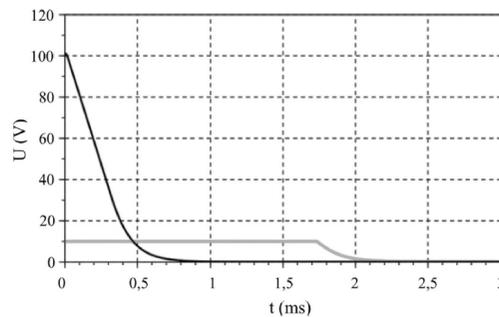
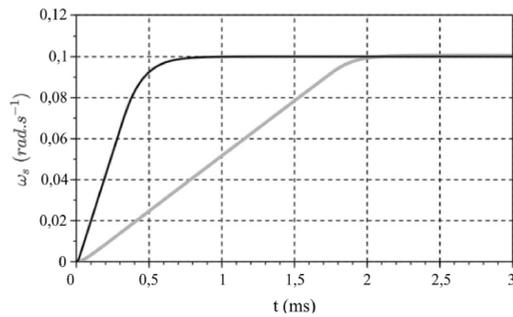


Document réponses, Problème 1 : Système de télé-échographie (CCINP MP 21)

Q1 et Q6



Q10



Q11

