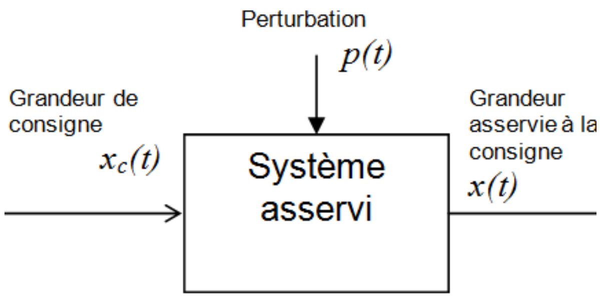
Etude et réglage des systèmes asservis 1

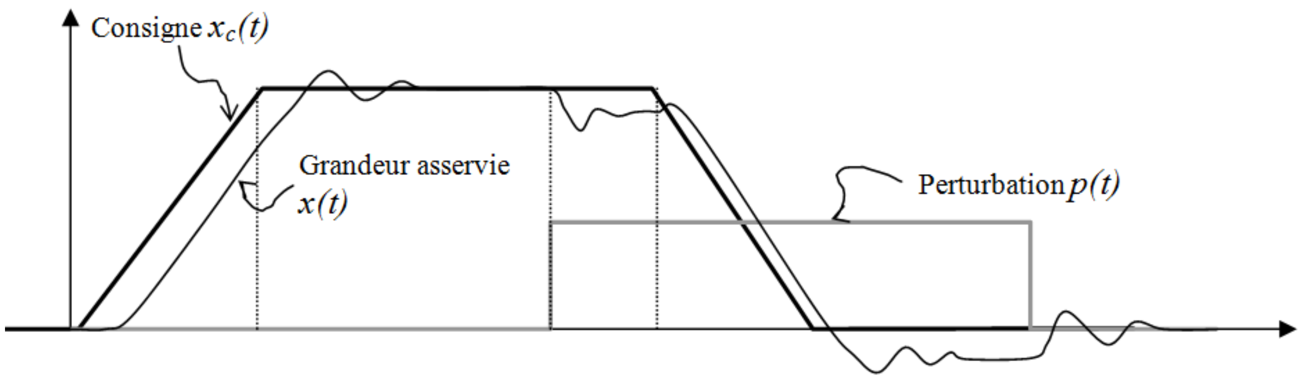
I. Rappels sur les systèmes asservis

1.1 Objet d'un asservissement :

La grandeur asservie $x(t)$ doit suivre au mieux la grandeur de consigne $x_c(t)$ malgré la présence de perturbations.

Exemples de grandeur asservie : position, vitesse, température, pression, débit, effort, cap…

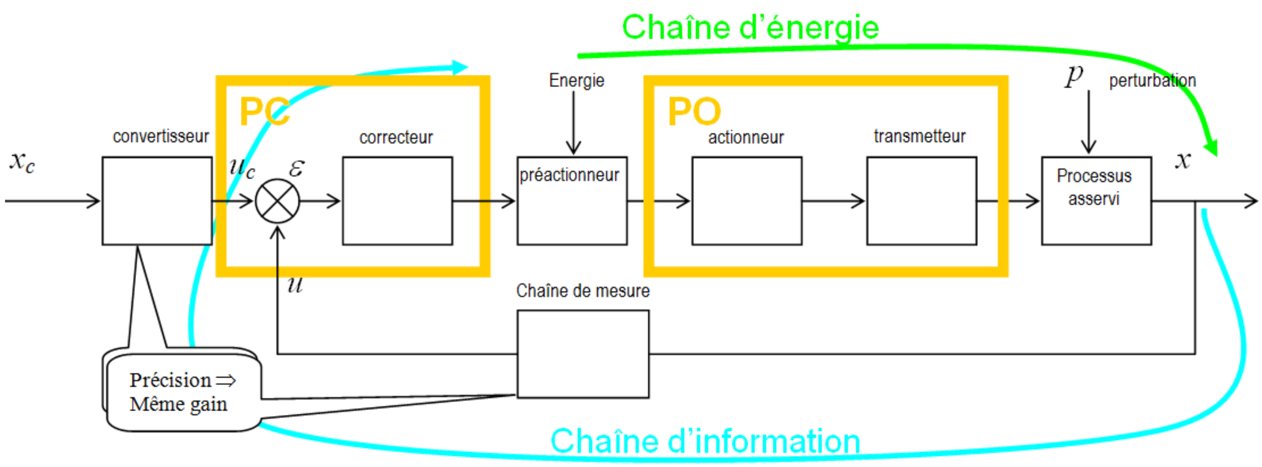




Il faut minimiser l'erreur $\varepsilon(t) = x_c(t) - x(t)$ en régime permanent et aussi dans les transitoires.

1.2 Structure de base d'un système asservi :

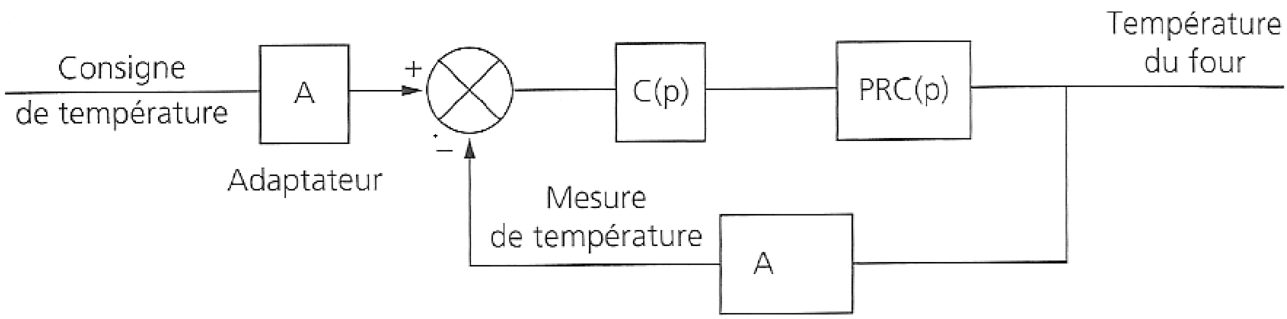
Elle est caractérisée par une chaîne de rétroaction . On mesure la sortie, on compare avec un signal représentant la consigne et on corrige pour fournir la commande au pré-actionneur.



Attention tout système bouclé n'est pas un asservissement (par exemple le cas du schéma bloc d'un moteur à courant continu).

Remarque : On peut toujours ramener un schéma de système asservi à un schéma à retour unitaire équivalent.

Exemple : Asservissement en température d'un four.

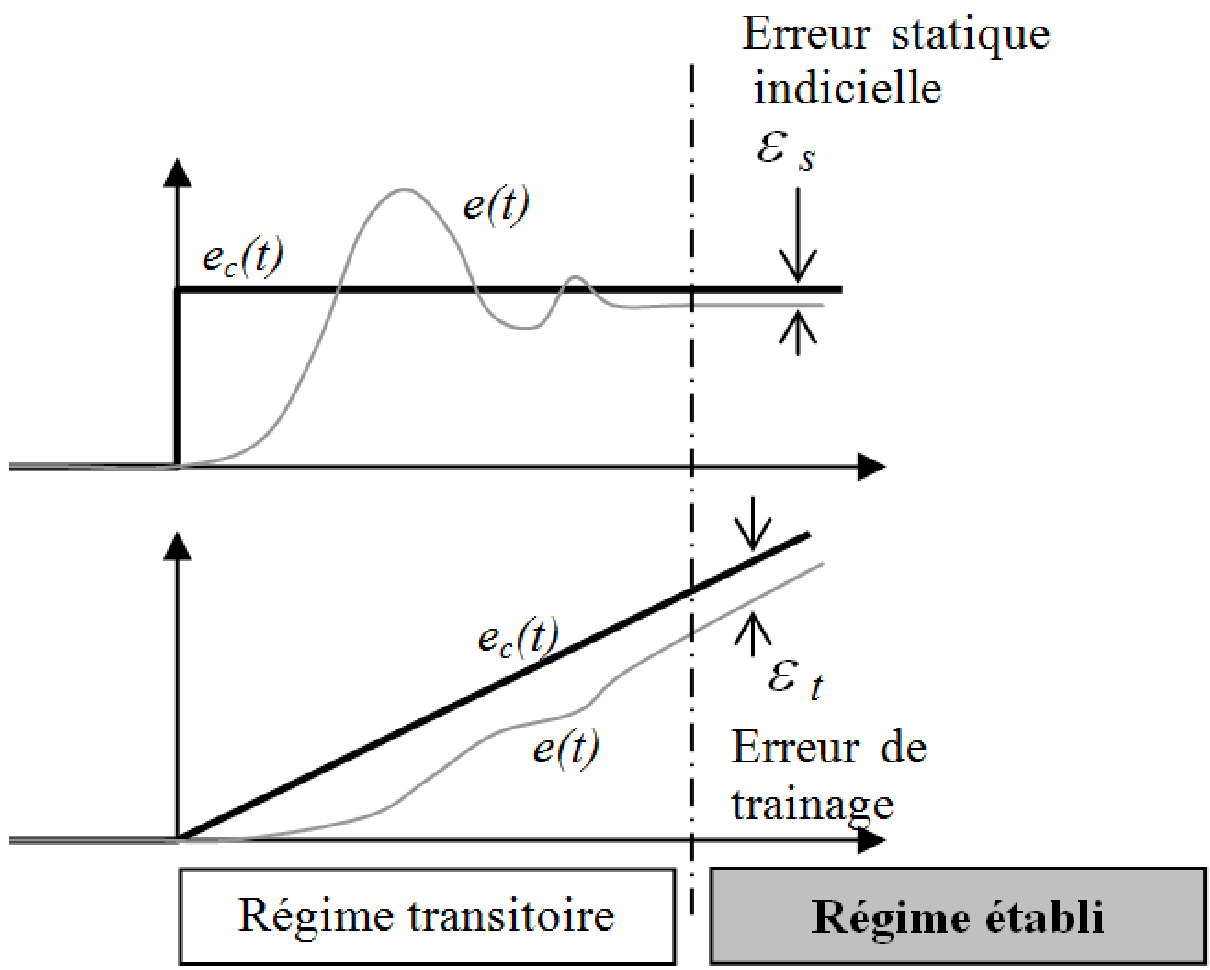


Pour que le système soit précis, il faut que les gains de l'adaptateur et du capteur soient égaux.

On peut alors rendre le système à retour unitaire en utilisant l'algèbre des schémas bloc pour rentrer les 2 gains A après le comparateur.

II. Performances des systèmes asservis

2.1. Précision statique

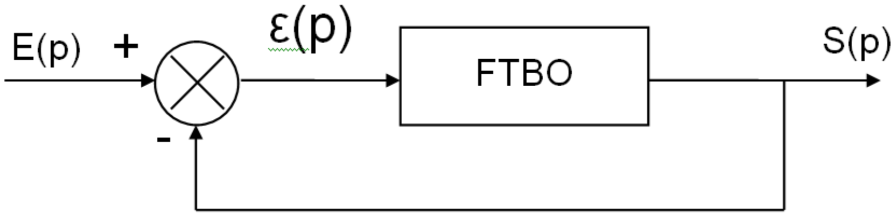


Remarque : On parle souvent d'erreur statique pour désigner l'erreur statique indicielle.

2.2. Précision en poursuite.

Schéma bloc d'un système asservi :

Calculons l'expression de l'erreur : $\varepsilon(p)$



$$\varepsilon(p) = E(p) - S(p) = E(p) - H(p).\varepsilon(p)$$

$$\varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1+H(p)} = \frac{E(p)}{1+FTBO(p)}$$

Cas général : $$FTBO(p) = H(p) = \frac{K_{BO}.(1+b_1.p+b_2.p^2+...)}{p^n.(1+a_1.p+a_2.p^2+...)}$$

n est le nombre d'intégration du système en Boucle Ouverte BO, FTBO de classe n.

<u>Entrée de type échelon :</u> $e(t) = E_0.u(t)$ ⇨ $E(p) = \frac{E_0}{p}$

$$\lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p\to 0} p.\varepsilon(p) \qquad p.\varepsilon(p) = \frac{E_0}{1+FTBO(p)}$$

- ✓ Cas $n = 0$, aucune intégration dans le FTBO (classe 0).

$$FTBO(p) = \frac{K_{BO}.(1+b_1.p...)}{(1+a_1.p+...)}$$

$$\lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p\to 0} p.\varepsilon(p) = \frac{E_0}{1+K_{BO}}$$

- ✓ Cas $n = 1$, une intégration dans le FTBO (classe 1).

$$FTBO(p) = \frac{K_{BO}.(1+b_1.p...)}{p.(1+a_1.p+...)} \qquad \lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p\to 0} p.\varepsilon(p) = 0$$

<u>Entrée de type rampe :</u> $e(t) = E_0.t.u(t)$ ⇨ $E(p) = \dfrac{E_0}{p^2}$

$$p.\varepsilon(p) = \frac{E_0}{p.(1 + FTBO(p))} = \frac{E_0}{p + p.FTBO(p)}$$

- ✓ Cas $n = 0$, aucune intégration dans le FTBO (FTBO de classe 0).

$$FTBO(p) = \frac{K_{BO}.(1 + b_1.p...)}{(1 + a_1.p + ...)} \qquad p.\varepsilon(p) \to \frac{E_0}{p + p.K_{BO}}$$

$$\lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p\to 0} p.\varepsilon(p) = \infty$$

- ✓ Cas $n = 1$, une intégration dans le FTBO (FTBO de classe 1).

$$FTBO(p) = \frac{K_{BO}.(1 + b_1.p...)}{p.(1 + a_1.p + ...)} \qquad p.\varepsilon(p) \to \frac{E_0}{p + K_{BO}}$$

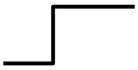
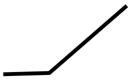
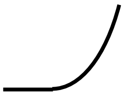
$$\lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p\to 0} p.\varepsilon(p) = \frac{E_0}{K_{BO}}$$

- ✓ Cas $n = 2$, deux intégrations dans le FTBO (FTBO de classe 2).

$$FTBO(p) = \frac{K_{BO}.(1 + b_1.p...)}{p.(1 + a_1.p + ...)} \qquad p.\varepsilon(p) \to \frac{E_0}{p + \frac{K_{BO}}{p}}$$

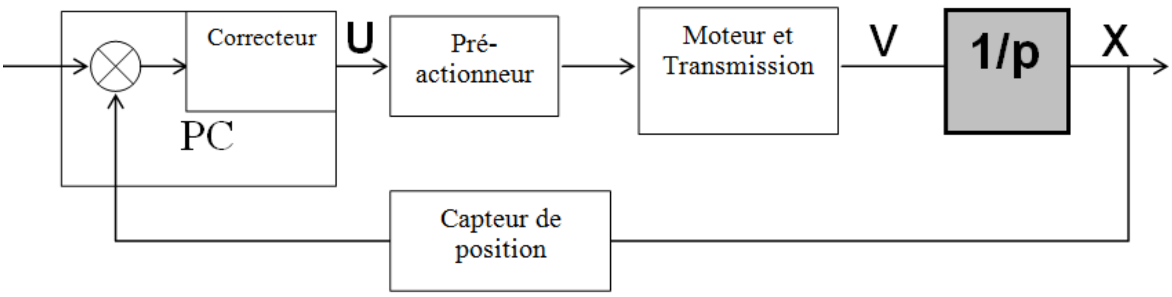
$$\lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p\to 0} p.\varepsilon(p) = 0$$

Erreur en poursuite en fonction de l'entrée et du nombre d'intégration de la FTBO (Sous réserve que le système soit <u>stable</u> et en <u>l'absence de perturbation)</u>

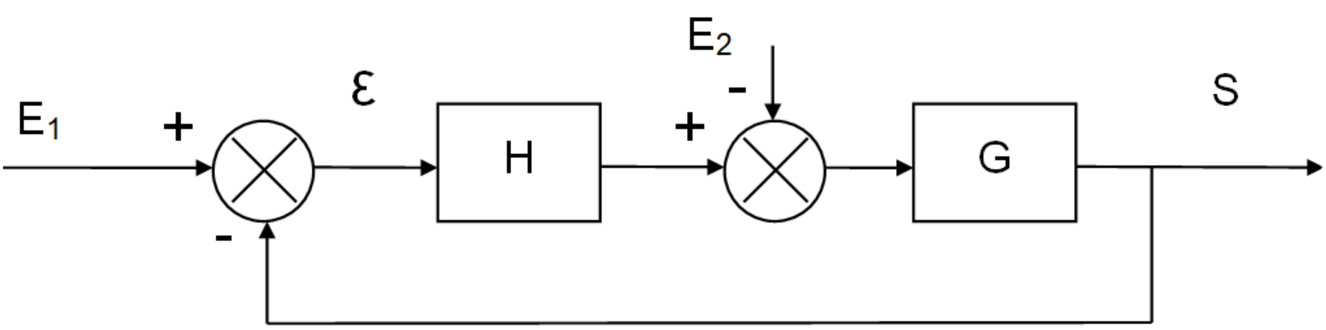
Entrée \ Classe BO	n = 0	n = 1	n = 2	n = 3
m = 0 				
m = 1 				
m = 2 				

Remarques :

- ✓ Si la FTBF du système à retour unitaire à un gain statique de 1 alors l'erreur statique indicielle est nulle. Dans ce cas $s(\infty) = E_0$.
- ✓ Une chaîne fonctionnelle de positionnement est naturellement de classe 1 en BO et possède donc une erreur statique indicielle nulle <u>en l'absence de perturbation</u>.



2.3. Précision des en régulation.



On applique le principe de superposition.

Le cas $E_2(p)=0$ et $E_1(p)\neq 0$ nous ramène au cas précédent.

Calculons l'erreur $\varepsilon(p)$ dans le cas $E_1(p)=0$ et $E_2(p)\neq 0$.

$$\varepsilon(p)=-G(p).(-E_2(p)+H(p).\varepsilon(p)) \qquad \varepsilon(p)=\frac{G(p).E_2(p)}{1+G(p).H(p)}$$

$$\lim_{t\to\infty}\varepsilon(t)=\lim_{p\to 0}p.\varepsilon(p) \qquad p.\varepsilon(p)=\frac{a.G(p)}{1+G(p).H(p)}$$

$$H(p)=\frac{K_1.(1+b_1.p+...)}{p^n.(1+a_1.p+...)} \qquad G(p)=\frac{K_2.(1+c_1.p+...)}{p^m.(1+d_1.p+...)}$$

<u>Perturbation de type échelon :</u> $E_2(p)=\dfrac{a}{p}$

- ✓ Cas $n=m=0$, aucune intégration.

$$p.\varepsilon(p)\to\frac{a.K_2}{1+K_1.K_2} \quad ⇨ \quad \lim_{t\to\infty}\varepsilon(t)=\frac{a.K_2}{1+K_1.K_2}=cte$$

- ✓ Cas $n=0$ et $m=1$, une intégration en aval de la perturbation.

$$p.\varepsilon(p)\to\frac{a.K_2}{p+\dfrac{K_1.K_2}{p}} \quad ⇨ \quad \lim_{t\to\infty}\varepsilon(t)=0$$

C'est le cas d'un asservissement en position (sans effet intégral dans le correcteur)

- ✓ Cas $n=1$ et $m=0$, une intégration en amont de la perturbation.

$$p.\varepsilon(p)\to\frac{a.\dfrac{K_2}{p}}{1+K_1.\dfrac{K_2}{p}} \quad ⇨ \quad \lim_{t\to\infty}\varepsilon(t)=0$$

Conclusion : L'erreur statique en régulation due à une perturbation de type échelon est nulle si la chaîne d'action possède au moins <u>une intégration en amont de cette perturbation.</u>

Remarque : elle est constante si pas d'intégration en amont de la perturbation

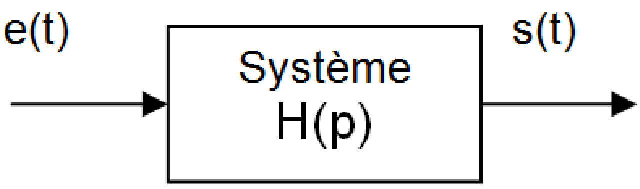
Perturbation de type rampe :

L'erreur en régulation due à une perturbation de type rampe est nulle si la chaîne d'action possède au moins <u>deux intégrations en amont de cette perturbation</u>.

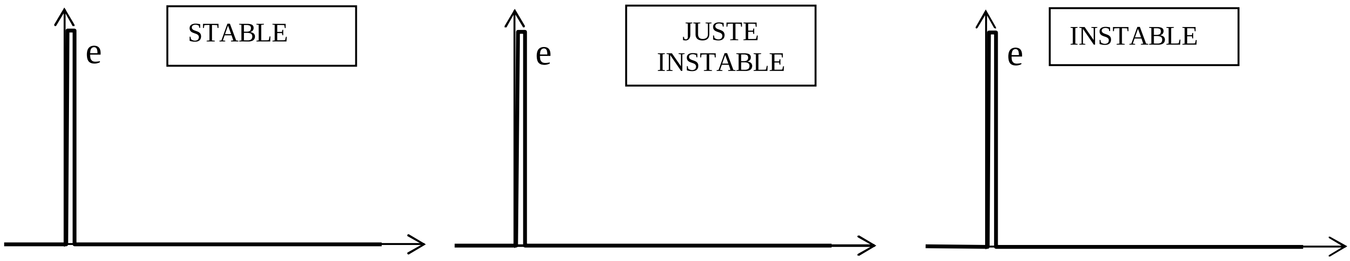
Remarque : elle est constante si une seule intégration en amont de la perturbation et infinie si aucune intégration en amont de la perturbation.

2.4. Stabilité d'un système en fonction des poles de la FTBF.

Stabilité absolue, condition sur les pôles de la fonction de transfert.



Définition (valable pour les <u>systèmes linéaires</u>) : Un système est stable lorsque, sollicité par une impulsion, il revient à sa position initiale.



Réponse impulsionnelle :

Entrée : $e(t) = \delta(t) \quad E(p) = 1$

Sortie : $$S(p) = H(p).E(p) = \frac{N(p)}{D(p)}.$$

On décompose en éléments simples pour revenir dans le domaine temporel.

$$S(p) = S_1(p) + S_2(p) + \ldots$$

Rappel : <u>Les pôles</u> de H(p) sont les racines du dénominateur D(p).

<u>Les zéros</u> de H(p) sont les racines du numérateur N(p).

Cas d'un élément simple avec un pôle réel : $S_1(p) = \dfrac{b}{p+a}$.

Retour dans le domaine temporel : $s_1(t) = b.e^{-a.t}.u(t)$

Stable si $s_1(t) \to 0$ lorsque $t \to \infty$ donc si $a > 0$

$$S_1(p) = \frac{b}{p+a} = \frac{N_1(p)}{D_1(p)}$$

Conclusion : Stable si les racines de $D_1(p)$ sont strictement négatives.

Cas d'un élément simple avec pôles complexes de type :

$$S_2(p) = \frac{b.\omega_n}{(p+a)^2 + \omega_m^2} = \frac{b.\omega_n}{(p+a_n).(p+\overline{a}_n)} = \frac{N_2(p)}{D_2(p)}$$

Racines de $D_2(p)$: $p = -a_n$ et $p = -\overline{a}_n$,

Avec $a_n = -a + j.\omega_n$ et $\overline{a}_n = -a - j.\omega_n$.

Retour dans le domaine temporel :

Rappels : $$L^{-1}\left(\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}\right) = \sin(\omega.t).u(t)$$

$$L^{-1}\left(\frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}\right) = e^{-a.t}.\sin(\omega.t).u(t)$$

$$s_2(t) = b.e^{-a.t}.\sin(\omega_n.t).u(t)$$

Stable si $s_2(t) \to 0$ lorsque $t \to \infty$ donc si $a > 0$

Conclusion : stable si les racines de $D_2(p)$ sont à parties réelles strictement négatives.

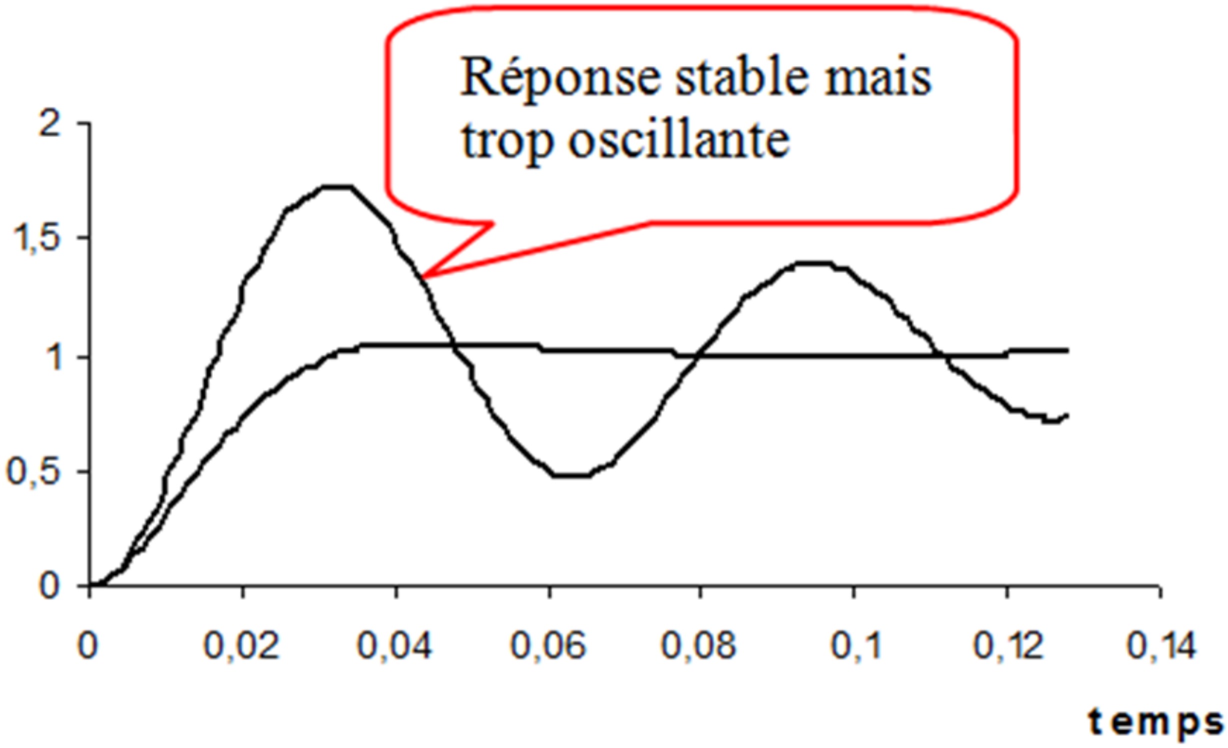
Cas d'un élément simple avec pôles complexes : $S_3(p)=\dfrac{b.(p+a)}{(p+a)^2+\omega_m^2}$

On retrouve le même résultat : le système est stable si les racines du dénominateur de la FTBF sont à parties réelles strictement négatives.

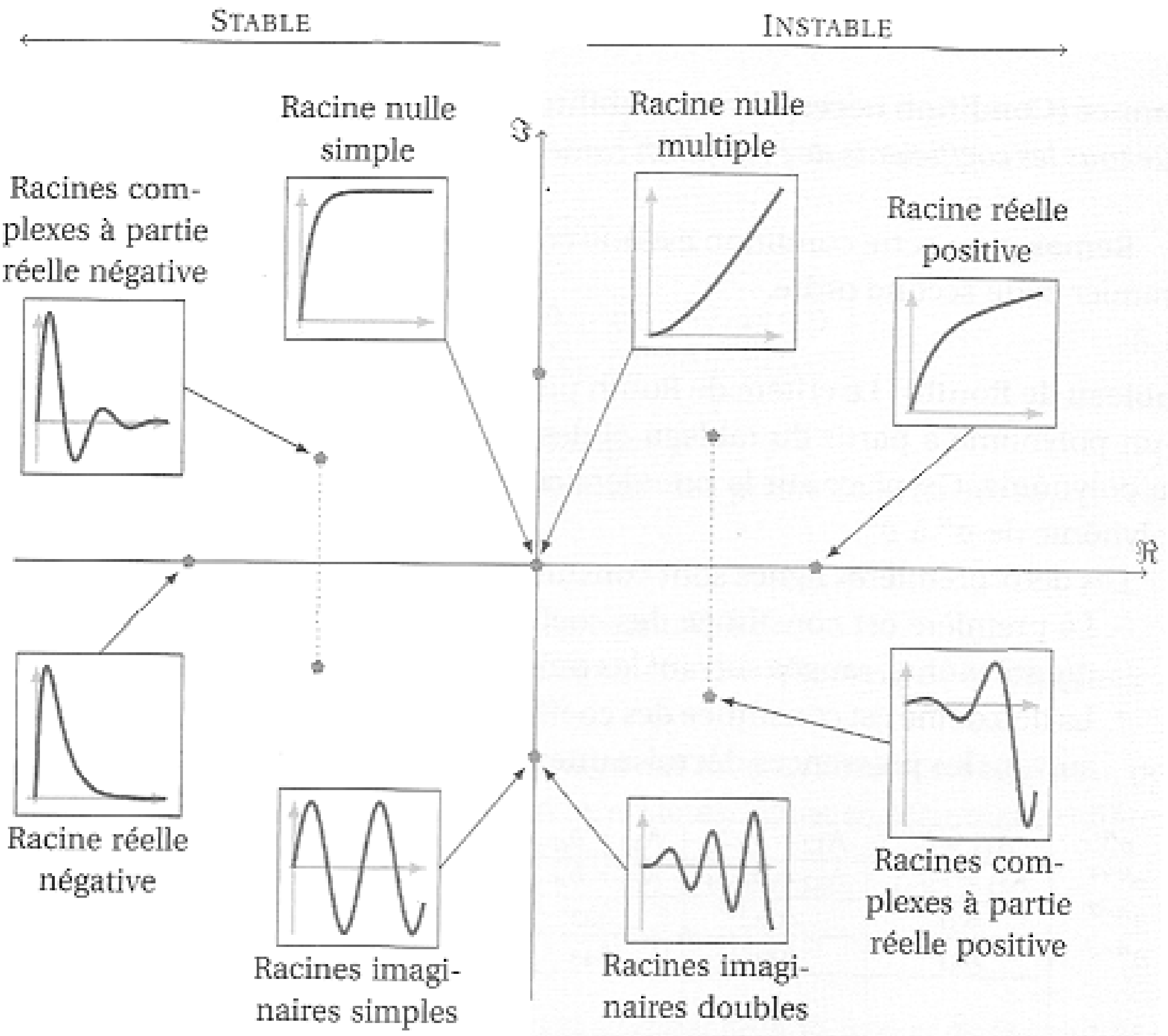
Conclusion :	Le système est stable, si et seulement si, la fonction de transfert en boucle fermée ne possède pas de pôle à partie réelle positive ou nulle.

Remarques :

- ✓ Tout système possédant au moins une intégration est instable car il possède un pôle à partie réelle nulle. Par exemple une intégration dans la BO ⇨ instable en BO mais pas nécessairement en BF !
- ✓ La condition de stabilité absolue n'est pas suffisante en asservissement. Il faut que le système soit suffisamment amorti. C'est la notion de stabilité relative.



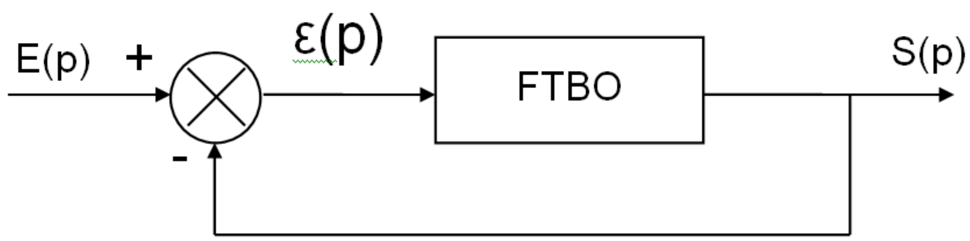
Conclusion : Stabilité de la FTBF en fonction des racines du dénominateur de la FTBF (Pôles de la FTBF).



2.5. Critère graphique de stabilité.

Attention : ce critère s'applique à l'étude de la stabilité en BF mais utilise la représentation graphique de la FTBO.

Soit le système asservi :



$$FTBO(p) = H(p) \qquad\qquad FTBF(p) = \frac{FTBO(p)}{1 + FTBO(p)}$$

L'équation caractéristique de la FTBF est : $D(p) = 1 + FTBO(p)$

Pour étudier la stabilité on recherche le signe des racines du dénominateur de la FTBF.

⇨ $D(p) = 1 + FTBO(p) = 0$ ⇨ $FTBO(p) = -1$

1. Etudier $FTBO(p) = -1$, revient à étudier le lieu (tracé de la fonction de transfert) de la FTBO par rapport au point $(-1,0)$ du plan complexe.
2. Ce point est appelé <u>point critique</u>.
3. La position de ce tracé par rapport au point critique nous renseigne sur la stabilité du système.
4. Cette étude de la stabilité peut être réalisée sur les différents diagrammes fréquentielles (Nyquist, Black et Bode).

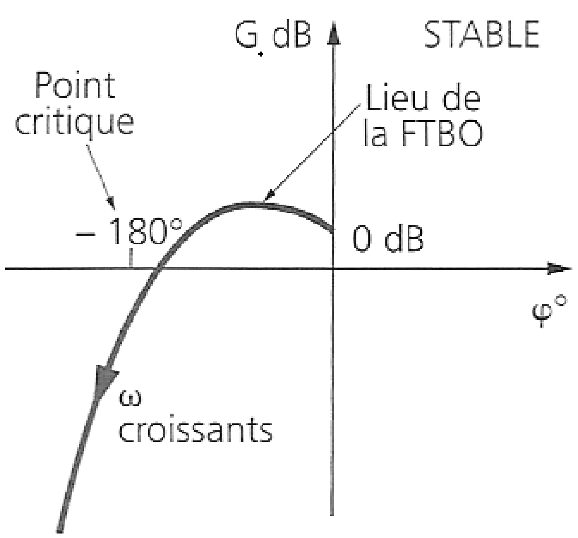
Remarque : Le critère graphique de stabilité n'est applicable que pour des FTBO stables (Re(Pôles)<0) ou justes instables (Re(Pôles)=0).

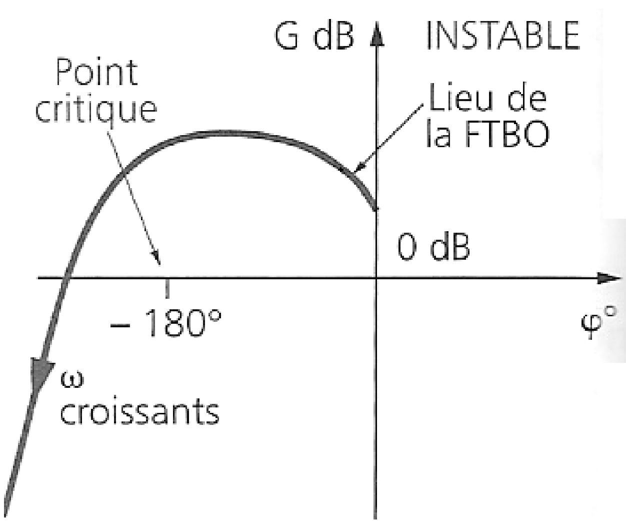
Critère graphique de stabilité dans Black :

Le diagramme de Black est hors programme, il permet cependant de bien montrer le critère graphique de stabilité.

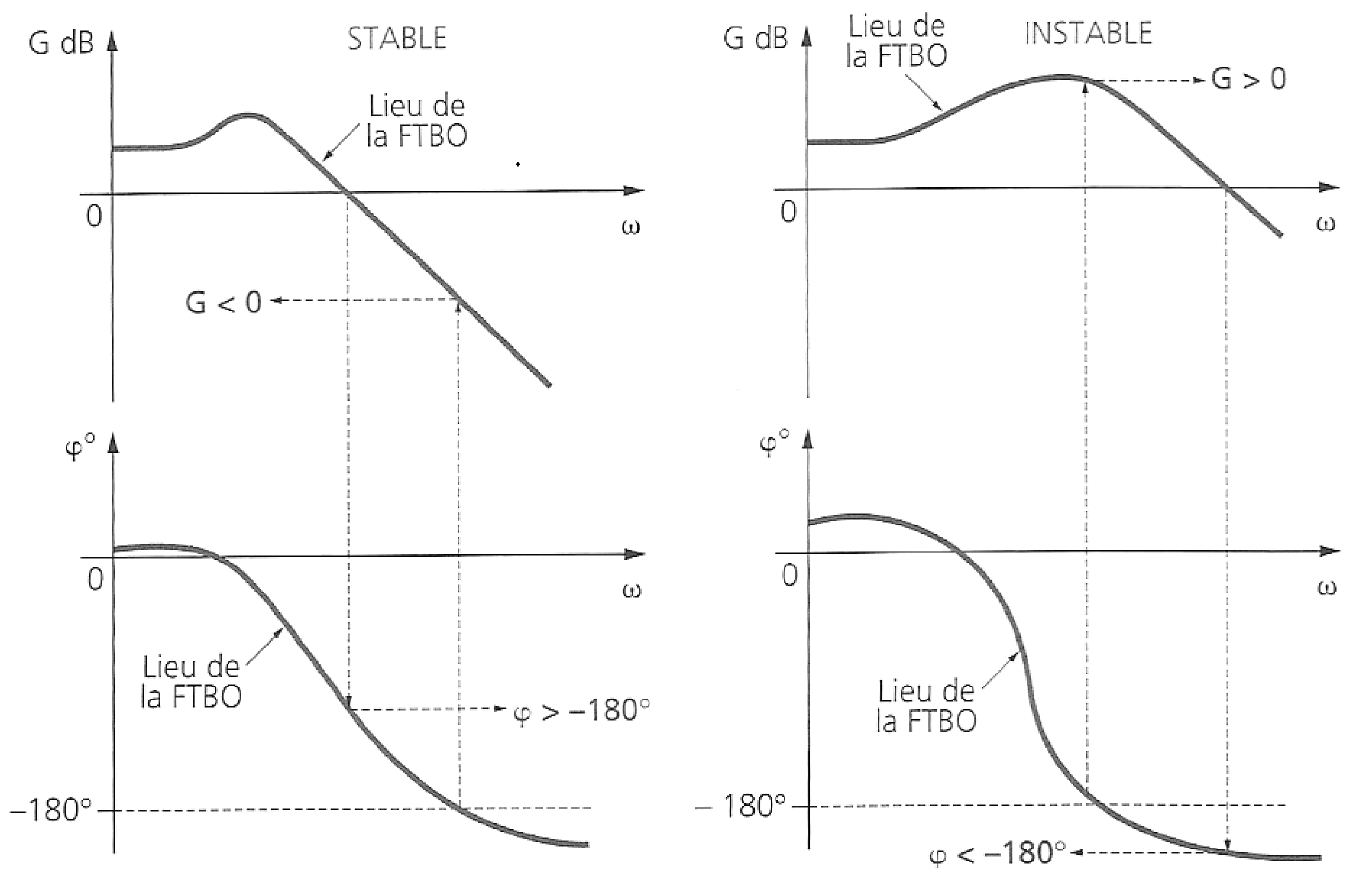
Le diagramme de Black représente en abscisse la phase et en ordonnée le gain en décibel de la fonction de transfert.

Un système asservi est stable si, en décrivant le lieu de transfert en boucle ouverte dans le sens des pulsations ω croissantes, on laisse le point critique $(-1,0)$ à droite du lieu.





Critère graphique de stabilité dans Bode :



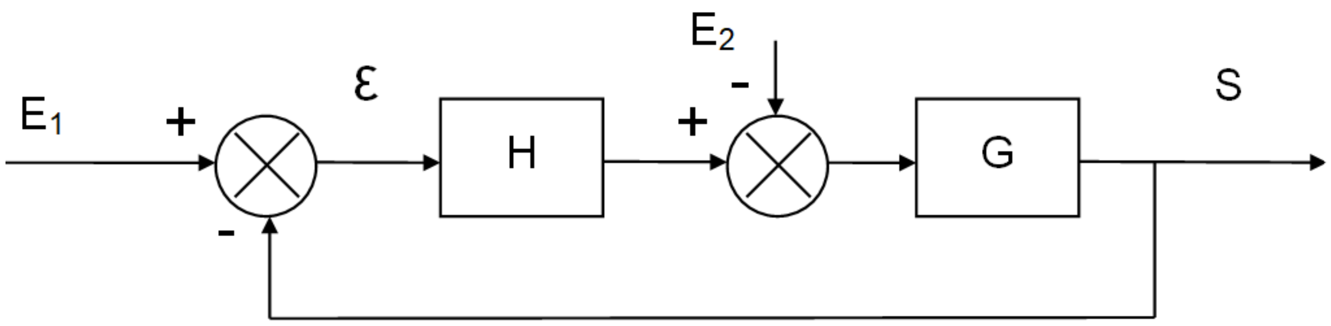
Le gain $G_{db} = 0$ pour la pulsation ω_{0db}.

La phase $\varphi = -180$ pour la pulsation ω_{-180}

Le système est stable en boucle fermée si :

pour $\omega = \omega_{0db}$, $\varphi > -180$ et que pour $\omega = \omega_{-180}$, $G_{db} < 0$.

Stabilité en présence de perturbation ?



On a : $$S(p)=\frac{-G(p)}{1+H(p).G(p)}.E_2(p)+\frac{H(p).G(p)}{1+H(p).G(p)}.E_1(p)$$

Les deux fonctions de transfert ont le même dénominateur et donc la même équation caractéristique.

⇨ La stabilité n'est pas liée à la nature de l'entrée de consigne ou à celle d'une éventuelle perturbation mais bien au système et à la fonction de transfert de la boucle ouverte !

2.6. Stabilité relative

Constats :

1. Un système asservi n'est pas invariant dans le temps. Phénomène d'usure, de fatigue…
2. Les conditions de fonctionnement peuvent avoir une incidence sur les performances. Par exemple un moteur électrique n'a pas le même comportement à « chaud » et à « froid ». De même, la température à un gros impact sur la viscosité de l'huile d'un actionneur hydraulique et donc sur l'amortissement de la chaîne d'énergie.
3. Tout modèle d'étude n'est qu'une représentation imparfaite du système réel : présence de non linéarité ou nécessité de considérer un ordre supérieure à haute fréquence…
4. Un système asservi doit présenter un comportement bien amorti en BF.

Pour toutes ces raisons il est raisonnable et prudent de s'éloigner du point critique qui marque la limite de stabilité absolue.

En diminuant le gain de la FTBO, on s'éloigne généralement de l'instabilité et l'on augmente donc la marge de stabilité.

Cependant diminuer ce gain va nuire à la précision et à la rapidité en boucle fermée.

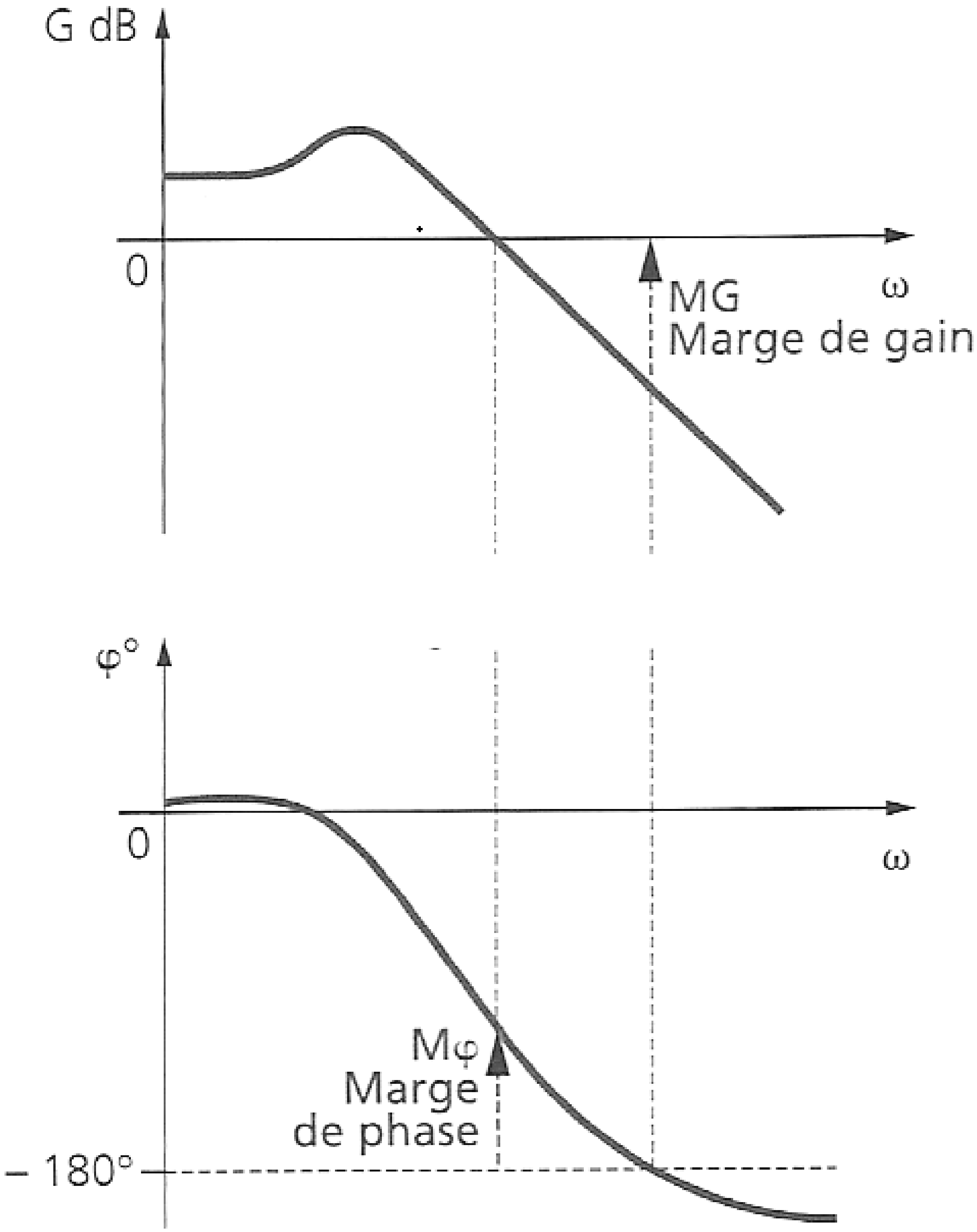
Il y a donc un dilemme entre précision et stabilité et il faut trouver un compromis pour le réglage du gain du correcteur.

Marges de stabilité

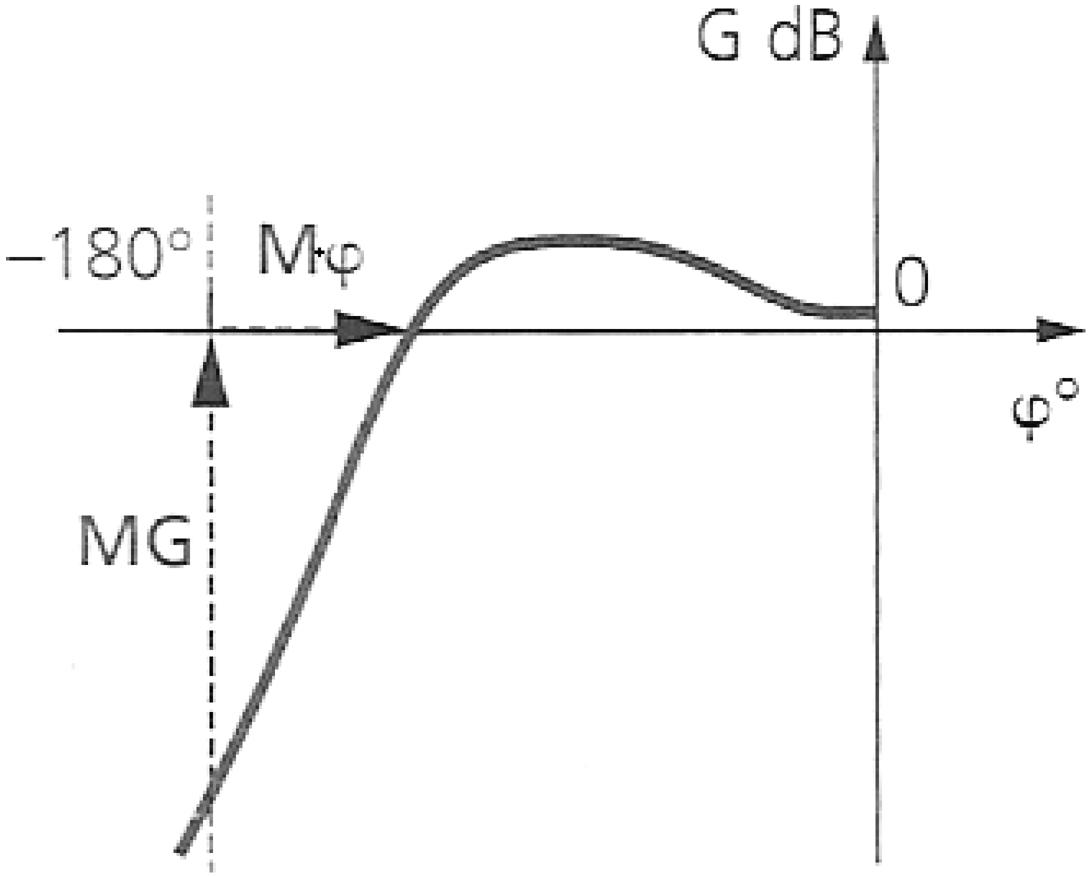
Pour mesurer l'éloignement de la FTBO du point critique on utilise couramment les marges de phase et de gain.

Valeurs Classiques : Marge de phase : 45° à 50°
Marge de gain : 10 à 12 db

Marge de stabilité dans le diagramme de Bode :

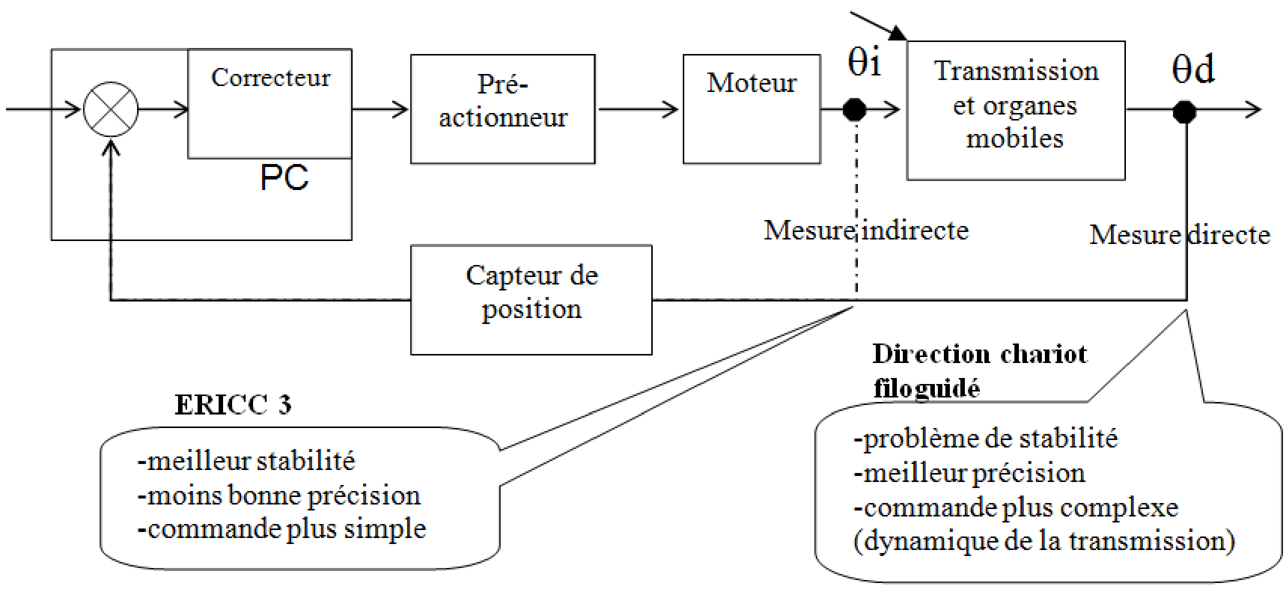


Marge de stabilité dans le diagramme de Black :



Remarque : Influence de la position du capteur dans un asservissement.

La souplesse et le jeu dans la transmission a des effets sur les performances de l'asservissement.



2.7. Rapidité des systèmes asservis

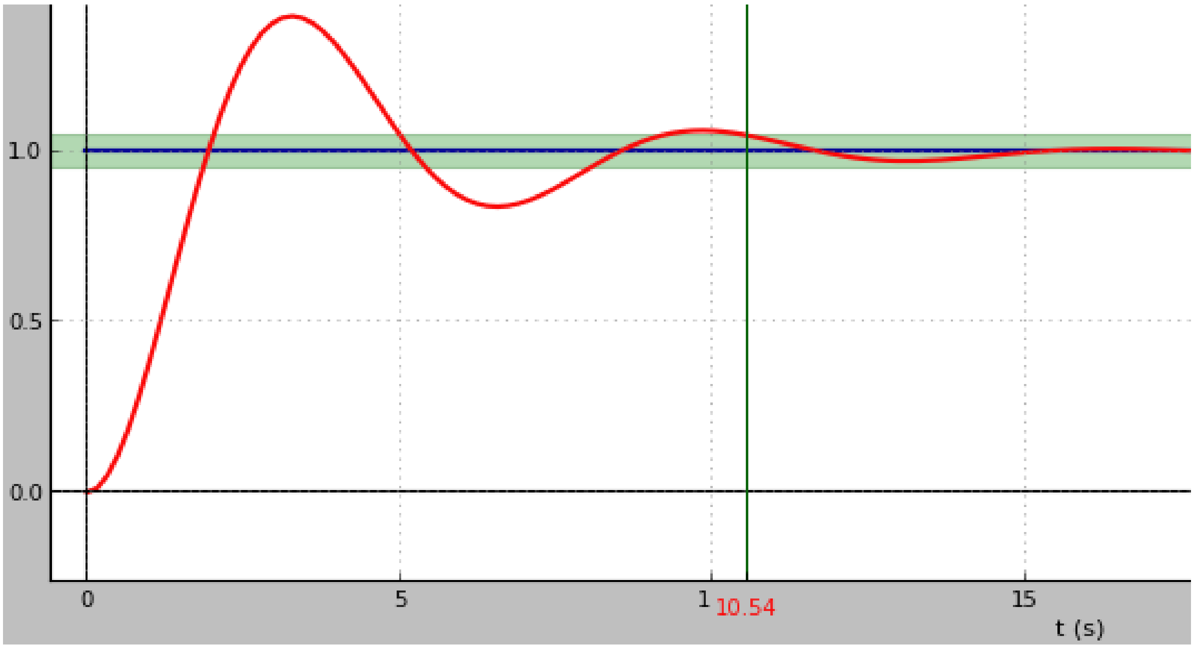
Définitions :

Temps de réponse à 5% : Temps mis pour que la sortie atteigne la valeur finale (pas la consigne) à 5% prés (et rester à 5% prés). C'est le temps mis pour rentrer dans le « tube » des 10% et ne plus en sortir.

Temps de montée : Temps mis pour que la sortie atteigne la valeur finale (pas la consigne) à 5% prés.

Remarque : Le temps de montée ne prend pas en compte les oscillations de la réponse.

Exemple :



Rapidité des systèmes fondamentaux :

- ✓ Système du premier ordre

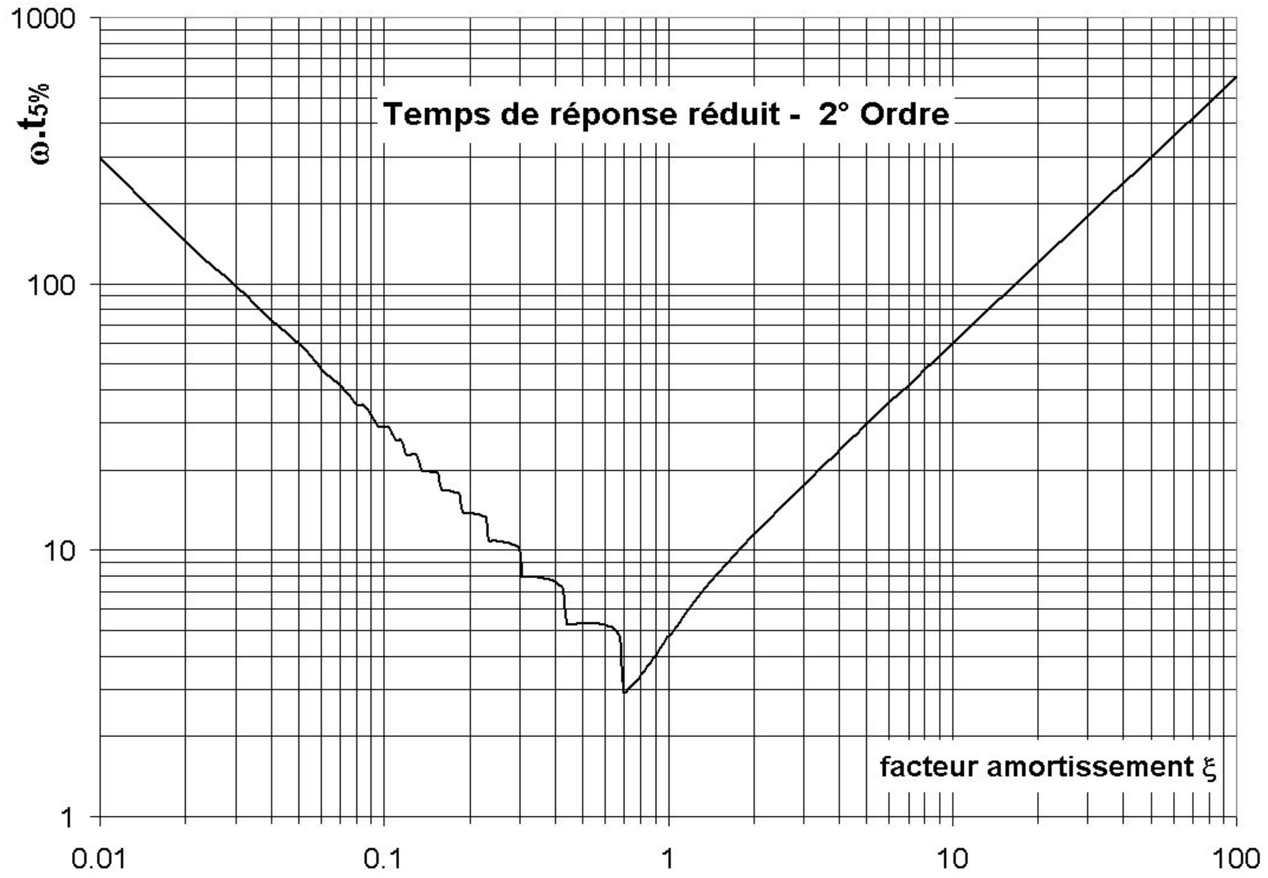
Système dont la FTBF est : $FTBF(p) = \dfrac{K}{1+\tau.p}$

⇨ Temps de réponse : $t_{5\%} = 3.\tau$

- ✓ Système du deuxième ordre

Système dont la FTBF est : $FTBF(p) = \dfrac{K}{\dfrac{p^2}{\omega_n^2} + \dfrac{2.z}{\omega_n}.p + 1}$

⇨ La rapidité dépend des valeurs du coefficient d'amortissement z.
Ce qu'indique le diagramme suivant :



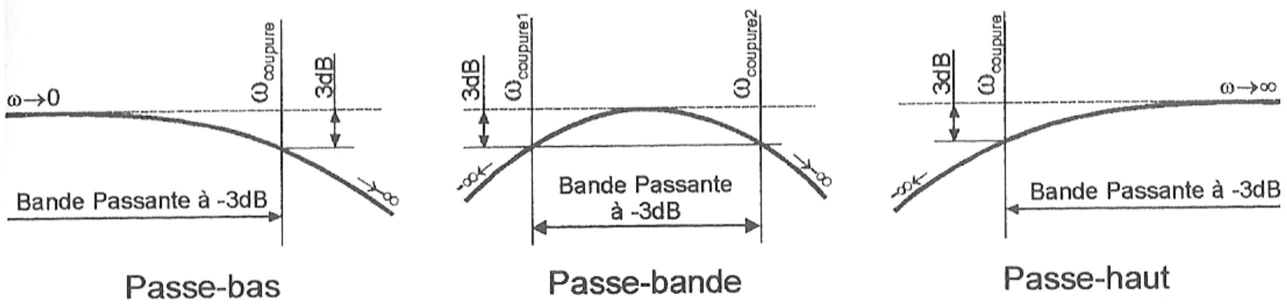
Valeurs remarquables :

- ✓ $z = 0{,}7$ ⇨ $t_{5\%}.\omega_n = 3$ ⇨ Temps de réponse le plus rapide avec dépassement.
- ✓ $z = 1$ ⇨ $t_{5\%}.\omega_n = 5$ ⇨ Temps de réponse le plus rapide sans dépassement.

Relation entre rapidité et pulsation au gain unité.

Bande passante :

La bande passante à -3db est la plage des pulsations ω pour lesquelles la perte de gain reste inférieure à 3db par rapport à la valeur maxi.



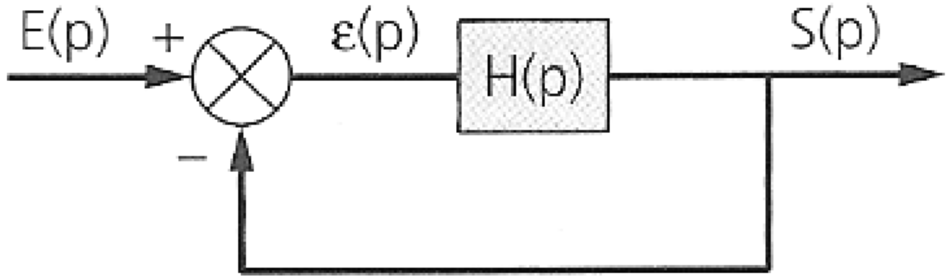
La plupart des systèmes physiquement réalisables sont des filtres passe bas.

Pulsation au gain unité.

La pulsation au gain unité est la pulsation pour laquelle le gain en décibel est nul, c'est-à-dire que le module de la fonction de transfert est égal à 1.

Exemple 1 :

Soit le système asservi suivant avec $H(p)=\dfrac{K}{1+\tau.p}$

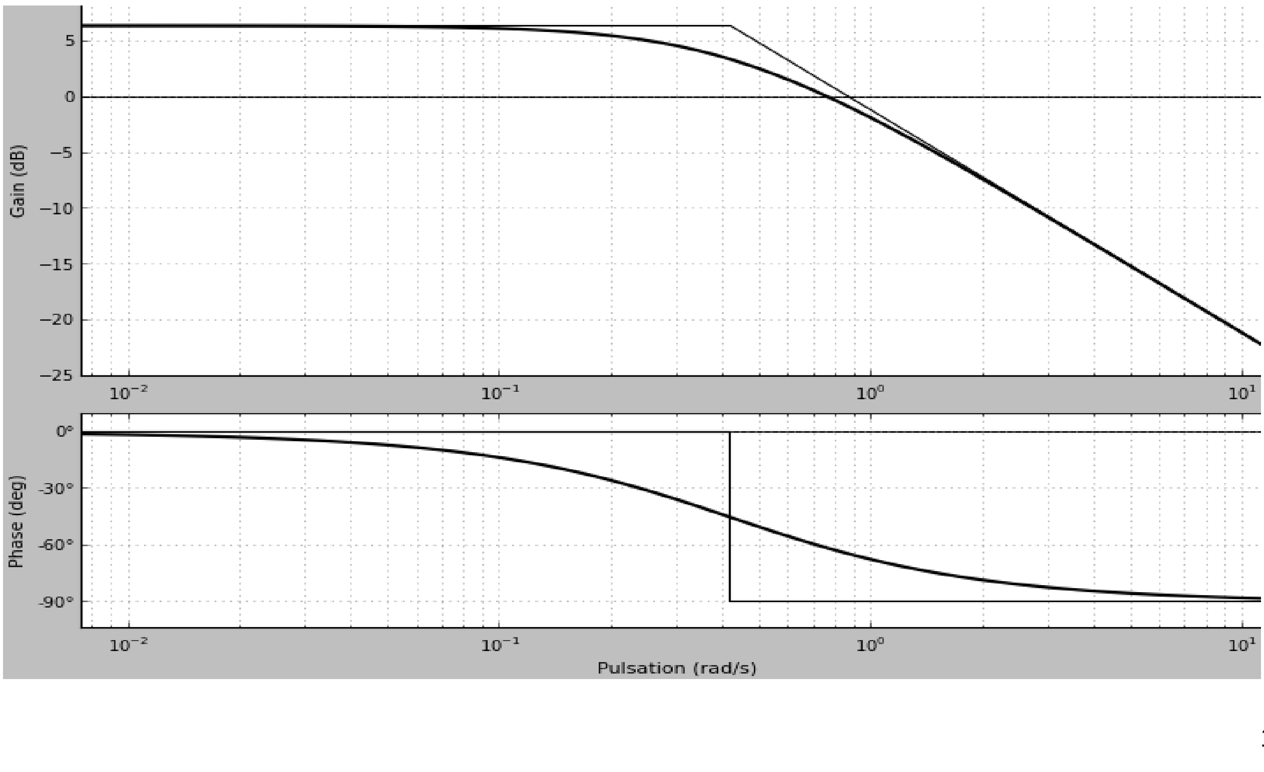


La FTBO est du premier ordre : $FTBO(p)=H(p)=\dfrac{K}{1+\tau.p}$

Calcul de la FTBF : $$FTBF(p)=\frac{K}{K+1}.\frac{1}{1+\dfrac{\tau}{K+1}.p}$$

Rapidité : $t_{5\%}=3.\dfrac{\tau}{K+1}$

Diagramme de Bode de la FTBO :



Pour améliorer la rapidité en boucle fermée il faut :

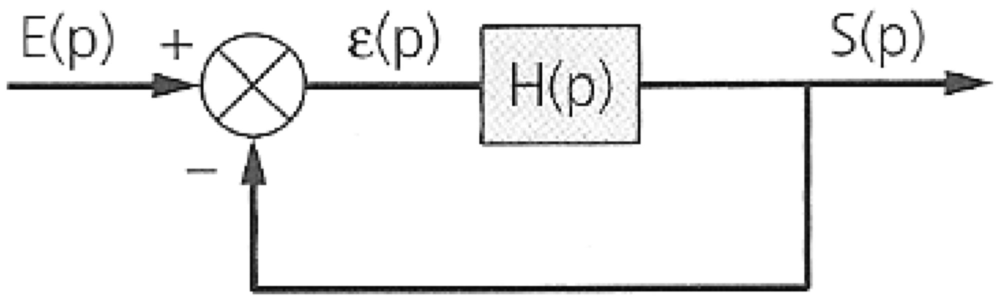
- ✓ Augmenter K (ce qui translate vers le haut le diagramme de Bode de la FTBO).
- ✓ Diminuer τ (ce qui translate vers la droite le diagramme de Bode de la FTBO)

⇨ Dans ces 2 cas, cela augmente la pulsation au gain unité de la FTBO.

Conclusion : Plus la pulsation au gain unité est élevée, plus le système est rapide.

Exemple 2 :

Soit le système asservi suivant avec $H(p) = FTBO(p) == \dfrac{K}{\dfrac{p^2}{\omega_n^2} + \dfrac{2.z}{\omega_n}.p + 1}$



La FTBO est du deuxième ordre.

Avec $\omega_n = 1$ et $K = 4$ étudions pour z = 0,2 ; 1 et 3, la relation entre la réponse temporelle de la FTBF et le diagramme de Bode de la FTBO.

Réponse temporelle de la FTBF

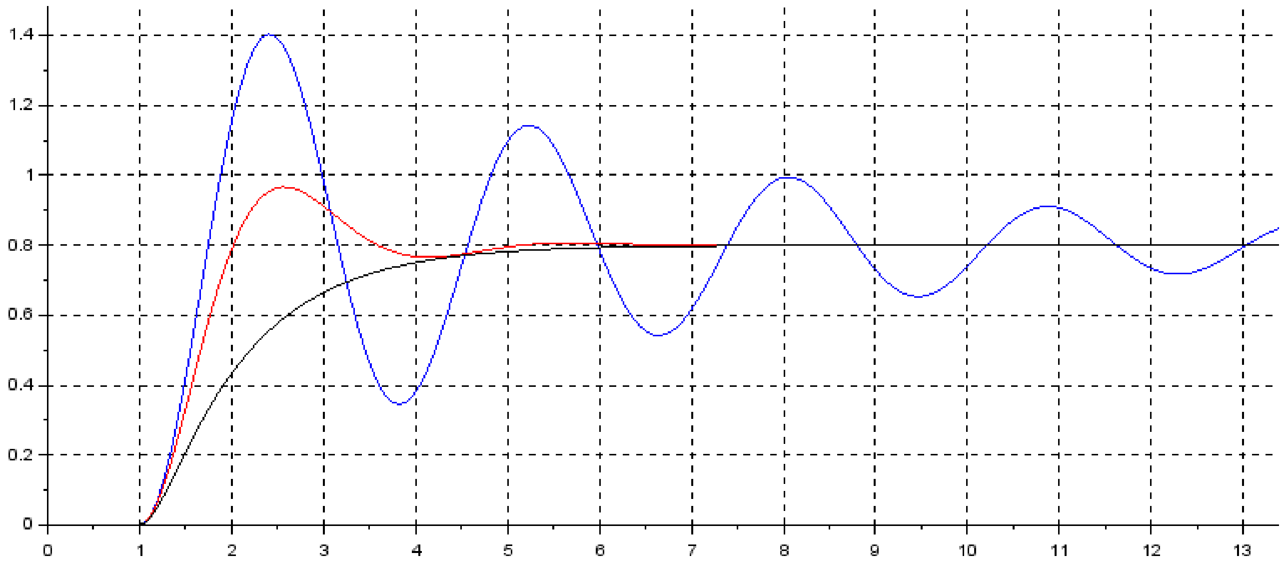
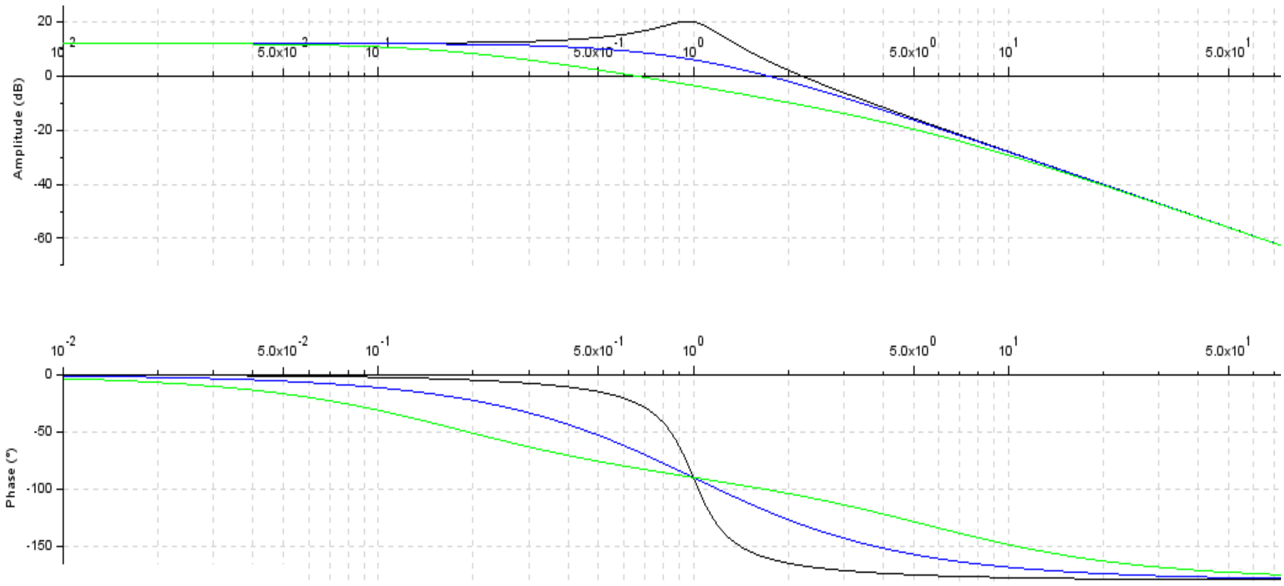
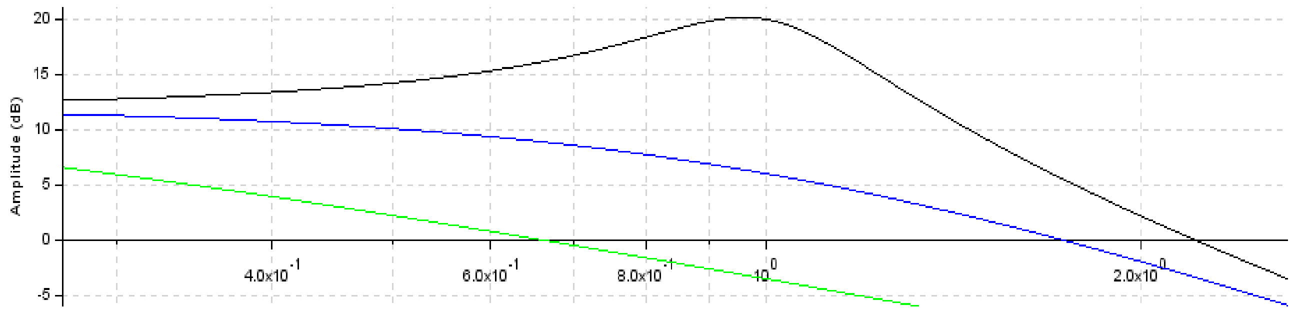


Diagramme de Bode de la FTBO



ZOOM du Diagramme de Bode de la FTBO



A partir de cet exemple on constate :

- ⇨ Plus la pulsation au gain unité est élevé, plus le temps de monté diminue.

Conclusion : Si l'on règle la stabilité du système avec <u>des marges suffisantes</u>, on peut considérer que :

- ⇨ Le système oscille peu, le temps de monté correspond au temps de réponse.
- ⇨ Plus la pulsation au gain unité de la FTBO est élevé, plus le système est rapide.

GENERALISATION :

Un critère de rapidité souvent utilisé est la pulsation au gain unité du diagramme de Bode de la FTBO.

Il permet de régler la rapidité à partir du biagramme de Bode de la FTBO.

On souhaite que la pulsation au gain unité de la FTBO soit supérieure à une valeur définie.

Exemple : Cahier des charges associé à une fonction de commande d'un axe de robot.

Fonction	Critères	Niveaux et éventuelle flexibilité
	Débattement linéaire	1 m
	Vitesse maximale de déplacement	2 $m.s^{-1}$
	Stabilité de l'axe	$M\varphi > 45°$
	Amortissement de l'axe	Aucun dépassement transitoire permis
	Précision de positionnement de l'axe	Erreur nulle en régime stationnaire et en réponse à un échelon
	Rapidité de l'axe	**Pulsation au gain unité :** **$\omega_u \geq 4$ rad.s^{-1}**

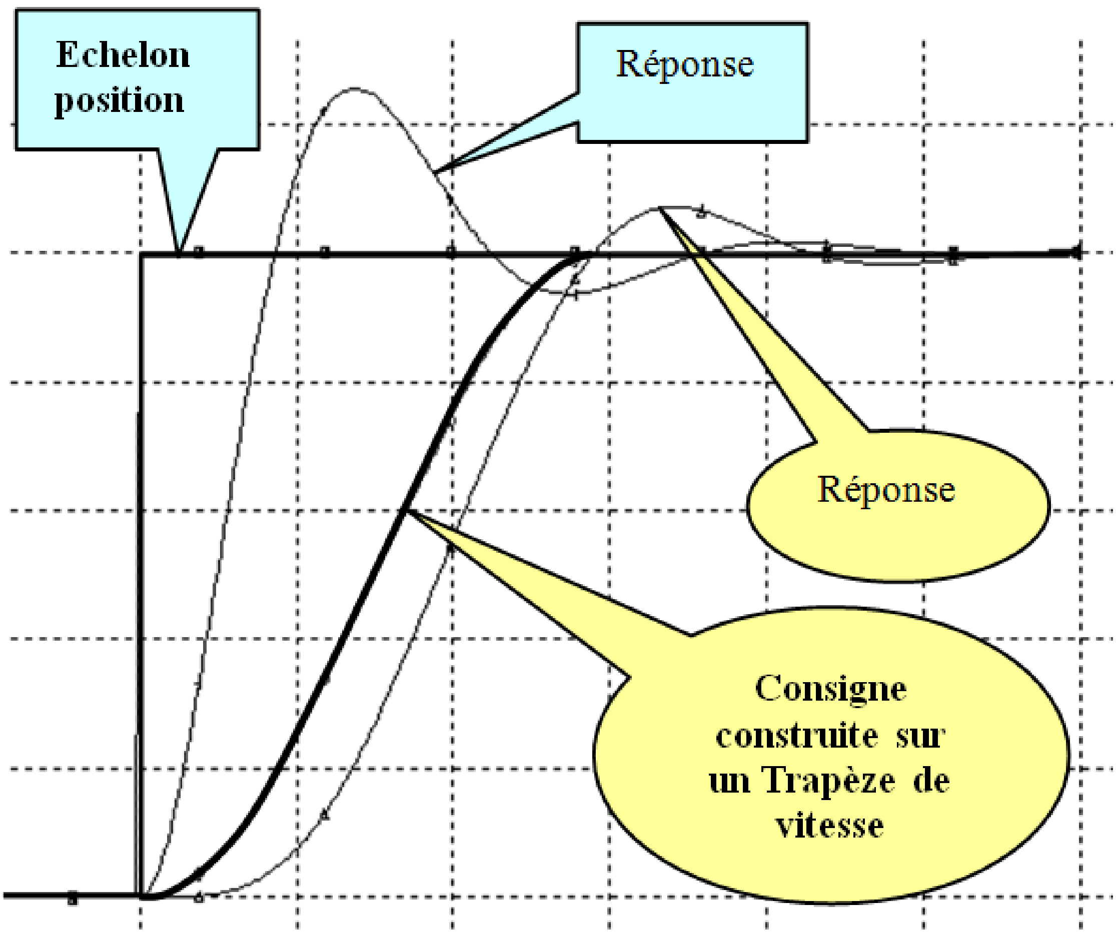
Remarque : Plus le gain de la FTBO est grand, plus la bande passante de la FTBO est grande et plus le système est précis.

2.8. Consigne données aux des systèmes asservis

Une consigne en échelon n'est pas souhaitable pour un système mécanique asservi car cela engendre des chocs dans la chaîne d'action.

On préfère des lois plus continues (trapèze de vitesse par exemple), l'idéal étant d'avoir une consigne de position dont la dérivée seconde est continue (accélération continue).

<u>Le dépassement est réduit mais le temps de montée est alors augmenté.</u>



2.9. Synthèse sur les performances d'un système asservi.

	FTBO	FTBF
Précision en poursuite		
Précision en régulation		
Stabilité absolue		
Stabilité relative		
Rapidité		