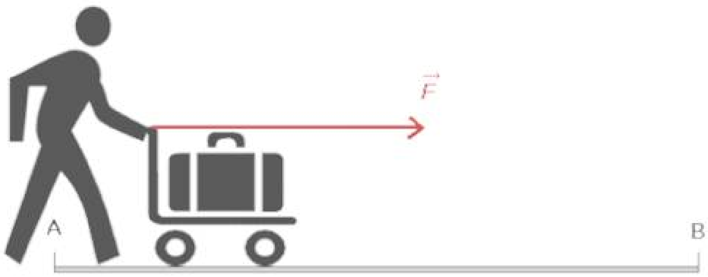
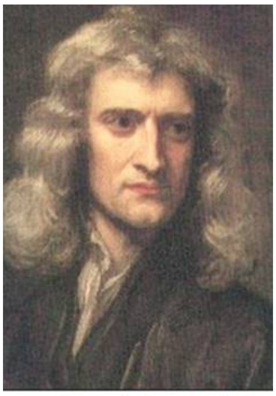
Dynamique des systèmes de solides 1

Plan :

1. Introduction.

En exerçant des actions mécaniques sur un solide, il est possible de le mettre en mouvement ou de modifier son mouvement.





Isaac Newton 1642 - 1727

La dynamique permet de relier le mouvement des solides d'un système mécanique aux actions mécaniques qui lui sont appliquées.

Les équations de la dynamique permettent de répondre à plusieurs problèmes :

- ✓ Trouver les équations de mouvement.
  Connaissant les actions mécaniques extérieures qui s'exercent sur un système, on peut déterminer le mouvement.
- ✓ Dimensionner des actionneurs.
  Connaissant le mouvement souhaité, on peut déterminer les actions mécaniques qui vont le provoquer.
- ✓ Dimensionner des liaisons.
  A partir du mouvement ou des actions mécaniques extérieures, on peut trouver des inconnues d'action mécanique de liaison.

On peut distinguer deux formulations différentes :

- ✓ Principe Fondamental de la dynamique (PFD).
  Il relie les efforts extérieurs aux grandeurs cinétiques comme l'accélération.

- ✓ Théorème de l'énergie cinétique (TEC).
  Il relie les puissances extérieures et intérieures à une autre grandeur cinétique : l'énergie cinétique.
  Ce théorème se démontre à partir du principe précédent.

2. Centre d'inertie.

2.1. Centre d'inertie d'un solide.

Soit un solide S de masse m.

Le centre de gravité G d'un solide est définit par : $\int_S \overrightarrow{GP}.dm = \vec{0}$

Pour son calcul, on utilise l'expression : $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m}\int_S \overrightarrow{OP}.dm$

Démonstration :

$$\int_S \overrightarrow{GP}.dm = \vec{0} \qquad \int_S \overrightarrow{GO}.dm + \int_S \overrightarrow{OP}.dm = \vec{0}$$

Et donc : $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m}\int_S \overrightarrow{OP}.dm$

2.2. Centre d'inertie d'un ensemble de solides.

Soit un solide E composé d'un ensemble de solides Si de centres d'inertie Gi.

Centre d'inertie du solide E :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_i m_i.\overrightarrow{OG_i}}{\sum_i m_i}$$

Remarques :

- ✓ La recherche des éléments de symétrie est un préalable qui facilite grandement la localisation du centre de gravité.
- ✓ Dans un champ de pesanteur constant le centre de gravité est confondu avec le centre d'inertie (toujours le cas en SI).

3. <u>Torseur cinétique d'un solide S.</u>

Soit un solide (S) en mouvement par rapport à un repère (R).

Le torseur cinétique est le torseur des quantités de mouvement d'un solide (S) dans son mouvement par rapport au repère (R).

Le torseur cinétique d'un solide (S) dans son mouvement par rapport au repère (R) est, au point de réduction A :

$$\left\{C(S/R)\right\} = \left\{\begin{array}{c} \vec{R}_c(S/R) = \int_S \vec{V}(P/R).dm \\ \vec{\sigma}(A,S/R) = \int_S \overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}(P/R).dm \end{array}\right\}_A$$

Ce torseur dépend du champ des vitesses et de la <u>répartition de masse du solide</u>.

$\vec{R}_c(S/R)$: Résultante cinétique est aussi appelée «quantité de mouvement ».

S'exprime en $kg.m.s^{-1}$.

$\vec{\sigma}(A,S/R)$: Moment cinétique, s'exprime en $kg.m^2.s^{-1}$.

Intérêt du torseur cinétique (en dynamique) :

- ✓ C'est un intermédiaire dans le calcul du moment dynamique.
- ✓ Il intervient aussi dans le calcul de l'énergie cinétique.
- ✓ Dans certains problèmes, on a conservation de la quantité de mouvement ou du moment cinétique.

3.1. Calcul de la résultante cinétique $\vec{R}_c(S/R)$.

Pour son calcul, on utilise l'expression : $$\vec{R}_c(S/R) = m.\vec{V}(G \in S/R)$$

Démonstration :

$$\vec{R}_c(E/R) = \int_S \vec{V}(P/R).dm = \int_S \left(\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt} \right)_R .dm = \frac{d}{dt}\left(\int_S \overrightarrow{OP}.dm \right)$$

Rappel : Avec G, le centre de gravité, on a $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m} \int_S \overrightarrow{OP}.dm$

$$\vec{R}_c(E/R) = \frac{d}{dt}\left(m.\overrightarrow{OG} \right) = m.\vec{V}(G \in S/R)$$

3.2. Relation entre le moment cinétique de 2 points.

Le moment vérifie : $$\vec{\sigma}(A, S/R) = \vec{\sigma}(B, S/R) + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{R}_c(S/R)$$

Démonstration : $$\vec{\sigma}(A, S/R) = \int_S \overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}(P/R).dm$$

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP}$$

$$\vec{\sigma}(A, S/R) = \int_S \overrightarrow{AB} \wedge \vec{V}(P/R).dm + \int_S \overrightarrow{BP} \wedge \vec{V}(P/R).dm$$

$$\vec{\sigma}(A, S/R) = \overrightarrow{AB} \wedge \int_S \vec{V}(P/R).dm + \int_S \overrightarrow{BP} \wedge \vec{V}(P/R).dm$$

$$\vec{\sigma}(A, S/R) = \vec{\sigma}(B, S/R) + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{R}_c(S/R)$$

3.3. Calcul du moment cinétique, matrice d'inertie.

Pour son calcul, on utilise la matrice d'inertie du solide S.

$$\vec{\sigma}(A,S/R) = \overline{\overline{I}}_A(S).\vec{\Omega}(S/R) + m.\overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}(A,S/R)$$

Avec : $$\overline{\overline{I}}_A(S) = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}$$ Matrice d'inertie en A du solide (S).

$A = \int_S (y^2 + z^2).dm$ $\quad$ $B = \int_S (x^2 + z^2).dm$ $\quad$ $C = \int_S (x^2 + y^2).dm$

$D = \int_S y.z.dm$ $\quad$ $E = \int_S x.z.dm$ $\quad$ $F = \int_S x.y.dm$

Vocabulaire :

$A = \int_S (y^2 + z^2).dm$: Moment d'inertie du solide (S) autour de l'axe $(O,\vec{i})$.

$F = \int_S x.y.dm$: Produit d'inertie par rapport au plan $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Ces composantes s'expriment en $kg.m^2$

Démonstration :

$$\vec{\sigma}(A,S/R) = \int_S \overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}(P,S/R).dm$$

On utilise la propriété du champ des vitesses d'un solide (relation de Varignon) :

$$\vec{V}(P,S/R) = \vec{V}(A,S/R) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{AP}$$

$$\vec{\sigma}(A,S/R) = \int_S \overrightarrow{AP} \wedge (\vec{V}(A,S/R) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{AP}).dm$$

$$\vec{\sigma}(A,S/R) = \int_S \overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}(A,S/R).dm + \int_S \overrightarrow{AP} \wedge (\vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{AP}).dm$$

Premier terme : $\int_S \overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}(A,S/R).dm = \int_S \overrightarrow{AP}.dm \wedge \vec{V}(A,S/R)$

Rappel : $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m}\int_S \overrightarrow{OP}.dm$ de même : $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{m}\int_S \overrightarrow{AP}.dm$

Finalement : $\int_S \overrightarrow{AP}.dm \wedge \vec{V}(A,S/R) = m.\overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}(A,S/R)$

Deuxième terme : $\int_S \overrightarrow{AP} \wedge (\vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{AP}).dm$

$$\overrightarrow{AP} \wedge (\vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{AP}) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \left[\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right]$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha.(y^2+z^2) - \beta.x.y - \gamma.x.z \\ \beta.(x^2+z^2) - \alpha.x.y - \gamma.y.z \\ \gamma.(x^2+y^2) - \alpha.x.z - \beta.y.z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2+z^2 & -x.y & -x.z \\ -x.y & x^2+z^2 & -y.z \\ -x.z & -y.z & x^2+y^2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

Avec l'intégrale :

$$\int_S \overrightarrow{AP} \wedge (\vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{AP}).dm = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

Finalement : $\int_S \overrightarrow{AP} \wedge (\vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{AP}).dm = \overline{\overline{I}}_A(S).\vec{\Omega}(S/R)$

Matrice d'inertie : $\overline{\overline{I}}_A(S) = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}$

Avec :

$A = \int_S (y^2+z^2).dm$ $B = \int_S (x^2+z^2).dm$ $C = \int_S (x^2+y^2).dm$

$D = \int_S y.z.dm$ $E = \int_S x.z.dm$ $F = \int_S x.y.dm$

4. Matrice d'inertie.

La masse caractérise l'inertie dans le cas d'un mouvement de translation.

Pour un mouvement de rotation ou un mouvement quelconque, il faut tenir compte de la rotation et de la répartition des masses.

La matrice d'inertie caractérise cette répartition de la matière d'un solide autour d'un point dans une base donnée.

Les moments produits expriment l'absence de symétrie dans cette répartition.

Remarques :

- ✓ On choisit un repère $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ fixe de (S) pour calculer la matrice d'inertie afin d'avoir des coefficients constants.
- ✓ La matrice est symétrique.
- ✓ L'unité des coefficients est le $kg.m^2$.
- ✓ Pour un solide complexe S décomposable en n solides élémentaires S = (S_1,…S_n) on a : $\overline{\overline{I}}_A(S) = \overline{\overline{I}}_A(S_1) + \overline{\overline{I}}_A(S_2) + \ldots + \overline{\overline{I}}_A(S_n)$

  (Matrices exprimées dans la même base et au même point).

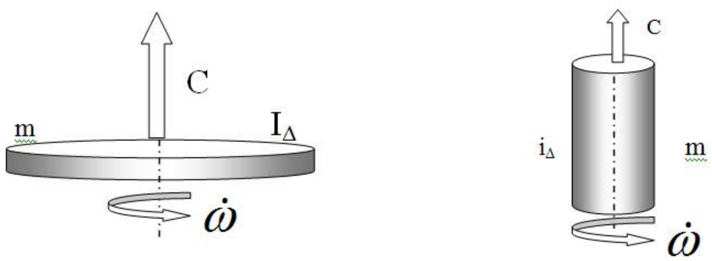
La **MASSE** caractérise l'**INERTIE** en **TRANSLATION** d'un solide.
Plus la masse est grande, plus il est difficile de lui communiquer une accélération dans une direction donnée.

$$F = M.a = M.\ddot{x}$$

De la même façon, le **MOMENT D'INERTIE** caractérise l'**INERTIE** en **ROTATION** d'un solide.

Plus le moment d'inertie I_Δ est grand, plus il est difficile de lui communiquer une accélération angulaire autour de l'axe Δ.

$$C = I_\Delta.\dot{\omega} = I_\Delta.\ddot{\theta}$$



4.1. Exploitation des symétries dans la détermination de la matrice d'inertie.

- S symétrique par rapport au plan $P(A,\vec{x},\vec{y})$.

$S = S_1 + S_2$

S_1 : partie de S tel que $z > 0$

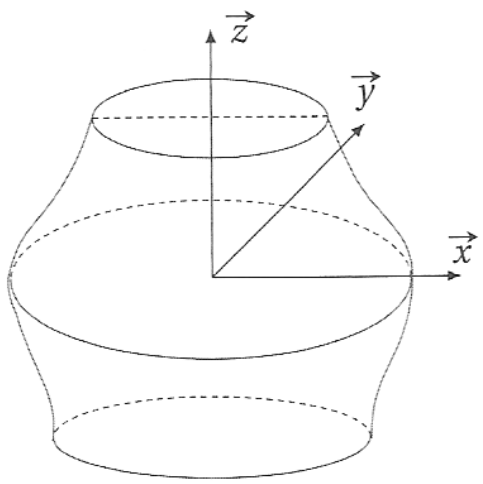
S_2 : partie de S tel que $z < 0$

$$\int_S x.z.dm = \int_{S1} x.z.dm + \int_{S2} x.z.dm = \int_{S1} x.z.dm + \int_{S1} x.(-z).dm = 0$$

De même $\int_S y.z.dm = 0$ ⇨ $\overline{\overline{I}}_A(S) = \begin{bmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}$

- S possède 2 plans de symétrie : $\overline{\overline{J}}_A(S) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}$

- S possède un axe de symétrie.



$$A = \int_S (y^2 + z^2).dm = B = \int_S (x^2 + z^2).dm$$

$$2.A = \int_S (x^2 + y^2).dm + 2.\int_S z^2.dm$$

$$C = \int_S (x^2 + y^2).dm = 2.A - 2.\int_S z^2.dm$$

$$\overline{\overline{J}}_A(S) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}$$

4.2. Théorème de Huygens, relation entre $\overline{\overline{I}}_A(S)$ et $\overline{\overline{I}}_G(S)$.

Le théorème de Huygens relie la matrice d'inertie d'un solide S de masse m au point A à la matrice d'inertie au centre d'inertie G.

$$\overline{\overline{I}}_A(S) = \overline{\overline{I}}_G(S_1) + m.\begin{pmatrix} b^2+c^2 & -a.b & -a.c \\ -a.b & a^2+c^2 & -b.c \\ -a.c & -b.c & a^2+b^2 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AG} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Démonstration :

$$\overline{\overline{I}}_A(S).\vec{u} = \int_S \overrightarrow{AP} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{AP}).dm \qquad \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GP}$$

$$\overline{\overline{I}}_A(S).\vec{u} = \int_S (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GP}) \wedge (\vec{u} \wedge (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GP})).dm$$

$$\overline{\overline{I}}_A(S).\vec{u} = \int_S \overrightarrow{AG} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{AG}).dm + \int_S \overrightarrow{AG} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{GP}).dm$$
$$+ \int_S \overrightarrow{GP} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{AG}).dm + \int_S \overrightarrow{GP} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{GP}).dm$$

Premier terme :

$$\int_S \overrightarrow{AG} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{AG}).dm = m.\overrightarrow{AG} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{AG})$$

Calcul déjà fait, avec $\vec{u} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$, on trouve :

$$\int_S \overrightarrow{AG} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{AG}).dm = m.\begin{pmatrix} b^2+c^2 & -a.b & -a.c \\ -a.b & a^2+c^2 & -b.c \\ -a.c & -b.c & a^2+b^2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

Autres termes :

$$\int_S \overrightarrow{AG} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{GP}).dm = \overrightarrow{AG} \wedge (\vec{u} \wedge (\int_S \overrightarrow{GP}.dm)) = \vec{0}$$

$$\int_S \overrightarrow{GP} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{AG}).dm = (\int_S \overrightarrow{GP}.dm) \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{AG}) = \vec{0}$$

$$\int_S \overrightarrow{GP} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{GP}).dm = \overline{\overline{I}}_G (S).\vec{u}$$

4.3. Axes et moments principaux d'inertie.

Ces notions sont utilisées dans les études d'équilibrage d'un solide en rotation autour d'un axe fixe.
La matrice d'inertie est symétrique, on peut donc l'écrire dans une base $B_p(\vec{x}_p, \vec{y}_p, \vec{z}_p)$:

$$\overline{\overline{I}}_A (S) = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & J & 0 \\ 0 & 0 & K \end{bmatrix}_{Bp}$$

B_p : Base principale d'inertie.
$(A, \vec{x}_p)$, $(A, \vec{y}_p)$ et $(A, \vec{z}_p)$: Axes principaux d'inertie.
I , J et K : Moments principaux d'inertie.

Si de plus on se place en G, on parle de Base centrale d'inertie et de Moments centraux d'inertie.

4.4. Moment d'inertie d'un solide autour d'un axe.

Le moment d'inertie d'un solide (S) autour d'un axe $\Delta = (A, \vec{u})$ est la quantité positive : $I_\Delta (S) = \int_S r^2.dm$

Avec r la distance entre P et Δ

Conséquence : Les termes diagonaux de la matrice d'inertie sont les moments d'inertie de (S) autour des axes $(A, \vec{i})$; $(A, \vec{j})$ et $(A, \vec{k})$.

5. Torseur dynamique.

Le torseur dynamique du solide S dans son mouvement par rapport au repère R est au point de réduction A :

$$\left\{D(S/R)\right\} = \left\{\begin{array}{c} \vec{R}_d(S/R) = \int_S \vec{a}(P/R).dm \\ \vec{\delta}(A,S/R) = \int_S \overrightarrow{AP} \wedge \vec{a}(P/R).dm \end{array}\right\}_A$$

Ce torseur dépend du champ des d'accélérations et de sa répartition de masse.

$\overrightarrow{R_d}(S/R)$: Résultante dynamique, parfois appelée «quantité d'accélération », son unité est le $kg.m.s^{-2}$.

$\vec{\delta}(A,S/R)$: Moment dynamique en A, son unité est $kg.m^2.s^{-2}$.

Remarque : Soit Σ un système de n solides : $\Sigma = (S_1 + S_2 + ...)$.

On a : $\left\{D(\Sigma/R)\right\} = \left\{D(S_1/R)\right\} + \left\{D(S_2/R)\right\} + ...$

5.1. Calcul de la résultante dynamique.

$$\vec{R}_d(S/R) = m.\vec{a}(G/R)$$

Démonstration : …identique à celle de la résultante cinétique.

Relation entre la résultante cinétique et dynamique : $\vec{R}_d(E/R) = \frac{d}{dt}\left(\vec{R}_c(E/R)\right)_R$

5.2. Relation entre le moment dynamique de 2 points.

$$\vec{\delta}(A,S/R) = \vec{\delta}(B,S/R) + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{R}_d(S/R)$$

Démonstration : …

$$\vec{\delta}(A,S/R) = \int_S \overrightarrow{AP} \wedge \vec{a}(P/R).dm$$

$$\vec{\delta}(A,S/R) = \int_S \overrightarrow{AB} \wedge \vec{a}(P/R).dm + \int_S \overrightarrow{BP} \wedge \vec{a}(P/R).dm$$

$$\vec{\delta}(A,S/R) = \overrightarrow{AB} \wedge \int_S \vec{a}(P/R).dm + \vec{\delta}(A,S/R) = ...$$

5.3. Calcul du moment dynamique.

Le moment dynamique se calcul à partir du moment cinétique, avec la relation :

$$\vec{\delta}(A,S/R) = \frac{d}{dt}\left(\vec{\sigma}(A,S/R)\right)_R + \vec{V}(A/R) \wedge m\,.\vec{V}(G \in S/R)$$

Attention :

Il s'agit de $\vec{V}(A/R) = \left(\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right)_R$ et non de $\vec{V}(A \in S/R)$ comme nous pourrions l'écrire en mécanique du solide.

Ces deux vitesses sont identiques si et seulement si le point A est physiquement lié au solide E.

Il faut donc faire très attention quand le point A est un point géométrique de contact entre deux solides.

Illustration :

Démonstration : $$\vec{\sigma}(A,S/R)=\int_S \overrightarrow{AP}\wedge\vec{V}(P/R).dm$$

$$\left(\frac{d\vec{\sigma}(A,E/R)}{dt}\right)_R=\int_S\left(\frac{\overrightarrow{AP}}{dt}\right)_R\wedge\vec{V}(P/R).dm+\int_S\overrightarrow{AP}\wedge\left(\frac{\vec{V}(P/R)}{dt}\right)_R.dm$$

$$\left(\frac{d\vec{\sigma}(A,E/R)}{dt}\right)_R=(1)+\vec{\delta}(A,E/R)$$

$$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}$$

$$(1)=\int_S\left(\frac{\overrightarrow{OP}}{dt}\right)_R\wedge\vec{V}(P/R).dm-\int_S\left(\frac{\overrightarrow{OA}}{dt}\right)_R\wedge\vec{V}(P/R).dm$$

$$(1)=\int_S\vec{V}(P\in S/R)\wedge\vec{V}(P/R).dm-\int_S\vec{V}(A/R)\wedge\vec{V}(P/R).dm$$

$$(1)=\vec{0}-\vec{V}(A/R)\wedge\int_S\vec{V}(P/R).dm=-\vec{V}(A/R)\wedge m_E.\vec{V}(G\in E/R)$$

$$\vec{\delta}(A,E/R)=\frac{d}{dt}\left(\vec{\sigma}(A,E/R)\right)_R+\vec{V}(A/R)\wedge m_E.\vec{V}(G,E/R)$$

Cas particuliers importants car fréquents :

- ✓ A est fixe dans le repère R : $$\vec{\delta}(A,E/R)=\frac{d}{dt}\left(\vec{\sigma}(A,E/R)\right)_R$$
- ✓ Calcul de moment dynamique en G : $$\vec{\delta}(G,E/R)=\frac{d}{dt}\left(\vec{\sigma}(G,E/R)\right)_R$$

5.4. Méthode conseillée pour le calcul du moment dynamique.

La matrice $\overline{\overline{I}}_A(S)$ est donnée avec A point fixe du solide.

On souhaite calculer le moment dynamique en un point B quelconque $\vec{\delta}(B,S/R)$

- Calculer : (attention à utiliser la même base pour le calcul matriciel)

$$\vec{\sigma}(A,S/R) = \overline{\overline{I_A}}(S).\vec{\Omega}(S/R) + m.\overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}(A,S/R)$$

- En déduire :

$$\vec{\delta}(A,S/R) = \frac{d}{dt}\left(\vec{\sigma}(A,S/R)\right)_R + \vec{V}(A/R) \wedge m.\vec{V}(G/R)$$

- Puis changer de point : $\vec{\delta}(M,S/R) = \vec{\delta}(A,S/R) + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{R}_d(S/R)$

5.5. Calcul du moment dynamique sur un axe.

Si on cherche $\vec{\delta}(A,S/R).\vec{u}$, (projection du moment dynamique sur $(A,\vec{u})$).

On utilise :

$$\vec{\delta}(A,S/R).\vec{u} = \frac{d}{dt}\left(\vec{\sigma}(A,S/R)\right)_R.\vec{u} + \left(\vec{V}(A/R) \wedge m.\vec{V}(G/R)\right).\vec{u}$$

Dans ce cas, plutôt que de calculer $\left(\dfrac{d\vec{\sigma}(A,S/R)}{dt}\right)_R$ puis de projeter sur une direction $\vec{u}$, il est toujours plus simple d'utiliser la relation :

$$\left(\frac{d\vec{\sigma}(A,S/R)}{dt}\right)_R.\vec{u} = \left(\frac{d\vec{\sigma}(A,S/R).\vec{u}}{dt}\right)_R - \left(\frac{d.\vec{u}}{dt}\right)_R.\vec{\sigma}(A,S/R)$$

- De plus, rappel : $\left(\dfrac{d\vec{u}}{dt}\right)_R = \left(\dfrac{d\vec{u}}{dt}\right)_{R_1} + \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \vec{u}$

5.5. Cas particuliers du calcul du moment cinétique.

Rappel : Pour un mouvement quelconque (mais en un point A fixe de(S))

$$\vec{\sigma}(A,S/R) = \overline{\overline{I}}_A(S).\vec{\Omega}(S/R) + m.\overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}(A,S/R)$$

- ✓ Solide (S) assimilé à une masse ponctuelle en P :

$$\vec{\sigma}(A,P/R) = m.\overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}(P/R)$$

- ✓ Pour un mouvement de rotation autour d'un point O fixe de R :

$$\vec{\sigma}(O,S/R) = \overline{\overline{I}}_O(S).\vec{\Omega}(S/R)$$

- ✓ En G on trouve la relation simplifiée : $\vec{\sigma}(G,S/R) = \overline{\overline{I}}_G(S).\vec{\Omega}(S/R)$

- ✓ Pour un mouvement de translation dans R, on a pour tout point A :

$$\vec{\sigma}(A,S/R) = m.\overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}(G,S/R)$$

(Ou tout autre vitesse car le champ des vitesses est uniforme !)

Remarques :

- C'est comme si toute la masse était concentrée en G
- Pour un mouvement de translation, le moment cinétique est nul en G

5.5. Cas particuliers du calcul du moment dynamique.

Rappels :

$$\vec{\delta}(A,S/R) = \frac{d}{dt}\left(\vec{\sigma}(A,S/R)\right)_R + \vec{V}(A/R) \wedge m\,.\vec{V}(G \in S/R)$$

- ✓ Solide (S) assimilé à une masse ponctuelle en P :

$$\vec{\delta}(A,P/R) = m.\overrightarrow{AP} \wedge \vec{a}(P/R)$$

- ✓ (S) en mouvement de translation dans R :

$$\vec{\delta}(A,S/R) = m.\overrightarrow{AG} \wedge \vec{a}(G,S/R)$$

Remarque :

- C'est comme si toute la masse était concentrée en G
- Pour un mouvement de translation, le moment dynamique est nul en G

6. Principe fondamental de la dynamique.

6.1. Enoncé.

Il existe au moins un référentiel galiléen R_g dans lequel le torseur des actions mécaniques extérieures au système Σ est égal au torseur dynamique galiléen de Σ.

$$\{D(\Sigma / R_g)\} = \{\tau(\overline{\Sigma} \rightarrow \Sigma)\}$$

Remarque : Si Σ est immobile ou en mouvement de translation rectiligne uniforme, on retrouve le PFS : $\{D(\Sigma / R_g)\} = \{0\}$

6.2. TRD et TMD.

Du PFD, on tire les deux théorèmes suivants

Théorème de la résultante dynamique appliqué à $\Sigma = (S_1 + S_2 + ...)$.

$$\vec{F}(\overline{\Sigma} \rightarrow \Sigma) = \vec{R}_d(\Sigma / Rg)$$

Théorème du moment dynamique au point A appliqué à $\Sigma = (S_1 + S_2 + ...)$.

$$\vec{M}(A, \overline{\Sigma} \rightarrow \Sigma) = \vec{\delta}(A, \Sigma / Rg)$$

Remarques :

- ✓ Chaque théorème donne 3 équations scalaires soient au total 6 équations scalaires.
- ✓ Dans le cas de l'approximation d'un problème plan on a seulement 3 équations.