Synthèse du cours de Dynamique des systèmes

Centre d'inertie d'un solide : $\overrightarrow{OG} = \dfrac{\int_S \overrightarrow{OP}.dm}{m}$

Centre d'inertie d'un ensemble de solides : $\overrightarrow{OG} = \dfrac{\sum_i m_i.\overrightarrow{OG_i}}{\sum_i m_i}$

Torseur cinétique :

Soit un solide (S) en mouvement par rapport à un repère (R).

$$\{C(S/R)\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}_c(S/R) = \int_S \vec{V}(P/R).dm \\ \vec{\sigma}(A,S/R) = \int_S \overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}(P/R).dm \end{Bmatrix}_A$$

$\vec{R}_c(S/R)$: Résultante cinétique $\qquad$ $\vec{\sigma}(A,S/R)$: Moment cinétique

Calcul de la Résultante cinétique : $\vec{R}_c(S/R) = m.\vec{V}(G \in S/R)$

Calcul du Moment cinétique :

$$\vec{\sigma}(A,S/R) = \overline{\overline{I}}_A(S).\vec{\Omega}(S/R) + m.\overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}(A,S/R)$$

Avec : $\overline{\overline{I}}_A(S)$: Matrice d'inertie du solide S au point A.

On a : $\vec{\sigma}(A,S/R) = \vec{\sigma}(B,S/R) + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{R}_c(S/R)$

Cas particuliers du calcul du Moment cinétique :

- ✓ A est le centre d'inertie de (S) : $\vec{\sigma}(A,S/R) = \overline{\overline{I}}_A(S).\vec{\Omega}(S/R)$
- ✓ A est un point de vitesse nulle : $\vec{\sigma}(G,S/R) = \overline{\overline{I}}_G(S).\vec{\Omega}(S/R)$
- ✓ Mouvement de translation de (S)/(R) : $\vec{\sigma}(A,S/R) = m.\overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}(G,S/R)$
- ✓ (S) assimilé à une masse ponctuelle en P : $\vec{\sigma}(A,P/R) = m.\overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}(P/R)$

Matrice d'inertie

Matrice d'inertie du solide S au point A : $\overline{\overline{I}}_A(S)=\begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}$

$A=\int_S (y^2+z^2).dm$ $B=\int_S (x^2+z^2).dm$ $C=\int_S (x^2+y^2).dm$

$D=\int_S y.z.dm$ $E=\int_S x.z.dm$ $F=\int_S x.y.dm$

Cette matrice caractérise la répartition de la matière d'un solide autour d'un point (ici A) dans une base donnée.

A : Moment d'inertie du solide (S) autour de l'axe $(O,\vec{i})$, en $kg.m^2$

F : Produit d'inertie par rapport au plan $(O,\vec{i},\vec{j})$,en $kg.m^2$

Exploitation des symétries dans le calcul des matrices d'inertie.

- S symétrique par rapport au plan $P(A,\vec{x},\vec{y})$.

$\int_S x.z.dm=0$ $\int_S y.z.dm=0$ $\overline{\overline{I}}_A(S)=\begin{bmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}$

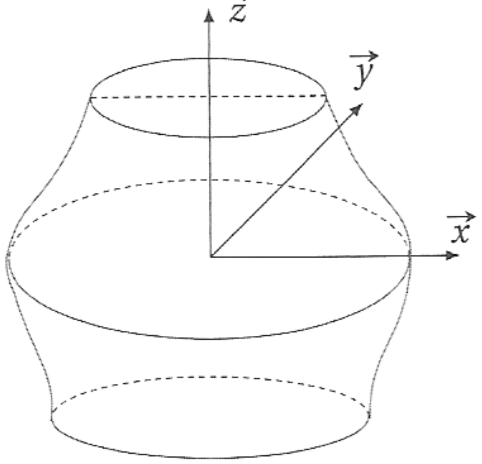
- S possède 2 plans de symétrie : $\overline{\overline{I}}_A(S)=\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}$

- S possède un axe de symétrie.

$$A=\int_S (y^2+z^2).dm=B=\int_S (x^2+z^2).dm$$

$$C=\int_S (x^2+y^2).dm=2.A-2.\int_S z^2.dm$$

$$\overline{\overline{J}}_A(S)=\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}$$



Théorème de Huyghens :

$$\overline{\overline{I}}_A(S) = \overline{\overline{I}}_G(S_1) + m.\begin{pmatrix} b^2+c^2 & -a.b & -a.c \\ -a.b & a^2+c^2 & -b.c \\ -a.c & -b.c & a^2+b^2 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AG} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Torseur dynamique

$$\{D(S/R)\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}_d(S/R) = \int_S \vec{a}(P/R).dm \\ \vec{\delta}(A,S/R) = \int_S \overrightarrow{AP} \wedge \vec{a}(P/R).dm \end{Bmatrix}_A$$

$\vec{R}_d(S/R)$: Résultante dynamique $\vec{\delta}(A,S/R)$: Moment dynamique

Calcul de la Résultante dynamique : $\vec{R}_d(S/R) = m.\vec{A}(G \in S/R)$

Calcul du Moment dynamique :

$$\vec{\delta}(A,S/R) = \frac{d}{dt}\left(\vec{\sigma}(A,S/R)\right)_R + \vec{V}(A/R) \wedge m.\vec{V}(G/R)$$

Attention, il s'agit bien de $\vec{V}(A/R) = \left(\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right)_R$ et non de $\vec{V}(A \in S/R)$ …

On a : $\vec{\delta}(A,S/R) = \vec{\delta}(B,S/R) + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{R}_d(D/R)$

Cas particuliers du calcul du Moment dynamique :

- ✓ A est fixe dans le repère R : $\vec{\delta}(A,S/R) = \frac{d}{dt}\left(\vec{\sigma}(A,S/R)\right)_R$
- ✓ A est le centre d'inertie : $\vec{\delta}(A,S/R) = \frac{d}{dt}\left(\vec{\sigma}(A,S/R)\right)_R$
- ✓ (S) assimilé à une masse ponctuelle en P : $\vec{\delta}(A,P/R) = m.\overrightarrow{AP} \wedge \vec{a}(P/R)$
- ✓ (S) en mouvement de translation dans R : $\vec{\delta}(A,S/R) = m.\overrightarrow{AG} \wedge \vec{a}(G \in S/R)$

Remarque : Dans ces 2 derniers cas, (masse ponctuelle ou mouvement de translation) on calcul le moment dynamique directement (sans passer par le moment cinétique).

Méthode de calcul conseillée pour le calcul du moment dynamique.

Lorsque $\overline{\overline{I}}_A(S)$ est donné :

1. Calculer : $\vec{\sigma}(A,S/R) = \overline{\overline{I}}_A(S).\vec{\Omega}(S/R) + m.\overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}(A,S/R)$
2. En déduire : $\vec{\delta}(A,S/R) = \dfrac{d}{dt}\left(\vec{\sigma}(A,S/R)\right)_R + \vec{V}(A/R) \wedge m.\vec{V}(G(S)/R)$
3. Puis changer de point : $\vec{\delta}(M,S/R) = \vec{\delta}(A,S/R) + \overrightarrow{MA} \wedge \vec{R}_d(S/R)$

Calcul du moment dynamique sur un axe.

$$\vec{\delta}(A,S/R).\vec{u} = \left(\frac{d\vec{\sigma}(A,S/R)}{dt}\right)_R .\vec{u} + \left(\vec{V}(A/R) \wedge m.\vec{V}(G/R)\right).\vec{u}$$

Pour calculer, $\left(\dfrac{d\vec{\sigma}(A,S/R)}{dt}\right)_R .\vec{u}$ on utilise :

$$\left(\frac{d\vec{\sigma}(A,S/R)}{dt}\right)_R .\vec{u} = \left(\frac{d\vec{\sigma}(A,S/R).\vec{u}}{dt}\right)_R - \left(\frac{d.\vec{u}}{dt}\right)_R .\vec{\sigma}(A,S/R)$$

Principe fondamental de la dynamique

Il existe au moins un référentiel galiléen R_g dans lequel le torseur des actions mécaniques extérieures au système E est égal au torseur dynamique galiléen de E.

$$\left\{D(E/R)\right\} = \left\{T(\overline{E} \rightarrow E)\right\}$$

$$\left\{\begin{matrix} \vec{R}_d(E/R) \\ \vec{\delta}(A,E/R) \end{matrix}\right\}_A = \left\{\begin{matrix} \vec{R}(\overline{E} \rightarrow E) \\ \vec{M}(A,\overline{E} \rightarrow E) \end{matrix}\right\}$$

On parle du Théorème de la Résultante Dynamique (TRD) et du Théorème du Moment Dynamique (TMD).